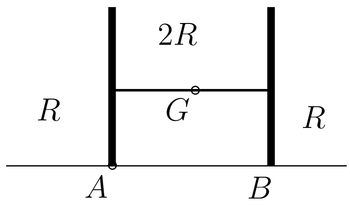
Mecánica - ICT

PRÁCTICA PUNTUABLE C5 (19 de mayo de 2014)

Apellidos *Nombre* *Nº* *Grupo*

Un sólido está formado por dos discos de radio R y masa m unidos rígidamente por una varilla sin masa de longitud $2R$. El sólido así formado rueda y desliza sobre un plano horizontal fijo. La velocidad angular tiene una componente horizontal según el eje del sólido de valor ω y una componente vertical 2ω. Se pide:



1. Obtener las ecuaciones de la dinámica del sólido. Para ello:
   a) Calcular el tensor de inercia del sólido en G.
   b) Calcular el momento cinético del sólido en G.
   c) Plantear las ecuaciones cardinales de la dinámica del sólido (balance de cantidad de movimiento y de momento cinético).
2. Calcular las reacciones del plano sobre el disco y la varilla en los puntos A y B, y obtener el valor de ω para que se produzca la pérdida de contacto del sólido con el plano en alguno de los puntos de contacto, indicando en cuál de los dos.

1.— Adoptamos un sistema de referencia $(G, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ que acompaña el movimiento de la varilla horizontal, sin la rotación propia. El vector $\boldsymbol{i}$ según el eje de la recta y el vector $\boldsymbol{j}$ según la vertical. El tensor central de inercia expresado en estos ejes resulta:

$$[\boldsymbol{I}_G] = \begin{bmatrix} mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2}mR^2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Las componentes de la velocidad angular en este triedro en general serían $\{\boldsymbol{\Omega}\}^{\mathrm{T}} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$. De entrada la componente ω_z es nula, al permanecer el eje horizontal. El momento de las fuerzas alrededor de la dirección vertical fija es nulo por lo que esta componente es constante, $\omega_y = 2\omega$. Por último, el momento de las fuerzas alrededor de la dirección del eje de revolución (móvil) es también nula, por lo que se conserva $\omega_x = \omega$. De esta forma la velocidad angular vale $\boldsymbol{\Omega} = \omega\boldsymbol{i} + 2\omega\boldsymbol{j}$, y el momento cinético en este triedro es:

$$\boldsymbol{H}_G = mR^2(\omega\boldsymbol{i} + 5\omega\boldsymbol{j}) \tag{2}$$

Las ecuaciones cardinales de la dinámica son:

$$\boldsymbol{F} = 2m\boldsymbol{a}_G = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad (N_A + N_B)\boldsymbol{j} = 2mg\,\boldsymbol{j} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{M}_G = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_G}{\mathrm{d}t} = 2\omega\,\boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{H}_G \quad \Rightarrow \quad (N_B R - N_A R)\boldsymbol{k} = -2mR^2\omega^2\boldsymbol{k} \tag{4}$$

(el resto de componentes son nulas)

2.— Resolviendo en las ecuaciones (3) y (4) las reacciones finalmente resultan:

$$N_A = mg + mR\omega^2 \tag{5}$$

$$N_B = mg - mR\omega^2 \tag{6}$$

es decir, la rueda A resulta más cargada y la B descargada. Si la velocidad de rotación ω es suficientemente alta esta última reacción se anula, y la rueda perdería el contacto. Esto se produce para

$$\omega^2 = \frac{g}{R} \tag{7}$$