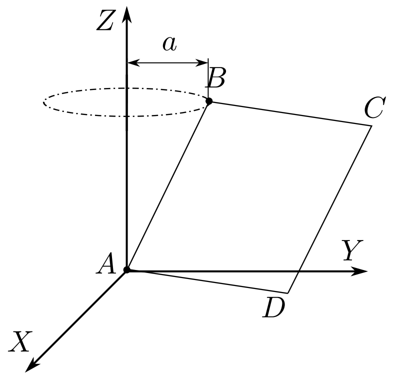
Mecánica–ICT

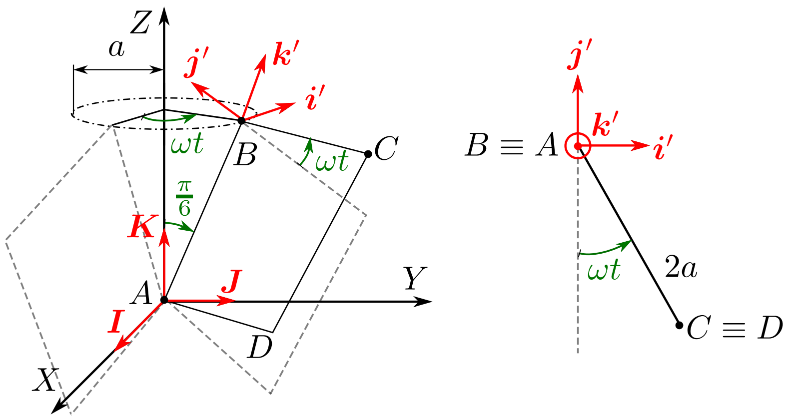
PRÁCTICA PUNTUABLE A3 (7 de mayo de 2012)

Apellidos *Nombre* *Nº mat.*

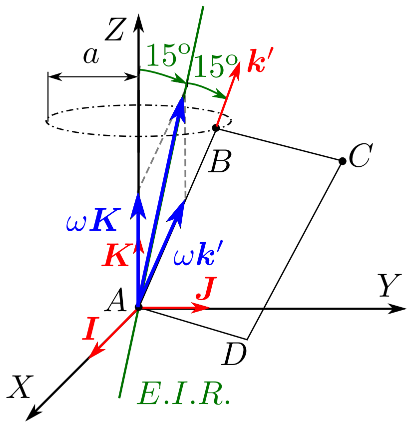
Sea un cuadrado $ABCD$ de lado $2a$ que se mueve de forma que el vértice A es fijo y el vértice B tiene una velocidad constante ωa describiendo la circunferencia horizontal, fija y de radio a que muestra la figura. A su vez el cuadrado $ABCD$ gira alrededor del lado AB con velocidad angular ω constante. En el instante inicial el cuadrado se encuentra en el plano AXZ. Se pide:



1. Velocidad angular del cuadrado.
2. Razonar si el movimiento del cuadrado es un movimiento helicoidal tangente general, o una rotación instantánea. Calcular el eje instantáneo correspondiente y la velocidad de los puntos de dicho eje (velocidad mínima).
3. Calcular la aceleración angular del cuadrado.
4. Calcular la velocidad y aceleración del vértice C.



(a) Descripción de los ejes fijos y los ejes móviles



(b) Composición de rotaciones

1.– Consideremos los ejes fijos $\{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}\}$ y unos ejes móviles $\{\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'\}$ que acompañan el movimiento de la recta AB siendo:

$\boldsymbol{i}' \rightarrow$ Horizontal, tangente a la circunferencia en B.

$\boldsymbol{k}' \rightarrow$ Dirección AB.

$\boldsymbol{j}' \rightarrow \boldsymbol{j}' = \boldsymbol{k}' \wedge \boldsymbol{i}'$.

El punto B describe una traslación circular con velocidad angular $\omega\boldsymbol{K}$ constante, con lo que el movimiento de la placa rectangular puede interpretarse como la composión de una rotación instantánea de velocidad angular $\omega\boldsymbol{K}$ alrededor del eje $(A, \boldsymbol{K})$ y una rotación instantánea de velocidad angular $\omega\boldsymbol{k}'$ alrededor del lado AB.

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega\boldsymbol{K} + \omega\boldsymbol{k}' = \frac{1}{2}\omega\boldsymbol{j}' + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)\omega\boldsymbol{k}' \tag{1}$$

2.– El movimiento es la composición de dos rotaciones instantáneas que se cortan en A y de igual magnitud, luego el movimiento total es una rotación instantánea $\boldsymbol{\Omega}$ según la bisectriz de ambas por A. El eje instantáneo de rotación forma un ángulo de $30°/2 = 15°$ con la vertical $\boldsymbol{K}$ en todo momento. Al ser una rotación instantánea, la velocidad de los puntos del eje instantáneo de rotación es nula $\boldsymbol{v}_{\min} = \boldsymbol{0}$.

3.– La velocidad angular es un vector constante en unos ejes $\{\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'\}$ que giran con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}_{x'y'z'} = \omega\boldsymbol{K}$, luego la aceleración angular vale

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\Omega}_{x'y'z'} \wedge \boldsymbol{\Omega} = \frac{\omega^2}{2}\boldsymbol{i}' \tag{2}$$

4.– La velocidad del vértice C vale:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_C &= \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{BC} \\ &= \left(\left(\sqrt{3}+2\right)\cos(\omega t) + 1\right) a\omega\boldsymbol{i}' + \left(\sqrt{3}+2\right)\operatorname{sen}(\omega t)\, a\omega\boldsymbol{j}' - \operatorname{sen}(\omega t)\, a\omega\boldsymbol{k}'\end{aligned} \tag{3}$$

siendo $\boldsymbol{v}_B = a\omega\boldsymbol{i}'$ y $\boldsymbol{r}_{BC} = 2a\operatorname{sen}\omega t\boldsymbol{i}' - 2a\cos\omega t\boldsymbol{j}'$.

La aceleración del vértice C vale:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_C &= \boldsymbol{a}_B + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{r}_{BC} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{BC}) \\ &= -2\left(\sqrt{3}+2\right)\operatorname{sen}(\omega t)\, a\omega^2\boldsymbol{i}' \\ &\quad + \left(\frac{4\sqrt{3}+7}{2}\cos(\omega t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a\omega^2\boldsymbol{j}' - \left(\frac{\sqrt{3}+4}{2}\cos(\omega t) + \frac{1}{2}\right) a\omega^2\boldsymbol{k}'\end{aligned} \tag{4}$$

siendo $\boldsymbol{a}_B = a\omega^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j}' - \frac{1}{2}\boldsymbol{k}'\right)$.