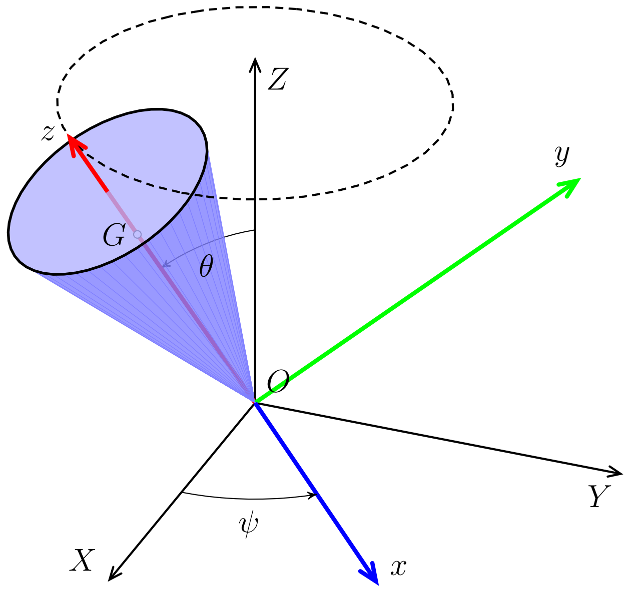
Mecánica – ICT

PROBLEMA PUNTUABLE A5 (21 de mayo del 2013)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio Tiempo: 60 min.

Se considera un cono de revolución macizo y homogéneo con masa m, radio r y altura h. Se encuentra sometido a su propio peso, mientras el vértice O se mantiene fijo.



1. Tensor de inercia en O.
   NOTA: Los momentos principales de inercia en G son $I_{zz} = \frac{3}{10}mr^2$ e $I_{xx} = \frac{3}{80}m(h^2 + 4r^2)$.
2. Ecuaciones de la dinámica de Euler empleando el triedro intermedio (representado en la figura por $Oxyz$), expresadas en función de los ángulos de Euler y sus derivadas.
3. Función Lagrangiana, coordenadas cíclicas y ecuaciones de Lagrange que correspondan a las coordenadas que no sean cíclicas.
4. Se desea obtener una trayectoria del eje del cono con nutación constante $\theta = 30°$ y velocidad de precesión $\dot{\psi} = \omega_1$. Calcular la velocidad de rotación ω_2 que es necesario imprimir al cono alrededor de su eje de revolución para obtener este movimiento.

§1. El triedro $Oxyz$ considerado es un sistema ortonormal de referencia que gira con las rotaciones ψ y θ, es decir que sigue al sólido salvo en su rotación propia φ alrededor de Oz. De esta forma el eje Ox es horizontal, y el eje Oy pertenece al mismo plano vertical que Oz y OZ. Corresponde al denominado *triedro intermedio*.

Debido a la simetría de revolución las direcciones (x, y, z) son también principales de inercia en O. Aplicando el teorema de Steiner, el momento principal según la dirección z es el mismo, mientras que según las otras dos direcciones vale $I_{O,xx} = I_{O,yy} = I_{G,xx} + md^2$ siendo $d = 3h/4$. En definitiva el tensor de inercia resulta

$$[\boldsymbol{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad \text{siendo } A = \frac{3}{20}m(4h^2 + r^2),\ C = \frac{3}{10}mr^2 . \tag{1}$$

§2. Las ecuaciones de Euler de la dinámica las obtenemos derivando relativamente al triedro intermedio, aprovechando la invariancia del tensor de inercia para un observador ligado a este triedro. La ecuación en forma vectorial es

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{I}_O \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{rel,ti}} + \boldsymbol{\Omega}_{\text{ref}} \wedge (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) , \tag{2}$$

donde $(\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}/\mathrm{d}t)_{\text{rel,ti}}$ es la derivada de $\boldsymbol{\Omega}$ relativa al sistema de referencia del triedro intermedio y $\boldsymbol{\Omega}_{\text{ref}} = \boldsymbol{\Omega} - \dot{\varphi}\,\boldsymbol{k}$ es la velocidad de rotación de dicho triedro.

