Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (10 de septiembre de 2001)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/60) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto* en la hoja. La respuesta habrá de ser breve y directa. Deberán justificarse razonadamente todos los pasos. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no se recogerá.

Sea un sistema lineal y conservativo con n grados de libertad, con posición de equilibrio estable. *Escribir* la forma general de las ecuaciones del movimiento, identificando las matrices que caracterizan el sistema. *Definir* los modos normales de vibración y las frecuencias propias. *Demostrar* la propiedad de ortogonalidad de los modos de vibración respecto de la matriz de masa. (5 ptos.)

Denominando $\{q_j, j = 1 \dots n\}$ a las coordenadas medidas a partir de la posición de equilibrio estable, las ecuaciones son de la forma

$$m_{ij}\ddot{q}_j + k_{ij}q_j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \mathbf{0}, \tag{1}$$

donde $[\mathbf{M}] \equiv [m_{ij}]$ y $[\mathbf{K}] \equiv [k_{ij}]$ son las denominadas *matriz de masa* y *matriz de rigidez* respectivamente. (Se emplea el convenio de suma implícita para los índices repetidos.) No aparecen en las ecuaciones términos proporcionales a $\dot{q}_j$ (amortiguamiento viscoso), ni términos de fuerza a la derecha del signo =, al tratarse de un sistema conservativo. Se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, lineal y autónomo. La matriz de masa $[\mathbf{M}]$ proviene de los coeficientes de la energía cinética, y por tanto es simétrica y definida positiva. Por su parte, la matriz de rigidez $[\mathbf{K}]$ es asimismo simétrica y será definida positiva al tratarse de una posición de equilibrio estable. En estas condiciones, cualquier perturbación respecto de la posición de equilibrio estable produce un movimiento de vibración libre acotado.

Probando con una solución armónica del tipo $\{\mathbf{q}(t)\} = \{\boldsymbol{\phi}\}\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$ en (1):

$$-\omega^2[\mathbf{M}]\{\boldsymbol{\phi}\}\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi) + [\mathbf{K}]\{\boldsymbol{\phi}\}\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \left(-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]\right)\{\boldsymbol{\phi}\} = \mathbf{0}.$$

Esta expresión define un *problema de autovalores generalizado.* El término ω se denomina *frecuencia propia* y para que exista solución (no trivial) debe cumplir la ecuación característica $\det(-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]) = 0$. Los vectores $\{\boldsymbol{\phi}\}$ solución del mismo se denominan *modos normales de vibración.* Existen en general n frecuencias propias y modos normales asociados, $(\omega_\alpha, \{\boldsymbol{\phi}\}_\alpha), \alpha = 1 \dots n$.

Los modos normales de vibración asociados a frecuencias propias distintas tienen la propiedad de *ortogonalidad.* En efecto, sean $\{\boldsymbol{\phi}\}_\alpha, \{\boldsymbol{\phi}\}_\beta$:

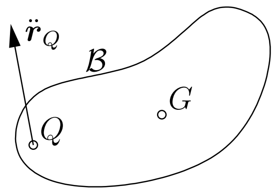
$$\omega_\alpha^2[\mathbf{M}]\{\boldsymbol{\phi}\}_\alpha = [\mathbf{K}]\{\boldsymbol{\phi}\}_\alpha;$$
$$\omega_\beta^2[\mathbf{M}]\{\boldsymbol{\phi}\}_\beta = [\mathbf{K}]\{\boldsymbol{\phi}\}_\beta;$$

premultiplicando la primera ecuación por $\{\boldsymbol{\phi}\}_\beta^{\mathrm{T}}$ y la segunda por $\{\boldsymbol{\phi}\}_\alpha^{\mathrm{T}}$ y restando, teniendo en cuenta la simetría de $[\mathbf{M}]$ y $[\mathbf{K}]$ y que $\omega_\alpha \neq \omega_\beta$, se obtiene:

$$(\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2)\{\boldsymbol{\phi}\}_\alpha^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}]\{\boldsymbol{\phi}\}_\beta = \{\mathbf{0}\} \quad \Rightarrow \quad \{\boldsymbol{\phi}\}_\alpha^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}]\{\boldsymbol{\phi}\}_\beta = \{\mathbf{0}\}.$$

Esta última ecuación expresa la ortogonalidad de ambos modos respecto a $[\mathbf{M}]$, c.q.d.

A un sólido $\mathcal{B}$ se le impone un movimiento prescrito en uno de sus puntos Q, con aceleración $\ddot{\boldsymbol{r}}_Q \neq \boldsymbol{0}$, no existiendo ninguna otra restricción ni fuerza aplicada sobre el mismo. Suponiendo conocido el tensor de inercia en $\boldsymbol{I}_Q$ y el movimiento impuesto $\boldsymbol{r}_Q(t)$, *obtener* las ecuaciones de Euler de la dinámica del movimiento del sólido relativo a Q. (5 ptos.)



