ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS (MADRID)

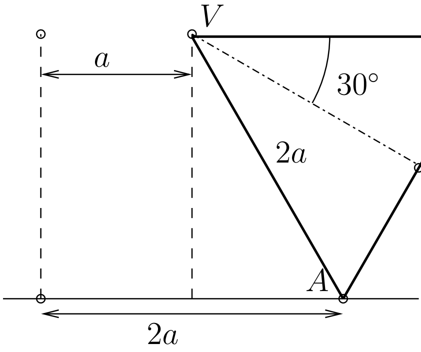
Mecánica

EXAMEN PARCIAL (23 de noviembre de 2002)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/25) Tiempo: 60 min.

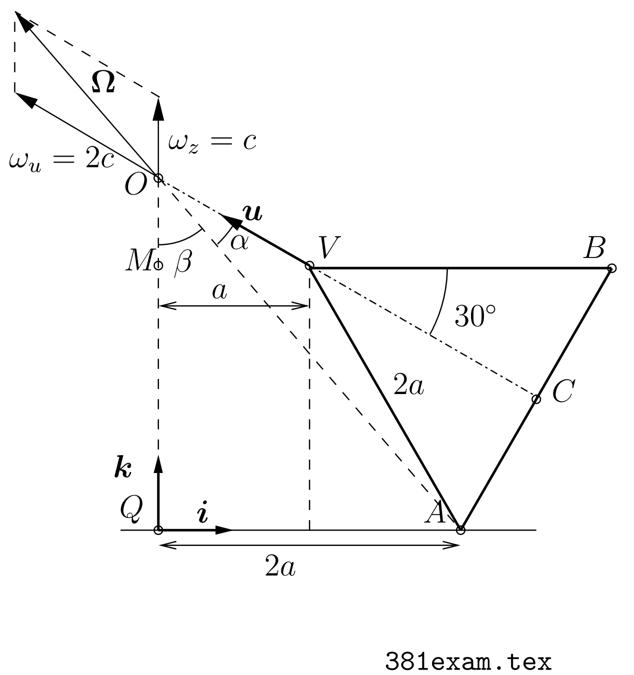
Un cono recto de revolución, semiángulo cónico 30° y generatriz de longitud $2a$ rueda sin deslizar por el perímetro de su base sobre un plano horizontal, describiendo el punto de contacto A una circunferencia con velocidad uniforme $2ac$, en sentido antihorario visto desde arriba. A su vez, el vértice V del cono describe otra circunferencia horizontal de radio a, situada a una distancia $a\sqrt{3}$ del plano de rodadura, cuya proyección sobre este plano es concéntrica con la circunferencia anterior. Se pide:



1. Describir el movimiento del cono, a) razonando si en cada instante puede interpretarse como una rotación instantánea o no; b) definiendo el eje del movimiento helicoidal instantáneo (o de rotación instantáneo en su caso); c) definiendo los lugares geométricos que define dicho eje a lo largo del movimiento (axoides fijo y móvil).
2. Velocidad y aceleración angular del cono.
3. Velocidad y aceleración de los siguientes puntos del cono:
   a) Punto material B de la base del cono que en un determinado instante se encuentra más alejado del plano de rodadura;
   b) Punto material D de la base del cono que en un determinado instante se encuentra sobre el diámetro horizontal, en el punto más avanzado del mismo según el sentido del movimiento.

⋆

1.— El cono tiene al menos un punto de velocidad nula, el de rodadura A, por lo que el movimiento será una rotación instantánea alrededor de un eje por dicho punto. No debe confundirse el punto (geométrico) de contacto, cuya velocidad es $2ac$, con el punto (material) del cono sobre el contacto, cuya velocidad es nula. El vértice del cono V describe una circunferencia horizontal con centro en M, por lo que la generatriz VA está obligada a permanecer en el plano vertical (móvil) por el eje QM y el punto A, así como el eje del cono VC (ver figura adjunta). A lo largo del movimiento dicho plano vertical gira alrededor del eje QM con velocidad de rotación c. Al ser el eje del cono una recta material, el punto O de corte del mismo con el eje vertical QM será



un punto fijo del movimiento, y por tanto es otro punto de velocidad nula que sirve para definir el eje instantáneo de rotación OA.

El eje instantáneo de rotación OA forma constantemente un ángulo fijo α con el eje (móvil) del cono OC, por lo que el axoide móvil es un cono de semiángulo α y eje OC. Por otra parte, también forma constantemente un ángulo fijo $\beta = \pi/3 - \alpha$ con el eje (fijo) OQ, por lo que el axoide fijo es un cono de semiángulo β y eje OQ. Mediante consideraciones geométricas elementales se obtiene $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}/5$, $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{3}/2$.

2.— El movimiento se puede interpretar como una rotación alrededor del eje $Qz = QO$ de velocidad $\omega_z = c$, y otra de rotación alrededor del eje del cono de velocidad ω_u. La composición de estas rotaciones debe producir velocidad nula en el punto material sobre A:

$$2a\omega_z - a\omega_u = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_u = 2\omega_z = 2c.$$

Por tanto la velocidad angular del cono es

$$\boldsymbol{\Omega} = c\,\boldsymbol{k} + 2c\,\boldsymbol{u} = -\sqrt{3}c\,\boldsymbol{i} + 2c\,\boldsymbol{k}.$$

Esta velocidad angular permanece constante respecto al plano vertical que la contiene, siendo por tanto su derivada únicamente la que corresponde por la rotación de este plano:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \omega_z\,\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{\Omega} = -c^2\sqrt{3}\,\boldsymbol{j}.$$

3.— Las velocidades pedidas las calcularemos a partir del punto A cuya velocidad es nula. Por tanto, teniendo en cuenta que $\boldsymbol{r}_{AB} = a(\boldsymbol{i} + \sqrt{3}\,\boldsymbol{k})$ y que $\boldsymbol{r}_{AD} = a(\frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\boldsymbol{k})$, resulta:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_B &= \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{AB} = 5ac\,\boldsymbol{j},\\
\boldsymbol{v}_D &= \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{AD} = ac\left(-2\,\boldsymbol{i} + \frac{5}{2}\,\boldsymbol{j} - \sqrt{3}\,\boldsymbol{k}\right).
\end{aligned}$$

Para las aceleraciones emplearemos como punto de referencia el centro de la base, C, que describe una circunferencia horizontal de radio $5a/2$ y por tanto su aceleración es $\boldsymbol{a}_C = -(5/2)ac^2\,\boldsymbol{i}$. Resulta

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_B &= \boldsymbol{a}_C + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{r}_{CB} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{CB}) = -ac^2\left(9\boldsymbol{i} + 2\sqrt{3}\,\boldsymbol{k}\right),\\
\boldsymbol{a}_D &= \boldsymbol{a}_C + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{r}_{CD} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{CD}) = -ac^2\left(\frac{5}{2}\boldsymbol{i} + 7\,\boldsymbol{j}\right).
\end{aligned}$$