El momento de las fuerzas vale

$$\boldsymbol{M}_O = d\,\boldsymbol{k} \wedge (-mg\,\boldsymbol{K}) = mgd \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{i}\,. \tag{3}$$

La derivada relativa $(\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}/\mathrm{d}t)_{\text{rel,ti}}$ es simplemente la derivada de las coordenadas de $\boldsymbol{\Omega}$ en dicho triedro intermedio:

$$\boldsymbol{\Omega} = p'\boldsymbol{i} + q'\boldsymbol{j} + r\,\boldsymbol{k} = \dot{\theta}\,\boldsymbol{i} + \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j} + \overbrace{(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)}^{r}\,\boldsymbol{k} \tag{4}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{rel,ti}} = \ddot{\theta}\,\boldsymbol{i} + (\ddot{\psi}\operatorname{sen}\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta)\boldsymbol{j} + \dot{r}\,\boldsymbol{k}\,. \tag{5}$$

La velocidad de rotación del triedro intermedio es la del sólido menos la rotación propia,

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{ref}} = \boldsymbol{\Omega} - \dot{\varphi}\,\boldsymbol{k} = \dot{\theta}\,\boldsymbol{i} + \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j} + \dot{\psi}\cos\theta\,\boldsymbol{k}\,. \tag{6}$$

Desarrollando las componentes de la expresión vectorial (2), resultan las tres ecuaciones

$$mgd\operatorname{sen}\theta = A\ddot{\theta} - (A-C)r\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta + A\dot{\varphi}\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\,, \tag{7}$$

$$0 = A(\ddot{\psi}\operatorname{sen}\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta) - (C-A)r\dot{\theta} - A\dot{\varphi}\dot{\theta}\,, \tag{8}$$

$$0 = C\dot{r}\,. \tag{9}$$

De la tercera ecuación deducimos inmediatamente

$$r = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta = \text{cte.} \tag{10}$$

y desarrollando las otras dos ecuaciones resulta

$$mgd\operatorname{sen}\theta = A\ddot{\theta} - A\dot{\psi}^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + Cr\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\,, \tag{11}$$

$$0 = A\ddot{\psi}\operatorname{sen}\theta + 2A\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta - Cr\dot{\theta}\,. \tag{12}$$

§3. La energía cinética y potencial valen

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_O\cdot\Omega = \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\operatorname{sen}^2\theta) + \frac{1}{2}Cr^2 \tag{13}$$

$$V = mgZ_G = mgd\cos\theta\,, \tag{14}$$

por lo cual la Lagrangiana resulta

$$L = \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\operatorname{sen}^2\theta) + \frac{1}{2}Cr^2 - mgd\cos\theta\,. \tag{15}$$

Se comprueba inmediatamente que las coordenadas ψ y φ son cíclicas:

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = A\dot{\psi}\operatorname{sen}^2\theta + Cr\cos\theta = \text{cte.} \tag{16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = Cr = \text{cte.} \tag{17}$$

La única coordenada no cíclica es θ, para la cual la ecuación de Lagrange resulta:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = A\ddot{\theta} - A\dot{\psi}^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + Cr\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta - mgd\operatorname{sen}\theta = 0\,. \tag{18}$$

Comprobamos que esta ecuación es idéntica a la ecuación de Euler (11) obtenida antes.

§4. La condición para el movimiento deseado se plantea mediante la ecuación dinámica en θ (11) ó (18), particularizando para las condiciones ($\theta = \theta_0 = 30°, \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0, \dot{\psi} = \omega_1$):

$$mgd\operatorname{sen}\theta_0 = -A\omega_1^2\cos\theta_0\operatorname{sen}\theta_0 + Cr\omega_1\operatorname{sen}\theta_0 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = r = \frac{mgd}{C\omega_1} + \frac{A}{C}\omega_1\frac{\sqrt{3}}{2}\,. \tag{19}$$