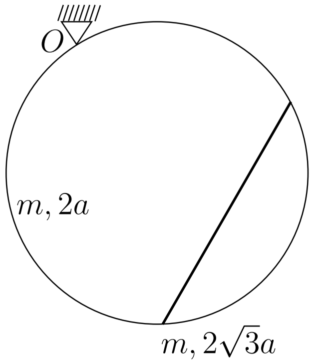
Mecánica

PRÁCTICA PUNTUABLE – Grupos A y B (16 de abril de 2013)

Apellidos *Nombre* *N.º mat.*

Un aro liso de masa m y radio $2a$ se mueve con un punto O fijo, estando contenido en todo momento en un plano vertical también fijo. Una varilla de masa m y longitud $2\sqrt{3}a$ se mueve de manera que sus dos extremos deslizan sobre el aro sin que se puedan despegar del mismo.

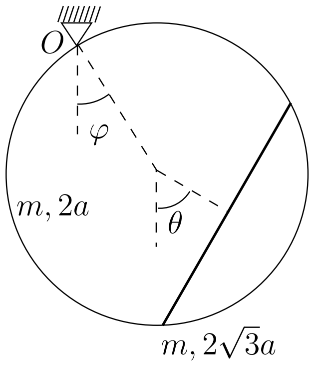


Se pide:

1. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
2. Linealización de las ecuaciones del apartado anterior para el caso de pequeñas oscilaciones en torno a la posición de equilibrio estable.
3. Frecuencias propias y modos normales de oscilación.
4. Expresar las ecuaciones horarias del movimiento en función de los modos normales de oscilación, de las frecuencias propias y de las correspondientes constantes de integración.

---

§1.— Tomamos como grados de libertad el ángulo φ que forma el radio que pasa por O con la vertical, y el ángulo θ que forma la varilla con la horizontal.



La energiá cinética es:

$$T = 6ma^2\dot{\varphi}^2 + ma^2\dot{\theta}^2 + 2ma^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos(\theta-\varphi) \qquad (1)$$

y la energía potencial:

$$V = -4mga\cos\varphi - mga\cos\theta \qquad (2)$$

Por tanto, la función Lagrangiana resulta:

$$L = T - V = 6ma^2\dot{\varphi}^2 + ma^2\dot{\theta}^2 + 2ma^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos(\theta-\varphi) + 4mga\cos\varphi + mga\cos\theta \qquad (3)$$

Las ecuaciones de Lagrange son:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 \Rightarrow 12ma^2\ddot{\varphi} + 2ma^2\ddot{\theta}\cos(\theta-\varphi) - 2ma^2\dot{\theta}^2\operatorname{sen}(\theta-\varphi) + 4mga\operatorname{sen}\varphi = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow 2ma^2\ddot{\varphi}\cos(\theta-\varphi) + 2ma^2\ddot{\theta} + 2ma^2\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}(\theta-\varphi) + mga\operatorname{sen}\theta = 0 \qquad (5)$$

§2.— La posición de equilibrio estable corresponde a $\varphi = \theta = 0$. Para linealizar (4) y (5) en torno a dicha posición tomamos $\operatorname{sen}\varphi \approx \varphi$, $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, $\cos\varphi \approx 1$, $\cos\theta \approx 1$ y despreciamos los términos de orden 2 y superior, resultando:

$$12ma^2\ddot{\varphi} + 2ma^2\ddot{\theta} + 4mga\varphi = 0 \qquad (6)$$

$$2ma^2\ddot{\varphi} + 2ma^2\ddot{\theta} + mga\theta = 0 \qquad (7)$$

§3.— Las ecuaciones (6) y (7) se pueden expresar en forma matricial:

$$[\mathbf{M}]\begin{Bmatrix}\ddot{\varphi}\\ \ddot{\theta}\end{Bmatrix}+[\mathbf{K}]\begin{Bmatrix}\varphi\\ \theta\end{Bmatrix}=\{\mathbf{0}\} \tag{8}$$

siendo $[\mathbf{M}]=\begin{pmatrix}12ma^2 & 2ma^2\\ 2ma^2 & 2ma^2\end{pmatrix}$ la matriz de masa y $[\mathbf{K}]=\begin{pmatrix}4mga & 0\\ 0 & mga\end{pmatrix}$ la matriz de rigidez. Para calcular las frecuencias propias, se resuelve la ecuación característica del problema de autovalores generalizado:

$$\left|-\omega^2[\mathbf{M}]+[\mathbf{K}]\right|=0 \quad\Rightarrow\quad 5a^2\omega^4-5ag\omega^2+g^2=0 \tag{9}$$

resultando:

$$\omega_1=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}\frac{g}{a}}\,,\qquad \omega_2=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}\frac{g}{a}}\,. \tag{10}$$

Los modos normales de oscilación son los autovectores asociados a las frecuencias propias:

$$\left(-\omega_1^2[\mathbf{M}]+[\mathbf{K}]\right)\{\mathbf{a_1}\}=0 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix}\frac{6\sqrt{5}-10}{5} & \frac{\sqrt{5}-5}{5}\\ \frac{\sqrt{5}-5}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}a_{11}\\ a_{12}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \;\Rightarrow\; \{\mathbf{a_1}\}=\begin{Bmatrix}1\\ \sqrt{5}-1\end{Bmatrix} \tag{11}$$

$$\left(-\omega_2^2[\mathbf{M}]+[\mathbf{K}]\right)\{\mathbf{a_2}\}=0 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix}\frac{6\sqrt{5}+10}{5} & \frac{\sqrt{5}+5}{5}\\ \frac{\sqrt{5}+5}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}a_{21}\\ a_{22}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \;\Rightarrow\; \{\mathbf{a_2}\}=\begin{Bmatrix}1\\ -\sqrt{5}-1\end{Bmatrix} \tag{12}$$

§4.— Las ecuaciones horarias del movimiento son:

$$\begin{Bmatrix}\varphi(t)\\ \theta(t)\end{Bmatrix}=A_1\begin{Bmatrix}1\\ \sqrt{5}-1\end{Bmatrix}\operatorname{sen}(\omega_1 t+\phi_1)+A_2\begin{Bmatrix}1\\ -\sqrt{5}-1\end{Bmatrix}\operatorname{sen}(\omega_1 t+\phi_1) \tag{13}$$

siendo A_1, A_2, ϕ_1 y ϕ_2 constantes de integración que dependen de las condiciones iniciales, y (ω_1,ω_2) las frecuencias propias obtenidas en (10).