Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (22 de enero de 2002)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación: 10/60) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto* en la hoja. La respuesta habrá de ser breve y directa. Deberán justificarse razonadamente todos los pasos. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no se recogerá.

Un sólido rígido con masa M, tensor central de inercia $\boldsymbol{I}_G$ y velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}$ se halla sometido a fuerzas cuyo momento en el centro de masas es $\boldsymbol{M}_G$. Se pide: a) A partir del principio del momento cinético, *deducir* razonadamente la expresión (vectorial) de las ecuaciones de Euler de la dinámica; b) Si $\boldsymbol{M}_G = \boldsymbol{0}$, ¿es posible que se mantenga fija la dirección de $\boldsymbol{\Omega}$? (*responder razonadamente* indicando en su caso las condiciones para ello). (5 puntos)

a) El principio del momento cinético establece que la derivada del momento cinético en G es igual al momento de las fuerzas:

$$\boldsymbol{M}_G = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_G. \tag{1}$$

El momento cinético en un sólido rígido se expresa a partir del tensor de inercia, $\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega}$. El tensor de inercia caracteriza la geometría de masas del sólido y es invariante en un sistema de referencia ligado al mismo. Utilizamos esta propiedad para desarrollar la derivada del momento cinético en (1), derivando primero respecto de la referencia (móvil) del sólido y agregando el término complementario correspondiente:

$$\boldsymbol{M}_G = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega}\right)_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega}. = \boldsymbol{I}_G\cdot\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega}. \tag{2}$$

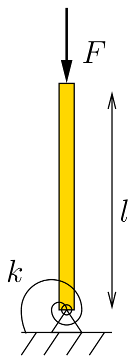
b) Si $\boldsymbol{M}_G = \boldsymbol{0}$, la condición de que la dirección de $\boldsymbol{\Omega}$ sea constante (eje permanente de rotación) equivale a que $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{0}$, ya que el módulo tampoco puede variar pues en caso contrario se puede comprobar fácilmente que no se conservaría el momento cinético $\boldsymbol{H}_G$. De la ecuación (2) se deduce pues que $\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{0}$, es decir el vector $\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega}$ debe ser paralelo a $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega} = \lambda\boldsymbol{\Omega}, \quad \lambda\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Esta ecuación define un problema de autovalores, se cumple cuando $\boldsymbol{\Omega}$ coincida con uno de los vectores propios de $\boldsymbol{I}_G$, siendo λ el autovalor asociado (que coincide con el momento de inercia según la dirección del vector propio). Al ser el tensor $\boldsymbol{I}_G$ definido positivo, tendrá siempre tres autovalores reales (distintos o no) y los tres vectores propios asociados.

Sin embargo, la condición anterior no garantiza necesariamente la estabilidad del eje de rotación (una pequeña perturbación del movimiento debe permanecer pequeña). Puede demostrarse que los ejes permanentes estables, entre las tres direcciones propias de $\boldsymbol{I}_G$, son aquéllos asociados a los momentos de inercia mínimo y máximo. Por el contrario, la rotación alrededor del eje con momento de inercia intermedio resulta inestable.

Sea un sistema sometido a fuerzas conservativas, con energía potencial $V(q_i)$ en función de las coordenadas libres q_i. Se pide: a) *Establecer* la condición para el equilibrio; b) *Definir* el concepto de estabilidad del equilibrio y *establecer* razonadamente la condición para ello; c) *Aplicar* al caso de la figura adjunta, en que la barra de longitud l y peso despreciable tiene un extremo articulado con un resorte de torsión de constante k, y una fuerza constante F aplicada en el extremo libre, *obteniendo* los valores de k para la estabilidad del equilibrio. (5 puntos)



a) La condición de equilibrio en un punto $q_i|_0$ es que el potencial sea estacionario:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_0 = 0, \quad i = 1, \dots n.$$

b) La estabilidad de una posición de equilibrio indica que, si se produce una pequeña perturbación de la misma, el movimiento se mantiene pequeño y en un entorno acotado de dicha posición. La condición de estabilidad se cumple si el potencial V tiene un mínimo en la posición de equilibrio. Matemáticamente esto se puede expresar diciendo que la matriz de derivadas segundas o Hessiano, $\partial^2 V/\partial q_i \partial q_j$, sea definida positiva en dicho punto. De forma equivalente, se puede afirmar que $V(q_i) - V(q_i|_0) > 0$ para toda posición q_i próxima a $q_i|_0$.

Podemos razonar cualitativamente de la siguiente manera para justificar que el mínimo de potencial ocasiona un equilibrio estable. Sin pérdida de generalidad, tomamos el cero de potencial en la posición de equilibrio, que supondremos en $q_i = 0$; en ella la energía valdrá $T+V = 0$. Suponemos que se produce una perturbación pequeña que modifique el equilibrio, de forma que $T+V = \epsilon > 0$, valor que se mantendrá constante en el movimiento subsiguiente, ya que el sistema es conservativo. Puesto que tanto T como V son definidos positivos (V es un mínimo local), sus valores en un entorno próximo serán necesariamente positivos, por lo que: $T \leq \epsilon$; $V \leq \epsilon$. La regularidad de $V(q_i)$ (es decir, $\det(\partial^2 V/\partial q_i \partial q_j) \neq 0$) obliga a que las coordenadas q_i se mantengan igualmente pequeñas, como queríamos probar.

c) En el caso propuesto, la posición vertical es de equilibrio como es fácil comprobar. Sin embargo, la carga F tiene que estar por debajo de un determinado valor crítico para que el equilibrio sea estable, como veremos a continuación.

Llamando ϕ al ángulo de la barra con la vertical, el potencial es

$$V = \frac{1}{2}k\phi^2 - Fl(1 - \cos\phi). \tag{4}$$

Derivando una vez, se obtiene la condición analítica de equilibrio,

$$0 = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\phi} = k\phi - Fl \operatorname{sen}\phi,$$

que se cumple obviamente para $\phi = 0$. Derivando de nuevo, la condición de estabilidad es:

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\phi^2} = k - Fl\cos\phi > 0.$$

Particularizando para $\phi = 0$, se obtiene finalmente:

$$\boxed{k > Fl} \quad \text{(carga crítica de inestabilidad o \textit{pandeo})}.$$