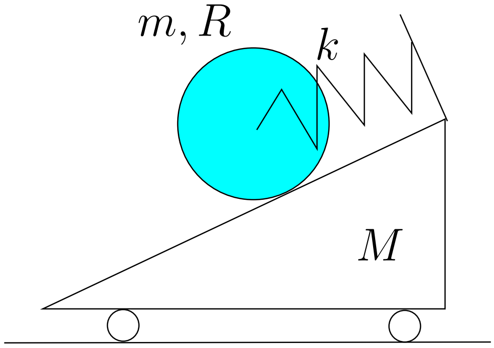
Mecánica

PRÁCTICA PUNTUABLE B1 (18 de febrero de 2013)

Apellidos *Nombre* *N.º mat.*

Una cuña que forma un ángulo α con la horizontal y cuya masa es M desliza sobre un plano liso. Sobre ella, rueda sin deslizar un disco de masa m y radio R. El centro del disco se encuentra unido a un muelle de rigidez k, tal y como se aprecia en la figura. La cuña parte del reposo al igual que el disco, siendo nula la fuerza del muelle en dicho instante inicial.



Se pide:

1. Determinar el número de grados de libertad del sistema.
2. Discutir la existencia de integrales primeras y, en caso de existir, expresarlas.
3. Calcular la aceleración del centro del disco en función de su posición.

---

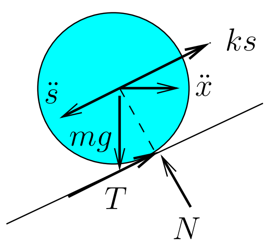
1. El sistema posee dos grados de libertad (x, s) que fijan, respectivamente, la posición de la cuña respecto a un sistema inercial y del disco respecto a la cuña.

2. No existe ninguna fuerza externa horizontal, por lo que se conserva la cantidad de movimiento horizontal del sistema. Asimismo, todas las fuerzas externas e internas derivan de potencial o no trabajan, por lo que se conserva la energía del sistema. Las dos integrales primeras se pueden expresar a partir de los grados de libertad del siguiente modo:

$$P_X = (m+M)\dot{x} - m\dot{s}\cos\alpha = 0 \tag{1}$$

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{s}^2 - 2\dot{x}\dot{s}\cos\alpha) + \frac{1}{4}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ks^2 - mgs\,\mathrm{sen}\,\alpha = 0 \tag{2}$$

3. Para calcular la aceleración del CM del disco, planteamos la ecuación de la cantidad de movimiento en dirección paralela al plano y la ecuación del momento cinético respecto a G:



$$mg\,\mathrm{sen}\,\alpha - T - ks = m(\ddot{s} - \ddot{x}\cos\alpha) \tag{3}$$

$$TR = \frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta} = \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{\ddot{s}}{R}\right) \tag{4}$$

De la ecuación (1) se deduce: $\ddot{x} = \frac{m}{m+M}\ddot{s}\cos\alpha$. Igualmente de (4): $T = \frac{1}{2}m\ddot{s}$. Sustituyendo ambos valores en (3), se obtiene el valor de la aceleración relativa del centro del disco:

$$\boxed{\ddot{s} = \frac{g\,\mathrm{sen}\,\alpha - \frac{k}{m}s}{\frac{3}{2} - \frac{m}{m+M}\cos^2\alpha}}$$

La aceleración absoluta referida a un sistema inercial cuyos ejes sean paralelos, respectivamente, a una recta horizontal y vertical, resulta finalmente:

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \left(\frac{m}{m+M} - 1\right)\ddot{s}\cos\alpha\boldsymbol{i} - \ddot{s}\,\mathrm{sen}\,\alpha\boldsymbol{j}}$$