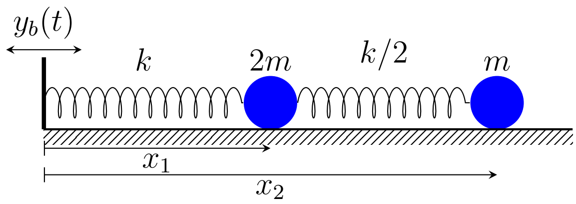
Mecánica – ICT

PROBLEMA PUNTUABLE 4 A (8 de abril del 2014)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio Tiempo: 60 min.



Se considera un sistema lineal de 2 gdl formado por las masas y resortes lineales que se indican en la figura adjunta. Se tomarán las coordenadas indicadas de cada masa, relativas a la base, que podrán suponerse referidas a la posición de equilibrio de cada resorte (es decir, la configuración $x_1 = x_2 = 0$ es la de equilibrio del sistema sin fuerzas). A la base se le imprime un movimiento impuesto de tipo sísmico $y_b(t)$. Se supone conocido el parámetro $\omega_B = \sqrt{k/m}$, en función del cual se expresarán todos los resultados. Se pide:

1. Obtener las ecuaciones diferenciales de la dinámica para las coordenadas (x_1, x_2), incluyendo las fuerzas de inercia que resultan del movimiento impuesto en la base. Expresarlas en forma matricial y determinar las matrices de masa y rigidez, así como el vector de fuerzas.

2. Calcular las frecuencias propias del sistema y los modos normales de vibración asociados; calcular asimismo la masa modal y la fuerza modal correspondiente de cada modo, expresando las ecuaciones diferenciales desacopladas para las coordenadas normales (u_1, u_2) (amplitudes de cada modo de vibración).

3. Se supone ahora que existe un amortiguamiento proporcional (Rayleigh) por el cual la matriz de amortiguamiento es $[\mathbf{C}] = \alpha[\mathbf{M}] + \beta[\mathbf{K}]$, con los valores $\alpha = \epsilon\omega_B, \beta = \epsilon/\omega_B$. Obtener las tasas de amortiguamiento respecto al crítico para cada uno de los modos (expresadas en función de ϵ), y completar las ecuaciones normales obtenidas en el apartado anterior para incluir los términos de amortiguamiento.

§1. Dado que las coordenadas (x_1, x_2) son relativas a la base móvil, se debe sumar la velocidad $\dot{y}_b$ de la misma para expresar en un sistema inercial la energía cinética. La Lagrangiana resulta

$$L = \frac{1}{2}2m(\dot{y}_b + \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}m(\dot{y}_b + \dot{x}_2)^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}\frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2 \,. \tag{1}$$

Derivando según las reglas conocidas se obtienen las ecuaciones de Lagrange

$$\begin{aligned} 2m\ddot{x}_1 + \frac{3k}{2}x_1 - \frac{k}{2}x_2 &= -2m\ddot{y}_b \,, \\ m\ddot{x}_2 - \frac{k}{2}x_1 + \frac{k}{2}x_2 - m\ddot{y}_b \,. \end{aligned} \tag{2}$$

En este caso se trata de un sistema lineal por lo que las ecuaciones obtenidas son directamente lineales. En el lado derecho aparecen las fuerzas de inercia debidas al movimiento de la base. Las ecuación matricial y las matrices involucradas son

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{f}(t)\} \tag{3}$$

$$\{\mathbf{q}\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}; \quad [\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}; \quad [\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} 3k/2 & -k/2 \\ -k/2 & k/2 \end{pmatrix}; \quad \{\mathbf{f}(t)\} = -\begin{Bmatrix} 2m \\ m \end{Bmatrix}\ddot{y}_b \,. \tag{4}$$

§2. El polinomio característico es

$$\det([\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}]) = 2m^2\lambda^2 - \frac{5}{2}mk\lambda + \frac{1}{2}k^2 = 0\,, \tag{5}$$

cuyas soluciones son $\lambda_1 = k/(4m) = \omega_1^2, \lambda_2 = k/m = \omega_2^2$. Para cada uno de estos autovalores se obtiene el autovector (modo normal de vibración) asociado, resultando las siguientes frecuencias de vibración y modos:

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\omega_B,\ \{\mathbf{a}_1\} = \begin{Bmatrix}1\\2\end{Bmatrix};\quad \omega_2 = \omega_B,\ \{\mathbf{a}_2\} = \begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}. \tag{6}$$

Las masas modales y fuerzas modales se calculan para cada modo i mediante

$$M_i = \{\mathbf{a}_i\}^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_i\}\,, \qquad \eta_i = \{\mathbf{a}_i\}^{\mathrm{T}}\{\mathbf{f}(t)\} \tag{7}$$

resultando

$$M_1 = 6m,\ \eta_1(t) = -4m\ddot{y}_b\,,\quad M_2 = 3m,\ \eta_2(t) = -m\ddot{y}_b\,. \tag{8}$$

Con esto se pueden escribir las ecuaciones desacopladas para las coordenadas normales,

$$\ddot{u}_i + \omega_i^2 u_i = \frac{1}{M_i}\eta_i \ \Rightarrow \begin{cases} \ddot{u}_1 + \dfrac{1}{4}\omega_B^2 u_1 = -\dfrac{2}{3}\ddot{y}_b \\ \ddot{u}_2 + \omega_B^2 u_2 = -\dfrac{1}{3}\ddot{y}_b \end{cases} \tag{9}$$

§3. Las ecuaciones diferenciales con amortiguamiento son

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{f}(t)\} \tag{10}$$

Los coeficientes de amortiguamiento crítico para el amortiguamiento proporcional $[\mathbf{C}] = \alpha[\mathbf{M}]+\beta[\mathbf{K}]$ se calculan como

$$\zeta_i = \frac{1}{2\omega_i M_i}(\mathbf{a}_i)[\mathbf{C}]\{\mathbf{a}_i\} = \frac{1}{2\omega_i M_i}(\alpha M_i + \beta\omega_i^2 M_i) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\alpha}{\omega_i} + \beta\omega_i\Big) \tag{11}$$

y sustituyendo los valores de (α, β) dados,

$$\zeta_1 = \frac{5}{4}\epsilon\,,\quad \zeta_2 = \epsilon\,. \tag{12}$$

De esta forma, las ecuaciones finales en coordenadas normales son

$$\ddot{u}_i + 2\zeta_i\omega_i\dot{u}_i + \omega_i^2 u_i = \frac{1}{M_i}\eta_i \ \Rightarrow \begin{cases} \ddot{u}_1 + \dfrac{5}{4}\epsilon\omega_B\dot{u}_1 + \dfrac{1}{4}\omega_B^2 u_1 = -\dfrac{2}{3}\ddot{y}_b \\ \ddot{u}_2 + 2\epsilon\omega_B\dot{u}_2 + \omega_B^2 u_2 = -\dfrac{1}{3}\ddot{y}_b \end{cases} \tag{13}$$