Mecánica – ICT

PROBLEMA PUNTUABLE A4 (29 de abril del 2013)

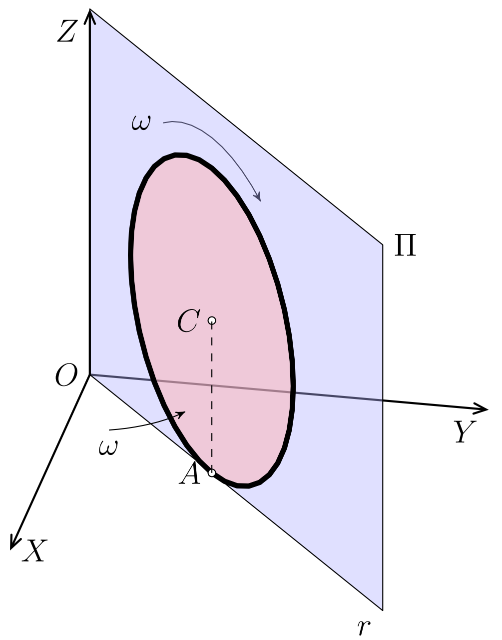
Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio Tiempo: 60 min.

Se considera un plano Π que gira alrededor del eje OZ con velocidad angular ω constante. A su vez un disco de radio R se mantiene dentro de este plano, rodando sin deslizar sobre la recta móvil r intersección de dicho plano Π con OXY, con la misma velocidad angular ω.

Considerando una posición genérica del disco, se pide:

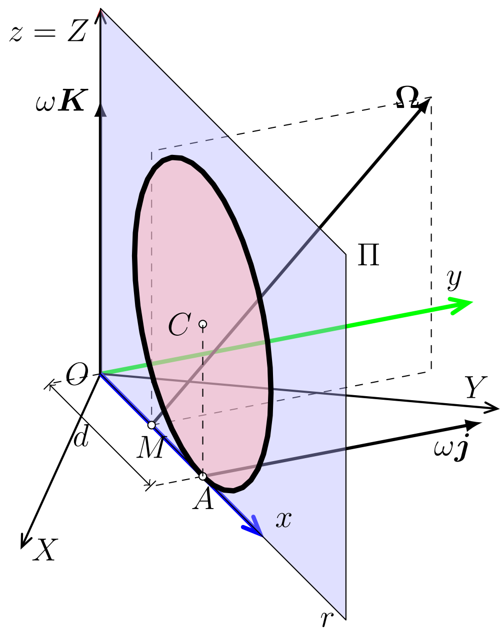
1. Velocidad angular y aceleración angular del disco.
2. Indicar si el movimiento es o no una rotación instantánea y definir el eje del movimiento helicoidal tangente o movimiento instantáneo de rotación según el caso.
3. Obtener la velocidad y aceleración del centro C del disco, así como del punto A del disco que en un instante determinado está en contacto con la recta r.



§1. Según se indica en la figura adjunta, consideraremos para definir el movimiento por una parte el triedro fijo $OXYZ$, con los vectores unitarios asociados $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K})$, y por otra parte el triedro móvil $Axyz$ ligado al plano Π, con vectores unitarios $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} = \boldsymbol{K})$.

El movimiento puede interpretarse como la composición de dos rotaciones: *1)* la de velocidad angular $\omega\boldsymbol{K}$ por O que hace girar al plano Π, y *2)* la de velocidad angular $\omega\boldsymbol{j}$ por A, de rodadura del disco sobre la recta r dentro del plano Π. La velocidad angular total será la suma de estas dos:

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega\boldsymbol{j} + \omega\boldsymbol{k}\,. \tag{1}$$



El vector $\boldsymbol{\Omega}$ definido es constante para un observador del plano Π, por lo que su derivada (aceleración angular) será el producto vectorial de la rotación del plano por el propio vector:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = (\omega\boldsymbol{k}) \wedge (\omega\boldsymbol{j} + \omega\boldsymbol{k}) = -\omega^2\boldsymbol{i}\,. \tag{2}$$

§2. El movimiento es composición de dos rotaciones que se cruzan y por tanto no será una rotación instantánea, sino un *movimiento helicoidal tangente general*. Otra forma de comprobar esto es calculando el invariante escalar o velocidad de deslizamiento (o mínima) del sistema.

Para esto proyectamos la velocidad de un punto cualquiera del disco sobre la dirección de la velocidad angular, en concreto tomando el punto A:

$$v_{\min} = \boldsymbol{v}_A \cdot \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega} = (\omega d\boldsymbol{j}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) = \frac{\omega d}{\sqrt{2}} \,. \tag{3}$$

(En esta expresión se ha considerado el disco en una posición genérica identificada por la distancia $\overline{OA} = d$.) Al ser la velocidad mínima distinta de cero concluimos que el movimiento no es una rotación instantánea.

Al tratarse de la composición de dos rotaciones que se cruzan y de igual magnitud, el eje helicoidal tangente (EHT) pasará por el punto medio M del segmento de mínima distancia $\overline{OA}$ entre ambos ejes, con dirección definida por $\boldsymbol{\Omega}$.

§3. La velocidad de C se obtiene como suma de la de arrastre más la relativa,

$$\boldsymbol{v}_C = \underbrace{\omega d\boldsymbol{j}}_{\boldsymbol{v}_{\text{arr}}} + \underbrace{\omega R\boldsymbol{i}}_{\boldsymbol{v}_{\text{rel}}} \,. \tag{4}$$

Para la aceleración hacemos una descomposición similar pero considerando también ahora el término de Coriolis:

$$\boldsymbol{a}_C = \underbrace{-\omega^2 d\boldsymbol{i}}_{\boldsymbol{a}_{\text{arr}}} + \underbrace{2(\omega\boldsymbol{k}) \wedge (\omega R\boldsymbol{i})}_{\boldsymbol{a}_{\text{cor}}} + \underbrace{\boldsymbol{0}}_{\boldsymbol{a}_{\text{rel}}} = -\omega^2 d\boldsymbol{i} + 2\omega^2 R\boldsymbol{j} \,. \tag{5}$$

Para la velocidad y aceleración de A se hace un desarrollo del mismo tipo, considerando que es el centro instantáneo de rotación del movimiento relativo ($\boldsymbol{v}_{A,\text{rel}} = \boldsymbol{0}$), resultando

$$\boldsymbol{v}_A = \omega d\boldsymbol{j} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{a}_A = -\omega^2 d\boldsymbol{i} + 2(\omega\boldsymbol{k}) \wedge \boldsymbol{0} + \omega^2 R\boldsymbol{k} = -\omega^2 d\boldsymbol{i} + \omega^2 R\boldsymbol{k} \,. \tag{7}$$