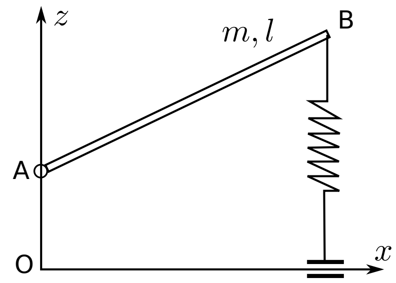
Mecánica–ICT

PRÁCTICA PUNTUABLE A1 (19 de febrero de 2013)

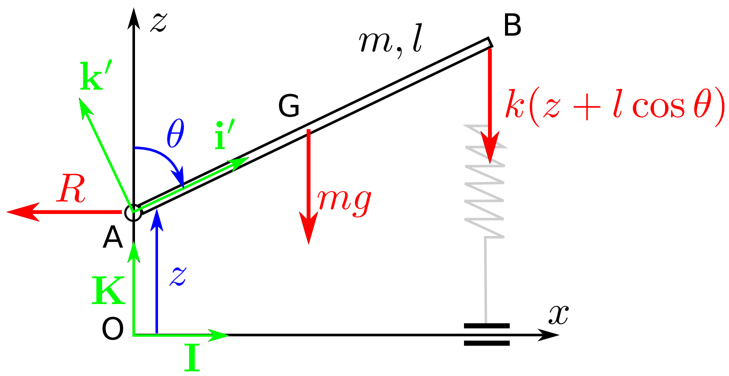
Apellidos *Nombre* *Nº mat.*

Sea una varilla de longitud l y masa m que se mueve en el plano vertical Oxz. Su extremo A desliza libremente sobre el eje Oz mientras que su extremo B está unido al eje Ox por un muelle de constante k y longitud natural nula que se mantiene siempre vertical (ver figura). Se pide:



1. Indicar el número de grados de libertad del sistema.
2. Discutir la existencia de integrales primeras y calcularlas si las hubiera.
3. Obtener las ecuaciones de Newton-Euler.

1.– El sistema posee dos grados de libertad $\{z, \theta\}$. Tomaremos el desplazamiento vertical z del punto A y el giro θ de la varilla respecto de la vertical ascendente.



2.– No se conserva ninguna de las componentes de la cantidad de movimiento ni el momento cinético. Sin embargo, al ser todas las fuerzas que trabajan conservativas y no existir movimientos impuestos sí se conserva la energía mecánica $E = T + V$:

$$\begin{aligned} E =& T + V = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 + mg\left(z + \frac{l}{2}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}k\left(z + l\cos\theta\right)^2 = cte = \\ =& \frac{1}{2}m\left[\dot{z}^2 + \dot{\theta}^2\frac{l^2}{4} - \dot{z}\dot{\theta}l\,\mathrm{sen}\,\theta\right] + \frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}^2 + mg\left(z + \frac{l}{2}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}k\left(z + l\cos\theta\right)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

siendo $I_G = \dfrac{1}{12}ml^2$, $\boldsymbol{v}_G$ la velocidad del punto G

$$\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\Omega}_{i'k'} \wedge \boldsymbol{r}_{AG} = \dot{z}\boldsymbol{K} - \dot{\theta}\frac{l}{2}\boldsymbol{k}' \quad (2)$$

y $\boldsymbol{\Omega}_{i'k'} = \dot{\theta}\boldsymbol{J}$ la velocidad angular del sistema móvil $\{A; \boldsymbol{i}', \boldsymbol{J}, \boldsymbol{k}'\}$.

3.– Las ecuaciones de Newton-Euler en la varilla nos proporcionan tres ecuaciones para las tres incógnitas existentes $\{z, \theta, R\}$. Obtenemos inicialmente la aceleración del punto G

$$\boldsymbol{a}_G = \boldsymbol{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{i'k'} \wedge \boldsymbol{r}_{AG} + \boldsymbol{\Omega}_{i'k'} \wedge (\boldsymbol{\Omega}_{i'k'} \wedge \boldsymbol{r}_{AG}) = \ddot{z}\boldsymbol{K} - \ddot{\theta}\frac{l}{2}\boldsymbol{k}' - \dot{\theta}^2\frac{l}{2}\boldsymbol{i}' \quad (3)$$

y las fuerzas actuantes en la varilla, que son $-R\boldsymbol{I}$ en A, $-mg\boldsymbol{K}$ en G y $-k(z + l\cos\theta)\boldsymbol{K}$ en B.

De la conservación de la cantidad de movimiento obtenemos dos ecuaciones (proyectadas según los ejes $\boldsymbol{I}$ y $\boldsymbol{K}$ respectivamente):

$$R = m\left(\ddot{\theta}\frac{l}{2}\cos\theta - \dot{\theta}^2\frac{l}{2}\operatorname{sen}\theta\right) \tag{4}$$

$$-mg - k(z + l\cos\theta) = m\left(\ddot{z} - \ddot{\theta}\frac{l}{2}\sin\theta - \dot{\theta}^2\frac{l}{2}\cos\theta\right) \tag{5}$$

De la conservación del momento cinético obtenemos la última ecuación:

$$R\frac{l}{2}\cos\theta - k(z + l\cos\theta)\frac{l}{2}\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{12}ml^2\ddot{\theta} \tag{6}$$

La ecuación (6), substituyendo la expresión de R obtenida en la ecuación (4), junto con la ecuación (5) son las ecuaciones de la dinámica del movimiento.