Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

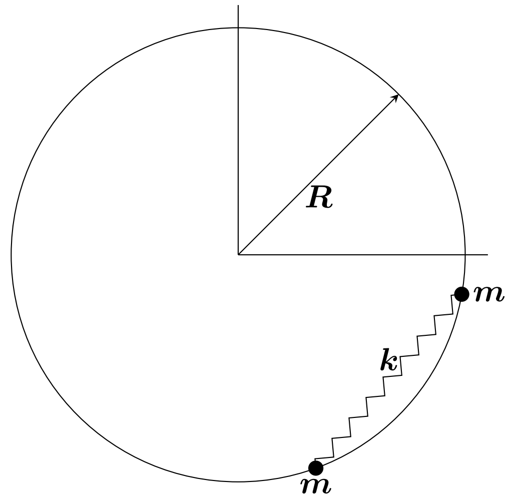
Mecánica – ICT

PRÁCTICA PUNTUABLE (3 de Marzo de 2014)

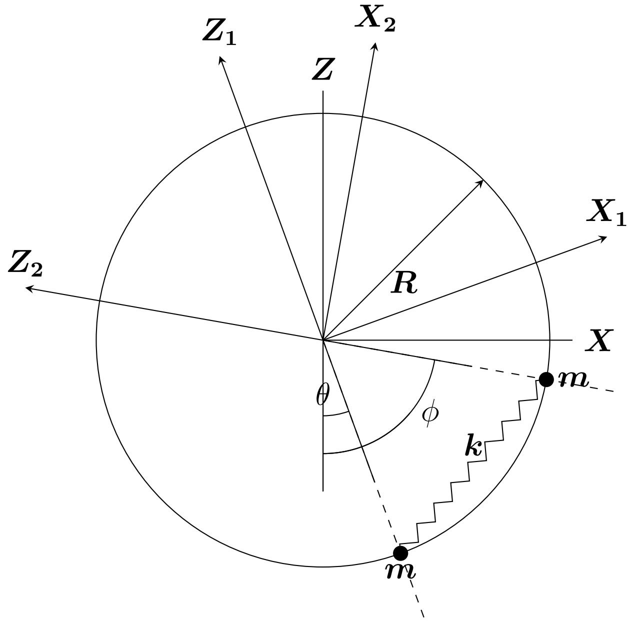
Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Dos partículas pesadas de masa m deslizan por un aro fijo situado en un plano vertical de radio R, estando unidas por un muelle de constante k y longitud natural nula.
Se pide:

1. Lagrangiana del sistema.
2. Integrales primeras. Razonar si la integral de Jacobi existe y en su caso, si coincide o no con la energía mecánica del sistema.
3. Ecuaciones diferenciales del movimiento.



1.- Si elegimos como coordenadas generalizadas del sistema los ángulos θ y ϕ que forman los radios de las partículas con la vertical descendente tenemos como vectores posición de las mismas utilizando los sistemas móviles indicados en la figura:



$$\boldsymbol{r_{P_1}} = (-R)\,\boldsymbol{K_1}$$

y

$$\boldsymbol{r_{P_2}} = (-R)\,\boldsymbol{K_2}$$

De ahí obtenemos la energía cinética del sistema como suma de la energía cinética de las dos partículas.

Para la primera partícula:

$$\boldsymbol{v_{P_1}} = \left(\dot{\vartheta}\, R\right) \boldsymbol{I_1}$$

y

$$T_1 = \frac{m\,\dot{\vartheta}^2\,R^2}{2}$$

Y para la segunda, procediendo del mismo modo:

$$\boldsymbol{v_{P_2}} = \left(\dot{\varphi}\, R\right) \boldsymbol{I_2}$$

y

$$T_2 = \frac{m\,\dot{\varphi}^2\,R^2}{2}$$

Resultando como energía cinética del sistema:

$$T = \frac{m\,\dot{\vartheta}^2\,R^2}{2} + \frac{m\,\dot{\varphi}^2\,R^2}{2}$$

Para la energía potencial tendremos, por un lado, la energía potencial proveniente del campo gravitatorio de las dos partículas y por otro lado la energía potencial del muelle.

$$V_1 = -g\,m\,\cos\vartheta\,R$$

$$V_2 = -g\,m\,\cos\varphi\,R$$

$$V_k = k\,R^2 - k\,\cos\left(\vartheta - \varphi\right)\,R^2$$

Quedando como energía potencial total la suma:

$$V = -k\,\cos\left(\vartheta - \varphi\right)\,R^2 + k\,R^2 - g\,m\,\cos\vartheta\,R - g\,m\,\cos\varphi\,R$$

y por tanto la lagrangiana obtenida como diferencia $T - V$:

$$L = k\,\cos\left(\vartheta - \varphi\right)\,R^2 + \frac{m\,\dot{\vartheta}^2\,R^2}{2} + \frac{m\,\dot{\varphi}^2\,R^2}{2} - k\,R^2 + g\,m\,\cos\vartheta\,R + g\,m\,\cos\varphi\,R$$

2.- Dado que las fuerzas que actúan en el sistema derivan de un potencial se conserva la energía mecánica del mismo $E = T + V$.

$$E = -k\,\cos\left(\vartheta - \varphi\right)\,R^2 + \frac{m\,\dot{\vartheta}^2\,R^2}{2} + \frac{m\,\dot{\varphi}^2\,R^2}{2} + k\,R^2 - g\,m\,\cos\vartheta\,R - g\,m\,\cos\varphi\,R$$

Al no depender la lagrangiana explícitamente del tiempo y no haber sistemas de coordenadas móviles la integral de Jacobi coincide con la energía total del sistema.

$$h = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L$$

resultando:

$$h = -k\,\cos\left(\vartheta - \varphi\right)\,R^2 + \frac{m\,\dot{\vartheta}^2\,R^2}{2} + \frac{m\,\dot{\varphi}^2\,R^2}{2} + k\,R^2 - g\,m\,\cos\vartheta\,R - g\,m\,\cos\varphi\,R$$

3.- Para obtener las ecuaciones de Lagrange a partir de la lagrangiana basta aplicar las expresiones correspondientes

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

resultando:

$$k\,\sin\left(\vartheta - \varphi\right)\,R^2 + m\,\ddot{\vartheta}\,R^2 + g\,m\,\sin\vartheta\,R = 0$$

y

$$-k\,\sin\left(\vartheta - \varphi\right)\,R^2 + m\,\ddot{\varphi}\,R^2 + g\,m\,\sin\varphi\,R = 0$$