Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (31 de enero de 2001)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación: 10/60) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto* en la hoja. La respuesta habrá de ser breve y directa. Deberán justificarse razonadamente todos los pasos. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no se recogerá.

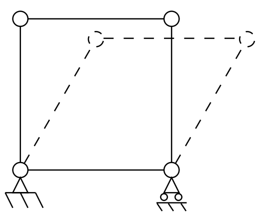
---

a) *Definir* los conceptos de *isostatismo interno*, *hiperestatismo interno* y *mecanismo* para un sistema mecánico general. b) *Poner en cada caso un ejemplo* mediante sistemas planos de barras articuladas. c) *Describir* en cada caso las ecuaciones que es preciso emplear para resolver el sistema calculando las tensiones en barras. (5/10)

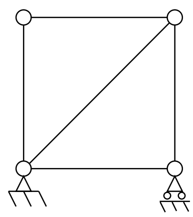
a) Se denomina *estructura* a un sistema mecánico que no tiene grados de libertad internos, es decir, que supuesta una sustentación externa isostática, está en equilibrio para cualquier conjunto de cargas externas aplicadas. Si por el contrario permite movimientos con uno o más grados de libertad, se denomina *mecanismo.* A su vez, una estructura puede tener el número justo de elementos que impiden su deformación, en cuyo caso se denomina *isostática.* Los esfuerzos en dichos elementos pueden determinarse aplicando tan sólo las ecuaciones de la estática. Si por el contrario contiene elementos que la coaccionan internamente de forma superabundante, se denomina *hiperestática.* Para determinar los esfuerzos es necesario adicionalmente emplear ecuaciones constitutivas que ligan éstos con la deformación.

b)

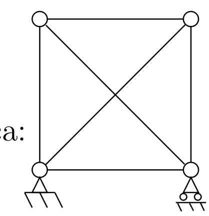
Mecanismo (1 g.d.l.):



Estructura isostática:



Estructura hiperestática:



c) Se consideran como incógnitas las tensiones en las b barras y las 3 reacciones de apoyo (caso plano). El equilibrio en cada uno de los n nudos proporciona 2 ecuaciones (suma de fuerzas en dos direcciones cartesianas).

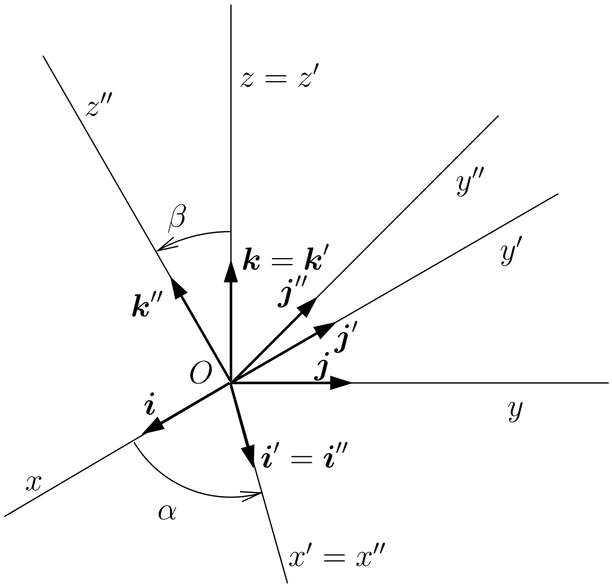
1. En caso del mecanismo, se tienen $b = 4$ barras y $n = 4$ nudos, lo que proporcionaría más ecuaciones que incógnitas ($2n > b + 3$). Hay que considerar una incógnita más, el grado de libertad del mecanismo, y emplear las ecuaciones de la dinámica en lugar de la estática, en las que entra dicho g.d.l. y sus derivadas.

2. En la estructura isostática el número de ecuaciones es igual al de incógnitas, ($n = 4$; $b = 5$; $2n = b + 3$), que se resuelven con las ecuaciones de la estática en cada nudo.