El movimiento respecto a Q es *no inercial*, al ser la aceleración $\ddot{\boldsymbol{r}}_Q \neq \boldsymbol{0}$, por lo que no se pueden aplicar las ecuaciones de Euler "estándar" del sólido rígido.

Considerando un sistema de referencia con origen en Q y paralelo al inercial, en la descomposición del campo de aceleraciones del movimiento relativo tendremos $\boldsymbol{a}_{\text{arr}} = \ddot{\boldsymbol{r}}_Q$, $\boldsymbol{a}_{\text{cor}} = \boldsymbol{0}$. Por tanto, se puede expresar la dinámica del movimiento relativo como si la referencia fuera inercial, introduciendo unas fuerzas (ficticias) de inercia $-\rho \mathrm{d}V \ddot{\boldsymbol{r}}_Q$ para cada elemento de masa $\rho\mathrm{d}V$ de $\mathcal{B}$. Este campo de fuerzas produce en Q un momento

$$\int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_Q) \wedge (-\ddot{\boldsymbol{r}}_Q)\, \rho \mathrm{d}V = -(\boldsymbol{r}_G - \boldsymbol{r}_Q) \wedge M\ddot{\boldsymbol{r}}_Q = -\boldsymbol{r}_{QG} \wedge M\ddot{\boldsymbol{r}}_Q. \tag{2}$$

Este término puede interpretarse como el momento en Q de una fuerza de valor $-M\ddot{\boldsymbol{r}}_Q$, aplicada en G.

En consecuencia, podemos establecer las ecuaciones de Euler del movimiento del sólido respecto a Q como si este punto fuera fijo (origen de una referencia inercial), sin más que agregar el momento (ficticio) que resulta de (2):

$$-\boldsymbol{r}_{QG} \wedge M\ddot{\boldsymbol{r}}_Q = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\boldsymbol{I}_Q \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{I}_Q \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{I}_Q \cdot \boldsymbol{\Omega}). \tag{3}$$

En el caso en que, además, hubiese fuerzas exteriores aplicadas al sólido, bastaría con añadir el momento de las mismas $\boldsymbol{M}_Q$ al lado izquierdo de la ecuación (3).

Otra forma alternativa de razonar sería desarrollando la expresión genérica del momento cinético respecto al punto Q, con velocidades medidas respecto a la referencia no inercial con origen en Q, denominada SQ:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_Q^{SQ} &= \int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_Q) \wedge (\dot{\boldsymbol{r}} - \dot{\boldsymbol{r}}_Q)\, \rho \mathrm{d}V \\
&= \int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_G) \wedge (\dot{\boldsymbol{r}} - \dot{\boldsymbol{r}}_Q)\, \rho \mathrm{d}V + \int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{r}_G - \boldsymbol{r}_Q) \wedge (\dot{\boldsymbol{r}} - \dot{\boldsymbol{r}}_Q)\, \rho \mathrm{d}V \\
&= \boldsymbol{H}_G + (\boldsymbol{r}_G - \boldsymbol{r}_Q) \wedge M(\dot{\boldsymbol{r}}_G - \dot{\boldsymbol{r}}_Q).
\end{aligned}$$

Derivando la expresión anterior,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{H}_Q^{SQ} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{H}_G + \underbrace{(\dot{\boldsymbol{r}}_G - \dot{\boldsymbol{r}}_Q) \wedge M(\dot{\boldsymbol{r}}_G - \dot{\boldsymbol{r}}_Q)}_{=\boldsymbol{0}} + (\boldsymbol{r}_G - \boldsymbol{r}_Q) \wedge M(\ddot{\boldsymbol{r}}_G - \ddot{\boldsymbol{r}}_Q) \\
&= \underbrace{\boldsymbol{M}_G + (\boldsymbol{r}_G - \boldsymbol{r}_Q) \wedge M\ddot{\boldsymbol{r}}_G}_{=\boldsymbol{M}_Q = \boldsymbol{0}} - (\boldsymbol{r}_G - \boldsymbol{r}_Q) \wedge M\ddot{\boldsymbol{r}}_Q = -\boldsymbol{r}_{QG} \wedge M\ddot{\boldsymbol{r}}_Q.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{H}_Q^{SQ} = \boldsymbol{I}_Q \cdot \boldsymbol{\Omega}$, comprobamos que se obtiene idéntico resultado al expresado antes (3).