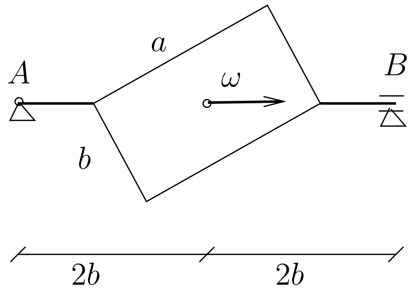
Mecánica – ICT

PRÁCTICA PUNTUABLE C5 (22 de mayo de 2013)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Tiempo: 60 min.

Un rectángulo de masa m y lados b y $a = \sqrt{3}b$ gira alrededor de una de sus diagonales con velocidad angular constante ω. El eje de giro se apoya en dos puntos A y B que distan $2b$ del centro del rectángulo, tal y como se muestra en la figura.



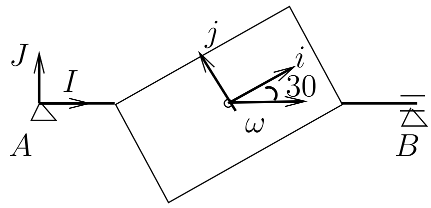
Se pide:

Calcular las reacciones en A y B. Para ello se recomienda seguir los siguientes pasos:

1. Calcular el tensor central de inercia.
2. Calcular el momento cinético en G.
3. Calcular la derivada del momento cinético.
4. Plantear las ecuaciones cardinales de la dinámica del sólido rígido.
5. Obtener las reacciones en A y B.

---

§1. El tensor central de inercia expresado en el sistema de ejes cuerpo que se indica en la figura, resulta:



$$\mathbf{I}_G = mb^2 \begin{pmatrix} 1/12 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

§2. La velocidad angular expresada en ejes fijos y ejes cuerpo:

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega \boldsymbol{I} = \omega \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} - \frac{1}{2}\boldsymbol{j} \right) \tag{2}$$

por lo que el momento cinético resulta:

$$\boldsymbol{H}_G = \mathbf{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{8} mb^2\omega \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} \right) \tag{3}$$

§3.

$$\frac{d\boldsymbol{H}_G}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{H}_G = -\frac{\sqrt{3}}{24} mb^2\omega^2 \boldsymbol{k} \tag{4}$$

§4. Las ecuaciones cardinales de la dinámica del sólido rígido:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_G; \qquad \frac{d\boldsymbol{H}_G}{dt} = \boldsymbol{M}_G \tag{5}$$

Dado que $\boldsymbol{a}_G = \boldsymbol{0}$, de la ecuación de la cantidad de movimiento expresada en los ejes $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K})$ se deducen las siguientes ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned} R_{AX} &= 0 \\ R_{AY} + R_{BY} - mg &= 0 \\ R_{AZ} + R_{BZ} &= 0 \end{aligned}$$

El momento de las reacciones con respecto a G resulta:

$$\boldsymbol{M}_G = 2b(R_{AZ} - R_{BZ})\boldsymbol{J} + 2b(R_{BY} - R_{AY})\boldsymbol{K} \tag{6}$$

Expresando la ecuación del momento cinético (4) en los ejes fijos ($\boldsymbol{k} = \cos\omega t\boldsymbol{K} - \operatorname{sen}\omega t\boldsymbol{J}$), se deducen las siguientes ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned} R_{AZ} - R_{BZ} &= \frac{\sqrt{3}}{48} mb\omega^2 \operatorname{sen}\omega t \\ R_{BY} - R_{AY} &= -\frac{\sqrt{3}}{48} mb\omega^2 \cos\omega t \end{aligned}$$

§4. Las reacciones resultan, por tanto:

$$\begin{aligned} R_{AX} = R_{BX} &= 0 \\ R_{AZ} = -R_{BZ} &= \frac{\sqrt{3}}{96} mb\omega^2 \operatorname{sen}\omega t \\ R_{AY} &= \frac{mg}{2} + \frac{\sqrt{3}}{96} mb\omega^2 \cos\omega t \\ R_{BY} &= \frac{mg}{2} - \frac{\sqrt{3}}{96} mb\omega^2 \cos\omega t \end{aligned}$$