Mecánica–ICT

PRÁCTICA PUNTUABLE A4 (28 de mayo de 2012)

Apellidos *Nombre* *N.º mat.*

Un sólido rígido está formado por un cuerpo esférico de masa m y radio r y una varilla recta de masa m, longitud r y sección despreciable que se encuentra soldada perpendicularmente en la superficie de la esfera. El extremo libre O de la varilla está ligado a un punto fijo sin más restricciones al movimiento, sometido a su propio peso. Inicialmente el eje del sólido forma un ángulo $\theta_0 = 60°$ con la vertical ascendente, siendo $\dot\theta_0 = 0$, la componente de la velocidad de rotación respecto del eje $\omega_z = \omega$, y $\dot\psi_0 = \omega/71$, donde ψ es el ángulo girado por el eje alrededor de la vertical.

Se pide

1. Obtener el centro de masas y las componentes del tensor de inercia del sólido conjunto en O.
2. Ecuaciones diferenciales de la dinámica, que podrán ser integrales primeras, debiendo calcularse en este caso las constantes de las mismas mediante las condiciones iniciales.
3. Valor de ω de forma que en el movimiento del sólido la posición más baja del eje sea horizontal. Calcular para esta posición el valor de $\dot\psi$ y dibujar la trayectoria del eje del sólido en la esfera unidad.

---

§1. La distancia del centro de masas conjunto a O vale

$$d = \overline{OG} = \frac{mr/2 + m2r}{2m} = \frac{5}{4}r\,. \tag{1}$$

El tensor de inercia en O es cilíndrico, en ejes principales su expresión general sería $[\boldsymbol{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$. Los momentos principales de inercia en O, aplicando el th. de Steiner, son

$$C = \frac{2}{5}mr^2\,; \quad A = \frac{1}{3}mr^2 + \frac{2}{5}mr^2 + m(2r)^2 = \frac{71}{15}mr^2\,. \tag{2}$$

§2. El problema tiene tres grados de libertad (los ángulos de Euler (ψ, θ, φ)) y tres integrales primeras que consideraremos como las ecuaciones de la dinámica. Estas son la conservación del momento cinético en la dirección del eje de revolución, ídem en la dirección del eje vertical fijo por O, y la energía cinética. Las expresiones respectivas son:

$$C\omega_z = C\omega \quad \Rightarrow \quad \omega_z = (\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta) = \omega\,; \tag{3}$$

$$H = A\dot\psi\,\mathrm{sen}^2\theta + C\omega_z\cos\theta\,; \tag{4}$$

$$E' = E - \frac{1}{2}C\omega_z^2 = \frac{A}{2}(\dot\theta^2 + \dot\psi^2\,\mathrm{sen}^2\theta) + 2mgd\cos\theta\,. \tag{5}$$

De (4) despejamos

$$\dot\psi = \frac{H - C\omega\cos\theta}{A\,\mathrm{sen}^2\theta} \tag{6}$$

y sustituyendo en (5)

$$E' = \frac{A}{2}\left[\dot{\theta}^2 + \left(\frac{H - C\omega\cos\theta}{A\operatorname{sen}\theta}\right)^2\right] + 2mgd\cos\theta\,. \tag{7}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales del enunciado ($\theta = 60°, \dot{\theta} = 0, \dot{\psi} = \omega/71$) en (4) obtenemos la constante

$$H = \frac{1}{4}mr^2\omega\,. \tag{8}$$

Sustituyendo ahora las condiciones iniciales y esta constante en (7) obtenemos la constante de la energía,

$$E'|_{\theta=60°} = \frac{1}{40\cdot 71}mr^2\omega^2 + \frac{5}{4}mgr\,. \tag{9}$$

§3. Ahora particularizamos de nuevo (7) para la condición pedida del punto más bajo ($\theta = 90°, \dot{\theta} = 0$):

$$E'|_{\theta=90°} = \frac{15}{32\cdot 71}mr^2\omega^2\,. \tag{10}$$

Igualando las expresiones (9) y (10) se obtiene el valor de ω buscado:

$$\omega = 10\sqrt{\frac{2g}{r}}\,. \tag{11}$$

Sustituyendo el valor de H de (8) en (6) para $\theta = 90°$ se obtiene la velocidad de precesión en el punto más bajo de la trayectoria:

$$\dot{\psi}\Big|_{\theta=90°} = \frac{15}{4\cdot 71}\omega = \frac{15}{284}\omega\,. \tag{12}$$

Este valor indica que el movimiento giroscópico de la peonza se produce con velocidad de precesión de signo uniforme, del tipo que se muestra en la figura.