3. En la estructura hiperestática hay más incógnitas que ecuaciones, ($n = 4$; $b = 6$; $2n < b+3$). Con las ecuaciones de la estática de sistemas rígidos, no es posible determinar las tensiones en las barras, quedan indeterminadas. Hay que introducir las ecuaciones de relacionan la deformación de las barras con su tensión, las ecuaciones de la elasticidad.

Sea un sólido rígido $\mathcal{B}$ y un triedro cartesiano $Oxyz$ fijo. Se producen dos rotaciones consecutivas de $\mathcal{B}$, la primera un ángulo α alrededor del eje Oz, y la segunda un ángulo β alrededor del nuevo eje Ox' (resultado del primer giro sobre el eje Ox). a) *Obtener* la expresión matricial que relaciona las coordenadas de un punto en la configuración final, $(x, y, z)^{\mathrm{T}}$, con las coordenadas iniciales del mismo punto, $(x^o, y^o, z^o)^{\mathrm{T}}$. b) *Emplear* esta expresión para deducir la relación entre las componentes del tensor de inercia en la base $Oxyz$ entre ambas configuraciones. (5/10)

Consideramos un triedro cartesiano ligado al sólido. En la posición inicial del cuerpo lo denominamos $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$. La primera rotación convierte a este triedro en $(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}')$:



$$\underbrace{\|\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'\|}_{\|\boldsymbol{e}_i'\|} = \underbrace{\|\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\|}_{\|\boldsymbol{e}_i\|} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{[\mathbf{R}_z(\alpha)]}$$

A su vez, la segunda rotación opera sobre este triedro rotado $\|\boldsymbol{e}_i'\|$, convirtiéndolo finalmente en

$$\underbrace{\|\boldsymbol{i}'', \boldsymbol{j}'', \boldsymbol{k}''\|}_{\|\boldsymbol{e}_i''\|} = \underbrace{\|\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'\|}_{\|\boldsymbol{e}_i'\|} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ 0 & \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix}}_{[\mathbf{R}_x(\beta)]}$$

Componiendo las dos rotaciones resulta

$$\|\boldsymbol{e}_i''\| = \|\boldsymbol{e}_i'\|[\mathbf{R}_x(\beta)] = \|\boldsymbol{e}_i\| \underbrace{[\mathbf{R}_z(\alpha)][\mathbf{R}_x(\beta)]}_{[\mathbf{R}]}.$$

Multiplicando las matrices de rotación, queda la matriz de cambio

$$[\mathbf{R}] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\cos\beta & \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\ 0 & \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

Para ver cómo opera sobre las coordenadas, consideramos el vector posición $\boldsymbol{x}$ de una partícula material del sólido. Denominando $\{\mathbf{x}\}$ a la matriz-columna de coordenadas del mismo, la expresión de coordenadas en los distintos triedros conduce a:

$$\boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{e_i}''\|\{\mathbf{x}''\} = \|\boldsymbol{e_i}\|[\mathbf{R}]\{\mathbf{x}''\} = \|\boldsymbol{e_i}\|\{\mathbf{x}\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \{\mathbf{x}\} = [\mathbf{R}]\{\mathbf{x}''\} \\ x_i = R_{ij}x_j'' \end{cases}$$

Las coordenadas x_j'' corresponden al triedro que ha seguido la rotación del cuerpo, y por tanto son constantes para una particula dada e iguales a las de la configuración inicial, $x_j'' = x_j^\circ$. Por el contrario, x_i son las coordenadas del vector rotado, en la configuración final. La transformación de coordenadas o rotación se expresa por tanto como:

$$x_i = R_{ij}x_j^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \{\mathbf{x}\} = [\mathbf{R}]\{\mathbf{x}^\circ\}.$$

Análogamente puede operarse para cambiar de base a las componentes del tensor de inercia $[\mathbf{I}_O]$:

$$I_{O,ij} = R_{ik}R_{jl}I_{O,kl}^\circ \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{I}_O] = [\mathbf{R}][\mathbf{I}_O^\circ][\mathbf{R}]^{\mathrm{T}}.$$