Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN PARCIAL (31 de marzo de 2001)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

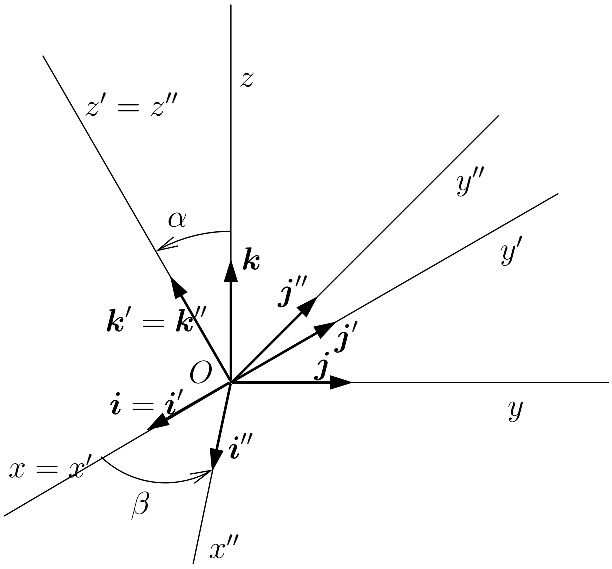
Ejercicio 1.º (puntuación: 5/25) Tiempo: 30 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto* en la hoja. La respuesta habrá de ser breve y directa. Deberán justificarse razonadamente todos los pasos. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no se recogerá.

Sea un sólido rígido $\mathcal{B}$ y un triedro cartesiano $Oxyz$ fijo. Se producen dos rotaciones consecutivas de $\mathcal{B}$, la primera un ángulo α alrededor del eje Ox, y la segunda un ángulo β alrededor del nuevo eje Oz' (transformado de Oz en el primer giro). a) *Obtener* la expresión matricial que relaciona las coordenadas de un punto en la configuración final, $(x, y, z)^{\mathrm{T}}$, con las coordenadas iniciales del mismo punto, $(x^o, y^o, z^o)^{\mathrm{T}}$. b) *Emplear* esta expresión para deducir la relación entre las componentes del tensor de inercia en la base $Oxyz$ entre ambas configuraciones. c) ¿La rotación compuesta puede expresarse como un único giro alrededor de un eje? en caso afirmativo, indicar cómo se obtendría la dirección de dicho eje. (5/10)

a) Consideramos un triedro cartesiano ligado al sólido. En la posición inicial del cuerpo lo denominamos $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$. La primera rotación convierte a este triedro en $(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}')$:

$$\underbrace{\|\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'\|}_{\|\boldsymbol{e}_i'\|} = \underbrace{\|\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\|}_{\|\boldsymbol{e}_i\|} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}_{[\mathbf{R}_x(\alpha)]}$$



A su vez, la segunda rotación opera sobre este triedro rotado $\|\boldsymbol{e}_i'\|$, convirtiéndolo finalmente en

$$\underbrace{\|\boldsymbol{i}'', \boldsymbol{j}'', \boldsymbol{k}''\|}_{\|\boldsymbol{e}_i''\|} = \underbrace{\|\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'\|}_{\|\boldsymbol{e}_i'\|} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta & 0 \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{[\mathbf{R}_z(\beta)]}$$

Componiendo las dos rotaciones resulta

$$\|\boldsymbol{e}_i''\| = \|\boldsymbol{e}_i'\|[\mathbf{R}_x(\beta)] = \|\boldsymbol{e}_i\| \underbrace{[\mathbf{R}_x(\alpha)][\mathbf{R}_z(\beta)]}_{[\mathbf{R}]}.$$

Multiplicando las matrices de rotación, queda la matriz de cambio

$$[\mathbf{R}] = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta & 0 \\ \cos\alpha\operatorname{sen}\beta & \cos\alpha\cos\beta & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta & \operatorname{sen}\alpha\cos\beta & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Para ver cómo opera sobre las coordenadas, consideramos el vector posición $\boldsymbol{x}$ de una partícula material del sólido. Denominando $\{\mathbf{x}\}$ a la matriz-columna de coordenadas del mismo, la expresión de coordenadas en los distintos triedros conduce a:

$$\boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{e_i}''\|\{\mathbf{x}''\} = \|\boldsymbol{e_i}\|[\mathbf{R}]\{\mathbf{x}''\} = \|\boldsymbol{e_i}\|\{\mathbf{x}\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \{\mathbf{x}\} = [\mathbf{R}]\{\mathbf{x}''\} \\ x_i = R_{ij}x''_j \end{cases}$$

Las coordenadas x''_j corresponden al triedro que ha seguido la rotación del cuerpo, y por tanto son constantes para una partícula dada del mismo, e iguales a las que tenía dicha partícula en la configuración inicial, $x''_j = x^\circ_j$. Por el contrario, x_i son las coordenadas de la misma partícula en la configuración final, expresadas en la base fija. La transformación de rotación sobre $\{\mathbf{x}^\circ\}$ se expresa por tanto como:

$$x_i = R_{ij}x^\circ_j \quad \Leftrightarrow \quad \{\mathbf{x}\} = [\mathbf{R}]\{\mathbf{x}^\circ\}.$$

b) Análogamente puede operarse para las componentes del tensor de inercia $[\mathbf{I}_O]$, respecto de las componentes del mismo en el triedro móvil, $[\mathbf{I}^\circ_O]$:

$$I_{O,ij} = R_{ik}R_{jl}I^\circ_{O,kl} \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{I}_O] = [\mathbf{R}][\mathbf{I}^\circ_O][\mathbf{R}]^{\mathrm{T}}.$$

Las componentes $[\mathbf{I}^\circ_O]$ se denominan también *materiales* o *convectivas* y son constantes a lo largo del movimiento.

c) Por el teorema de Euler se sabe que una matriz ortogonal propia $[\mathbf{R}]$ equivale a un giro alrededor de algún eje $(O, \boldsymbol{u})$. Es inmediato comprender que la rotación deja invariante a los puntos de dicho eje, por lo que se verificará

$$[\mathbf{R}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{u}\}.$$

Esta ecuación define la dirección $\boldsymbol{u}$ como vector propio de $[\mathbf{R}]$, con autovalor $\lambda = 1$. Esta expresión se puede escribir igualmente como

$$([\mathbf{R}] - [\mathbf{I}])\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{0}\},$$

que define un sistema de ecuaciones homogéneo para el que se busca una solución distinta de la trivial ($\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$). Al tratarse de una matriz ortogonal propia, queda garantizada la existencia de dicha solución, o lo que es equivalente, que posee un autovalor $\lambda = 1$.