Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

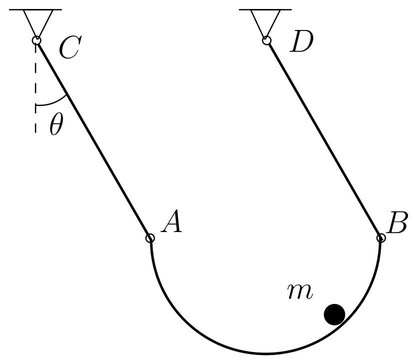
Mecánica

1.er EXAMEN PARCIAL (24 de Noviembre de 2001)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º Tiempo: 60 min.

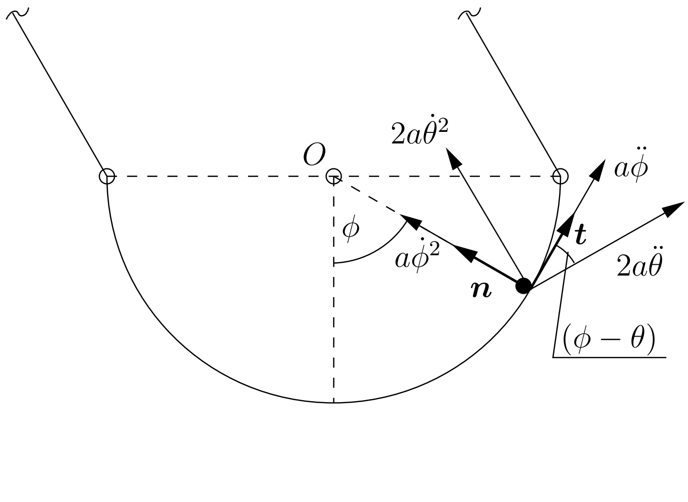
Una partícula de masa m se mueve con ligadura bilateral sobre un semiaro de radio a. A su vez el semiaro se encuentra unido por A y B a dos barras AC y BD de longitud $2a$. Dichas barras se encuentran articuladas en sus extremos, y tienen impedidos los movimientos de los puntos C y D. El semiaro, la partícula y las barras se mueven en un plano vertical fijo, de manera que el ángulo que forman las barras con la dirección vertical es un movimiento impuesto dado por la ley $\theta = \theta(t)$. Se pide:



1. Ecuación diferencial del movimiento de la partícula.
2. Reacción que el semiaro ejerce sobre la partícula.
3. En el caso en que el movimiento impuesto sea tal que $\dot{\theta}(t) = \omega$ (constante), suponiendo asimismo ausencia de gravedad (sólo para este apartado), demostrar que el movimiento de la partícula relativo a las barras corresponde al de un péndulo cuya longitud equivalente se determinará.

1.— El movimiento se puede interpretar como una traslación circular del semiaro debido al giro (θ) de las varillas, y un movimiento de la partícula (ϕ) relativo al semiaro (véase figura adjunta).

Descomponiendo la aceleración (absoluta) de la partícula:



$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\text{arr}} + \boldsymbol{a}_{\text{rel}} + \boldsymbol{a}_{\text{cor}};$$

$$\boldsymbol{a}_{\text{arr}} = 2a\ddot{\theta}\,[\cos(\phi-\theta)\,\boldsymbol{t} - \operatorname{sen}(\phi-\theta)\,\boldsymbol{n}] + 2a\dot{\theta}^2\,[\operatorname{sen}(\phi-\theta)\,\boldsymbol{t} + \cos(\phi-\theta)\,\boldsymbol{n}]\,;$$

$$\boldsymbol{a}_{\text{rel}} = a\ddot{\phi}\,\boldsymbol{t} + a\dot{\phi}^2\,\boldsymbol{n}; \quad \boldsymbol{a}_{\text{cor}} = \boldsymbol{0}.$$

Por otra parte, las fuerzas sobre la partícula son el peso, $-mg(\operatorname{sen}\phi\,\boldsymbol{t} + \cos\phi\,\boldsymbol{n})$, y la reacción normal del semiaro $N\,\boldsymbol{n}$. Estableciendo la ecuación fundamental de la dinámica en dirección $\boldsymbol{t}$ se obtiene la ecuación pedida:

$$m\left[2a\ddot{\theta}\cos(\phi-\theta) + 2a\dot{\theta}^2\operatorname{sen}(\phi-\theta) + a\ddot{\phi}\right] = -mg\operatorname{sen}\phi. \tag{1}$$

2.— La expresión de la reacción resulta de la ecuación dinámica en dirección normal:

$$m\left[-2a\ddot{\theta}\,\mathrm{sen}(\phi-\theta)+2a\dot{\theta}^2\cos(\phi-\theta)+a\dot{\phi}^2\right]=N-mg\cos\phi. \tag{2}$$

3.— En este caso, $\dot{\theta}=\omega$, $\ddot{\theta}=0$, $g=0$. Particularizando en la ecuación (1) resulta:

$$2a\omega^2\,\mathrm{sen}(\phi-\theta)+a\ddot{\phi}=0.$$

Cambiando de variable a $\varphi=\phi-\theta$ (ángulo relativo), la expresión anterior resulta:

$$\ddot{\varphi}+2\omega^2\,\mathrm{sen}\,\varphi=0.$$

Por otra parte, la ecuación de un péndulo simple es

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,\varphi=0,$$

deduciéndose la equivalencia de ambas ecuaciones con una longitud del péndulo equivalente

$$l_{\mathrm{eq}}=\frac{g}{2\omega^2}.$$