Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (12 de Julio de 2014)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.b (puntuación: 5/30) Tiempo: 30 min.

Las respuestas habrán de ser precisas, breves y directas, *dentro del espacio provisto en la hoja.*

Sea un sistema dinámico lineal con n grados de libertad, sin amortiguamiento, oscilando en torno a una posición de equilibrio estable. *Definir* el concepto de coordenadas normales.

Aplicación: Un sistema con dos grados de libertad $\{q_i\}$ $(i = \{1, 2\})$ sometido a vibraciones libres tiene los modos normales de oscilación $\{\mathbf{a}_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ y $\{\mathbf{a}_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$, asociados a las frecuencias propias $\omega_1 = 2$ rad/s y $\omega_2 = 5$ rad/s respectivamente. *a*) *Expresar* las coordenadas normales en función de las $\{q_i\}$; *b*) *Expresar* las ecuaciones horarias del movimiento, para unas condiciones iniciales genéricas, tanto para las coordenadas $\{q_i(t)\}$ como para las coordenadas normales; *c*) *Expresar* las ecuaciones diferenciales del movimiento en función de las coordenadas normales.

Denominando $\{\mathbf{a}_k\}$ los modos normales de vibración y ω_k las frecuencias propias asociadas $(k = 1, \dots n)$, la solución general a las vibraciones libres del sistema es, para el vector de coordenadas generalizadas $\{\mathbf{q}\} = \{q_i\}$,

$$\{\mathbf{q}(t)\} = \sum_{k=1}^{n} B_k \cos(\omega_k t - \delta_k)\{\mathbf{a}_k\} = \sum_{k=1}^{n} u_k(t)\{\mathbf{a}_k\}\,, \tag{1}$$

expresión que permite identificar las *coordenadas normales* $u_k(t) = B_k \cos(\omega_k t - \delta_k)$ como las amplitudes en función del tiempo de la respuesta para cada modo de vibración. Igualmente la expresión (1) permite definir estas coordenadas mediante su relación con las coordenadas generalizadas iniciales,

$$q_i(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t) a_{ki} \quad \Leftrightarrow \quad \{\mathbf{q}\} = [\mathbf{A}]^{\mathrm{T}}\{\mathbf{u}\}; \quad \{\mathbf{u}\} = [\mathbf{A}]^{-\mathrm{T}}\{\mathbf{q}\}\,, \tag{2}$$

siendo $[\mathbf{A}] = [a_{ki}]$ la denominada *matriz modal*, cuyas filas son los modos vibración $\{\mathbf{a}_k\}$.

Aplicación. Teniendo en cuenta los modos de vibración dados, la expresión pedida en *a)* resulta de particularizar (2):

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}. \tag{3}$$

Las ecuaciones horarias solicitadas en *b)* resultan de aplicar (1),

$$\begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = \underbrace{B_1 \cos(2t - \delta_1)}_{u_1(t)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \underbrace{B_2 \cos(5t - \delta_2)}_{u_2(t)} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}, \tag{4}$$

determinándose (B_k, δ_k) a partir de las condiciones iniciales. Por último, las ecuaciones diferenciales pedidas en *c)* resultan dos ecuaciones desacopladas, cada una de un grado de libertad,

$$\ddot{u}_k + \omega_k^2 u_k = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \ddot{u}_1 + 4u_1 = 0\,, \\ \ddot{u}_1 + 25u_2 = 0\,. \end{cases} \tag{5}$$