Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (9 de septiembre de 2002)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 10/60) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara (no a lápiz). Cuando se pida *obtener* un resultado, deberán justificarse debidamente los pasos partiendo de las ecuaciones, mientras que si se pide *deducir* es necesario justificar todos los resultados. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*. La hoja de borrador no deberá entregarse.

Expresar la ecuación general para la derivada (absoluta) de un vector en función de su derivada respecto de un sistema de referencia móvil. A partir de esta ecuación, *obtener* las expresiones generales de los campos de velocidades y de aceleraciones del sólido rígido. *Discutir* la existencia de puntos de velocidad nula y de aceleración nula. (5 ptos.)

Sea $\boldsymbol{p}$ un vector, y S' una referencia móvil respecto de la cual se conoce su derivada temporal $(\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t)_{S'}$. La derivada (absoluta) respecto de una referncia fija S es

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\right)_S = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\right)_{S'} + \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{p}, \tag{1}$$

Siendo $\boldsymbol{\Omega}$ la velocidad de rotación de S' respecto a S. Podemos aplicar el resultado anterior (1) al caso del movimiento de un sólido ($\mathcal{B}$), en que el sistema móvil S' está ligado al propio sólido, definido mediante un triedro y un origen de coordenadas $O \in \mathcal{B}$. El vector que derivamos es el vector posición de una partícula material $P \in \mathcal{B}$ del mismo, definido respecto al origen O_0 del triedro fijo S, $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{O_0P}$: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{\rho}$, con $\boldsymbol{r}_O = \overrightarrow{O_0O}$, $\boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{OP}$. El vector $\boldsymbol{\rho}$ está ligado al sólido, y por tanto su derivada relativa al triedro del sólido será nula:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_O}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_O + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t}\right)_{S'} + \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{\rho} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{\rho}.} \tag{2}$$

Derivando de nuevo y volviendo a usar (1) se obtiene el campo de aceleraciones:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_O}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\wedge\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega}\wedge\left(\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t}\right)_{S'} + \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{\rho}\right) \quad\Rightarrow\quad \boxed{\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\wedge\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{\rho}).} \tag{3}$$

Los puntos de velocidad nula se obtienen con $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ en (2), despejando $\boldsymbol{\rho}$:

$$\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{\rho} = -\boldsymbol{v}_O \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\rho} = \frac{\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{v}_O}{\Omega^2} + \lambda\boldsymbol{\Omega}.$$

Ahora bien, esta solución (que define un eje) sólo es válida si se cumple la condición de compatibilidad $\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{v}_O = 0$. ($\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{v}$ es una constante para todos los puntos del sólido denominada invariante escalar.) Cuando haya puntos de velocidad nula el movimiento instantáneo es una rotación; si no, será un movimiento general compuesto de traslación y rotación.

Para estudiar los puntos de aceleración nula en (3), empleamos los tensores hemisimétricos asociados a los productos vectoriales: $\widehat{\boldsymbol{\Omega}} \equiv \boldsymbol{\Omega}\wedge$, $\widehat{\dot{\boldsymbol{\Omega}}} \equiv \dot{\boldsymbol{\Omega}}\wedge$. Entrando con $\boldsymbol{a} = 0$ en (3) resulta

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}_O + \widehat{\dot{\boldsymbol{\Omega}}}\cdot\boldsymbol{\rho} + \widehat{\boldsymbol{\Omega}}^2\cdot\boldsymbol{\rho} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\rho} = -\left(\widehat{\dot{\boldsymbol{\Omega}}} + \widehat{\boldsymbol{\Omega}}^2\right)^{-1}\cdot\boldsymbol{a}_O$$

En general existirá solución única (polo de aceleraciones), siempre que $(\widehat{\dot{\boldsymbol{\Omega}}} + \widehat{\boldsymbol{\Omega}}^2)$ sea invertible. Pueden también existir casos singulares en que no exista solución o no sea única.

