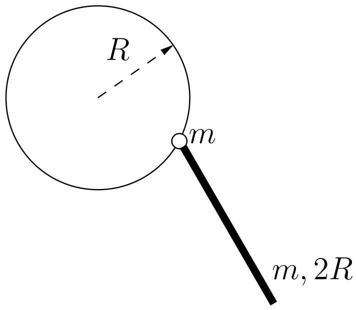
Mecánica-ICT

PRÁCTICA PUNTUABLE B2 (26 de marzo de 2012)

Apellidos *Nombre* *N.º mat.*

Un aro liso y fijo de radio R está contenido en un plano vertical. Sobre este aro está obligada a moverse una masa puntual m, que lleva articulada por uno de sus extremos una varilla de masa m y longitud $2R$. La varilla está obligada a moverse en el plano del aro.



Se pide:

1. Ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema.
2. Verificar que la posición en que la masa puntual se encuentra en el punto más bajo del aro, con la varilla colgando verticalmente por debajo de la masa m, es una posición de equilibrio estable.
3. Linealizar las ecuaciones diferenciales del movimiento para las pequeñas oscilaciones del sistema en torno a la posición de equilibrio descrita en el apartado anterior.
4. Calculas las frecuencias propias y los modos normales de vibración.
5. Para el caso de pequeñas oscilaciones, expresar las ecuaciones horarias del movimiento en función de los modos de vibración, de las frecuencias propias y de las correspondientes constantes de integración.

---

1. El sistema tiene dos grados de libertad. Sea θ el ángulo que forma con la vertical el radio del aro que pasa por la masa puntual m, y φ el ángulo que forma la varilla con la vertical.

La energía cinética del sistema es:

$$T = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m4R^2\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{\theta}^2R^2 + \dot{\varphi}^2R^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}R^2\cos(\varphi-\theta)) \tag{1}$$

y la energía potencial:

$$V = -mgR\cos\theta - mgR(\cos\theta + \cos\varphi) \tag{2}$$

La función Lagrangiana resulta:

$$L = T - V = mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{2}{3}mR^2\dot{\varphi}^2 + mR^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\theta) + 2mgR\cos\theta + mgR\cos\varphi \tag{3}$$

Derivando en (3) se obtienen las ecuaciones diferenciales del movimiento:

$$2mR^2\ddot{\theta} + mR^2\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\theta) - mR^2\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}(\varphi-\theta) + 2mgR\operatorname{sen}\theta = 0 \tag{4}$$

$$mR^2\ddot{\theta}\cos(\varphi-\theta) + \frac{4}{3}mR^2\ddot{\varphi} + mR^2\dot{\theta}^2\operatorname{sen}(\varphi-\theta) + mgR\operatorname{sen}\varphi = 0 \tag{5}$$

2. En la posición pedida $\theta = 0$, $\varphi = 0$, debe comprobarse que la función potencial tiene un mínimo relativo. En efecto, las derivadas primeras se anulan:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 2mgR \operatorname{sen}\theta = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = mgR \operatorname{sen}\varphi = 0 \tag{6}$$

y la matriz de derivadas segundas ha de ser definida positiva:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \varphi} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial \theta} & \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2mgR\cos\theta & 0 \\ 0 & mgR\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2mgR & 0 \\ 0 & mgR \end{pmatrix} > 0 \tag{7}$$

quedando comprobado que dicha posición es de equilibrio estable.

3. Como en la posición de equilibrio estable $\theta = 0$ y $\varphi = 0$, para linealizar las ecuaciones (4) y (5) sustituimos el seno por el arco ($\operatorname{sen} x \approx x$), el coseno por 1, y despreciamos los términos de orden 2 o superiores en las coordenadas y velocidades generalizadas, resultando:

$$2mR^2\ddot{\theta} + mR^2\ddot{\varphi} + 2mgR\theta = 0 \tag{8}$$

$$mR^2\ddot{\theta} + \frac{4}{3}mR^2\ddot{\varphi} + mgR\varphi = 0 \tag{9}$$

4. De (8) y (9) se obtienen las matrices de masa y de rigidez:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2mR^2 & mR^2 \\ mR^2 & \frac{4}{3}mR^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2mgR & 0 \\ 0 & mgR \end{pmatrix} \tag{10}$$

Las frecuencias propias se calculan resolviendo la ecuación característica $\det(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0$:

$$5R^2\omega^4 - 14gR\omega^2 + 6g^2 = 0 \Rightarrow \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{7-\sqrt{19}}{5}\frac{g}{R}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{7+\sqrt{19}}{5}\frac{g}{R}} \tag{11}$$

Los modos de oscilación se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones $(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\{\mathbf{a}\} = \mathbf{0}$ para cada una de las frecuencias propias, obteniéndose respectivamente:

$$\mathbf{a}_1^T = ||1, \frac{1+\sqrt{19}}{3}||, \quad \mathbf{a}_2^T = ||1, \frac{1-\sqrt{19}}{3}|| \tag{12}$$

5. La respuesta dinámica del sistema para las pequeñas oscilaciones en torno a la posición de equilibrio estable es una combinación de los modos de vibración, oscilando cada uno de ellos con la frecuencia propia correspondiente:

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ \varphi \end{Bmatrix} = B_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{19}}{3} \end{Bmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta_1) + B_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{19}}{3} \end{Bmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta_2) \tag{13}$$

siendo B_1, B_2, δ_1 y δ_2 constantes de integración que dependen de las condiciones iniciales.