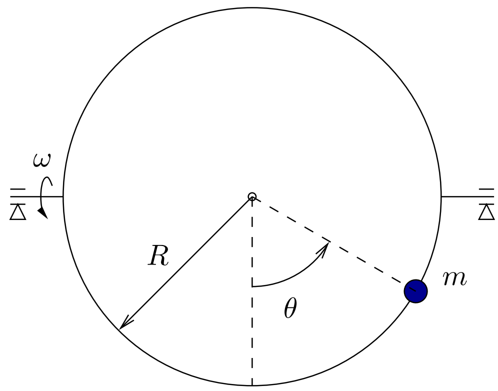
Mecánica – ICT

PROBLEMA PUNTUABLE A1 (18 de febrero del 2014)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

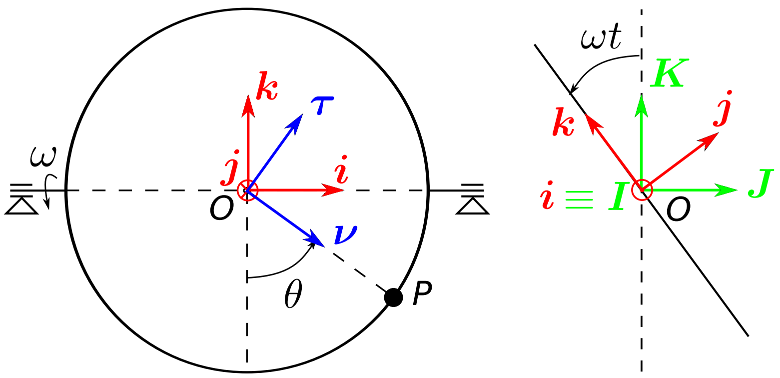
Ejercicio Tiempo: 60 min.

Se considera un aro que gira alrededor de un eje horizontal según un diámetro del mismo, con una velocidad impuesta constante ω. Una partícula de masa m insertada en el aro puede deslizar libremente sin fricción, sometida además a su propio peso. Se pide:



1. expresión de la velocidad y aceleración de la partícula en función de la coordenada θ y sus derivadas;
2. ecuación diferencial de la dinámica de la partícula, que define su movimiento sobre el aro;
3. reacción del aro sobre la partícula.

§1. Consideremos unos ejes fijos $\{O; \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}\}$ y unos ejes móviles $\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ que acompañan al movimiento del aro con velocidad y aceleración angular $\boldsymbol{\Omega}_{ijk} = \omega\boldsymbol{i}$ y $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ijk} = \boldsymbol{0}$ (ver figura). Consideremos también los ejes auxiliares $\{0; \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\tau}\}$ que nos permitirán expresar más fácilmente el movimiento relativo de la partícula.



El movimiento relativo de la partícula en los ejes móviles $\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ es:

$$\boldsymbol{v}_P^{\text{rel}} = \dot{\theta} R \boldsymbol{\tau} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{a}_P^{\text{rel}} = \ddot{\theta} R \boldsymbol{\tau} - \dot{\theta}^2 R \boldsymbol{\nu} \tag{2}$$

y su velocidad y aceleración absolutas valen (siendo $\boldsymbol{OP} = R\boldsymbol{\nu}$):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_P &= \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\Omega}_{ijk} \wedge \boldsymbol{OP} + \boldsymbol{v}_P^{\text{rel}} \\ &= \omega R \cos\theta \boldsymbol{j} + \dot{\theta} R \boldsymbol{\tau}\,, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_P &= \boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{\Omega}_{ijk} \wedge (\boldsymbol{\Omega}_{ijk} \wedge \boldsymbol{OP}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ijk} \wedge \boldsymbol{OP} + 2\boldsymbol{\Omega}_{ijk} \wedge \boldsymbol{v}_P^{\text{rel}} + \boldsymbol{a}_P^{\text{rel}} \\ &= \left[-\omega^2 R \cos^2\theta - \dot{\theta}^2 R\right] \boldsymbol{\nu} + \left[\omega^2 R \cos\theta \operatorname{sen}\theta + \ddot{\theta} R\right] \boldsymbol{\tau} - 2\omega\dot{\theta} R \operatorname{sen}\theta \boldsymbol{j}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

§2. Para obtener la ecuación del movimiento y la reacción del aro sobre la partícula expresamos el balance de la cantidad de movimiento para la partícula:

$$\underbrace{N_\nu \boldsymbol{\nu} + N_j \boldsymbol{j}}_{\text{Reacción aro sobre partícula}} \qquad -mg\boldsymbol{K} = m\boldsymbol{a}_P^{\text{abs}} \tag{5}$$

La ecuación del movimiento la obtenemos proyectando la ecuación (5) sobre la dirección $\boldsymbol{\tau}$ siendo:

$$\ddot{\theta}R + \omega^2 R \cos\theta \operatorname{sen}\theta + g\cos(wt)\operatorname{sen}\theta = 0 \tag{6}$$

Finalmente, las componentes de la reacción del aro sobre la partícula las obtenemos proyectando la ecuación (5) sobre las direcciones $\boldsymbol{\nu}$ y $\boldsymbol{j}$:

$$N_\nu = -m\left(\dot{\theta}^2 R + \omega^2 R\cos^2\theta\right) - mg\cos(\omega t)\cos\theta \tag{7}$$

$$N_j = mg\operatorname{sen}(\omega t) - 2m\omega\dot{\theta}R\operatorname{sen}\theta\,. \tag{8}$$