Mecánica

EXAMEN FINAL (16 de junio de 2014)

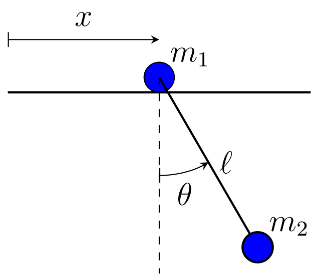
Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 1.b (puntuación: 5/30) Tiempo: 30 min.

Responder *dentro del espacio provisto en la hoja.*

Un sistema dinámico está definido por coordenadas libres $\{q_j, j = 1, \dots n\}$. *Expresar* las integrales primeras que se pueden obtener en el marco de la dinámica analítica de Lagrange (no hace falta demostrar).

Aplicación: El sistema de la figura está formado por dos masas puntuales pesadas, unidas por una varilla sin masa, de forma que la partícula de masa m_1 permanece sobre una recta horizontal lisa y la partícula m_2 se mueve dentro del mismo plano vertical. Obtener las integrales primeras del movimiento.



Consideramos la función Lagrangiana del sistema definida como diferencia entre las energías cinética y potencial $L = T - V$, y expresada como función de coordenadas, velocidades y tiempo $L(q_j, \dot{q}_j, t)$. En un caso general podrán existir también fuerzas generalizadas que no provengan de un potencial o no conservativas, Q_j^{nc}. Pueden existir dos tipos de integrales primeras:

1. *Coordenadas cíclicas:* si la Lagrangiana no depende explícitamente de alguna coordenada generalizada, el momento generalizado correspondiente se conserva.
$$\text{si } \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \text{ y } Q_j^{\text{nc}} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{cte.}$$
Esta integral primera tiene la interpretación de la conservación de la cantidad de movimiento para una coordenada lineal y de la conservación del momento cinético para una coordenada angular.
2. *Integral de Jacobi:* si la Lagrangiana no depende explícitamente del tiempo y no existen fuerzas no conservativas, la integral de Jacobi se conserva.
$$\text{si } \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \text{ y } Q_j^{\text{nc}} = 0 \ \forall j \quad \Rightarrow \quad h = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L = \text{cte.}$$
La magnitud h coincide con la energía $E = T + V$ si no existen coordenadas móviles $\partial \boldsymbol{r}_i/\partial t = \boldsymbol{0}$, o de forma equivalente si T es una expresión cuadrática homogénea de las velocidades generalizadas $\dot{q}_j$, por lo que en este caso si existe la integral primera se podría interpretar alternativamente como la conservación de la energía.

Aplicación: La Lagrangiana vale
$$L = \frac{m_1}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) + m_2 g\ell\cos\theta\,;$$
no depende de x luego esta es cíclica:
$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m_1\dot{x} + m_2(\dot{x} + \ell\dot{\theta}\cos\theta) = \text{cte.}$$
La Lagrangiana no depende tampoco explícitamente de t, luego se conserva la integral de Jacobi, que además coincide con la energía mecánica, al estar definidas tanto x como θ en referencias absolutas:
$$h = T + V = \frac{m_1}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) - m_2 g\ell\cos\theta\,.$$