Expresar la ecuación diferencial y la solución general (ecuación horaria) del movimiento de un sistema lineal con un grado de libertad, formado por una masa sujeta por un resorte lineal con amortiguamiento viscoso (subcritico), sometido a un movimiento impuesto en su base de tipo armónico. *Detallar* la forma de obtener las constantes que intervienen en dicha solución. *Explicar* la diferencia del movimiento resultante de un mismo sistema sometido a condiciones iniciales diferentes. *Aplicación:* sistema con masa 1 kg, constante del resorte 1 N/mm, amortiguamiento 10 % del crítico, sometido a un movimiento impuesto de amplitud 5 mm y frecuencia 5 Hz, partiendo del reposo. *Obtener* la ecuación horaria del movimiento. (5 ptos.)

Denominamos x la elongación del resorte, la coordenada absoluta de la masa es $X = x_b + x$. En la ecuación diferencial hemos de emplear la coordenada absoluta para la aceleración y la relativa (elongación) para las fuerzas elástica y viscosa. Teniendo en cuenta $x_b = A \operatorname{sen} \Omega t$:

$$m(\ddot{x}_b + \ddot{x}) + c\dot{x} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + k = mA\Omega^2 \operatorname{sen} \Omega t.} \tag{4}$$

El amortiguamiento crítico es $c_{\text{crit}} = 2\sqrt{km}$; denominando $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ y $\zeta = c/c_{\text{crit}} \rightarrow c = 2m\zeta\omega_0$, la ecuación (4) puede reescribirse

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = A\Omega^2 \operatorname{sen} \Omega t. \tag{5}$$

La solución general consta de la solución general de la homogénea y una solución particular de la completa

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = B\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t} \operatorname{sen}(\omega_d t + \phi_0) + C \operatorname{sen}(\Omega t + \delta), \tag{6}$$

siendo $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$. Obligando a que la solución particular x_p cumpla la ecuación diferencial (5) se obtienen los parámetros (C, δ):

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2\zeta\Omega\omega_0}{\Omega^2 - \omega_0^2}; \qquad C = -\frac{mA\Omega^2}{c\Omega} \operatorname{sen} \delta = \frac{A\Omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2\omega_0^2}}. \tag{7}$$

Las constantes (B, ϕ_0) se obtienen obligando a que (6) satisfaga las condiciones iniciales $(x_0,\ \dot{x}_0)$. Puesto que estas constantes afectan tan sólo a la solución de la homogénea, que al existir amortiguamiento al cabo del tiempo desaparece, la diferencia entre soluciones para condiciones iniciales distintas es un transitorio inicial que desaparece al cabo del tiempo, no influye en la solución en régimen permanente.

Aplicación: particularizando los datos ($\zeta = 0{,}1$, $\omega_0 = 10\sqrt{10}$ rad/s, $\Omega = 10\pi$ rad/s, $A = 5$ mm) en (7):

$$C = 24{,}783\,\text{mm}; \qquad \delta = -1{,}5053\,\text{rad}.$$

Obligando a $(x_0 = 0,\ \dot{x}_0 = 0)$ en (6):

$$\operatorname{sen} \phi_0 = -\frac{C \operatorname{sen} \delta}{B}; \qquad B = -\frac{C \cos \delta\ \Omega/\omega_0}{-\zeta \operatorname{sen} \phi_0 + \cos \phi_0 \sqrt{1-\zeta^2}}$$

Eliminando entre estas dos ecuaciones,

$$\operatorname{tg} \phi_0 = \frac{\operatorname{sen} \delta\, \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}}{\cos \delta\, \Omega + \operatorname{sen} \delta\, \omega_0 \zeta}$$

Particularizando los datos resulta

$$B = 24{,}745\,\text{mm}, \qquad \phi_0 = 1{,}5358\,\text{rad};$$

$$x(t) = 24{,}783 \operatorname{sen}(10\pi t - 1{,}5053) + 24{,}745\mathrm{e}^{-\sqrt{10}t} \operatorname{sen}(9{,}9499\sqrt{10}t + 1{,}5358)\ [\text{mm}].$$