T8: Aplicaciones de la dinámica del sólido

MECÁNICA – Grado de Ingeniería Civil

José M.ª Goicolea

Grupo de Mecánica Computacional
Escuela de Ingenieros de Caminos,
Universidad Politécnica de Madrid

5 de mayo de 2020

POLITÉCNICA

Índice de la clase T8-1

Índice de la clase T8-2

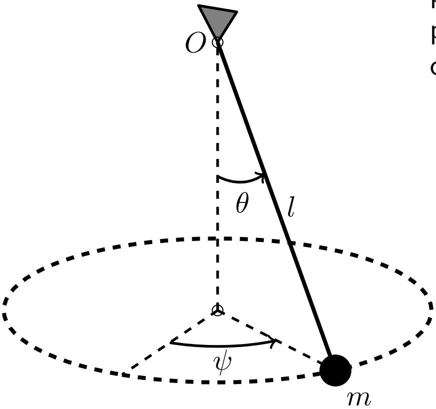
Índice

- Clase T8-1
- Clase T8-2

Parte I

Clase T8-1: Movimiento por inercia

El péndulo esférico – Resumen



Consiste en una masa puntual m unida por una varilla rígida sin masa a un punto fijo O, pudiéndose mover en cualquier dirección del espacio.

$$[\boldsymbol{I}_O] = \begin{pmatrix} ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}ml^2(p^2 + q^2) + mgl\cos\theta \\ &= \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \operatorname{sen}^2\theta) + mgl\cos\theta \end{aligned}$$

- Integrales primeras: $H = \partial L/\partial\dot{\psi}$; $E = T + V$.
- Ecuaciones y discusión de trayectoria en aptdo. 8.1 apuntes

Índice

Movimiento por inercia – Propiedades Poinsot

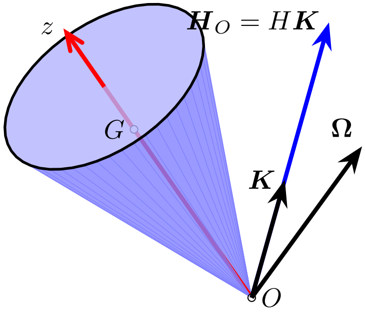
- Se considera un sólido con un punto fijo que no tiene fuerzas aplicadas o estas son tales que su momento respecto del punto fijo es nulo, $\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{0}$. El movimiento se produce gobernado solo por la inercia del sólido.
- Se deducen tres propiedades del movimiento.

1. El momento cinético es constante

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_O$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{H}_O = H\,\boldsymbol{K} = \textbf{cte.}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{cases} H = \text{cte.} \\ \boldsymbol{K} = \textbf{cte.} \end{cases}} \qquad (2)$$

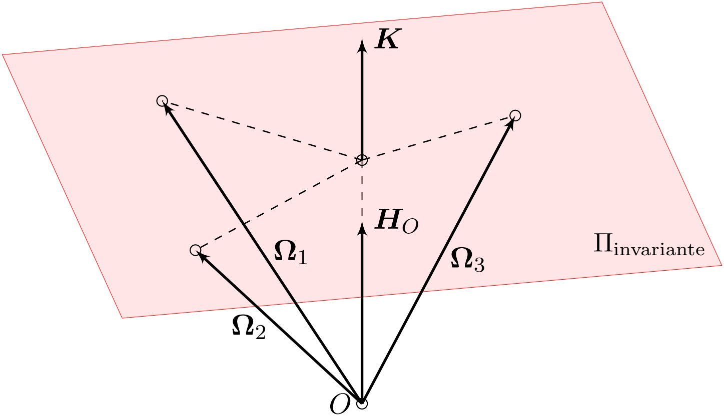


La dirección fija $\boldsymbol{K}$ se denomina dirección invariante.
Ojo: la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ no es constante.

2. La energía cinética es constante

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_O\cdot\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{H}_O = \text{cte.} \tag{3}$$

La proyección de $\boldsymbol{\Omega}$ sobre la dirección invariante, $\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{K}$, es constante



Es decir, a lo largo del movimiento el extremo del vector $\boldsymbol{\Omega}$ permanece sobre un mismo plano, denominado invariante.

Movimiento por inercia – Propiedades Poinsot

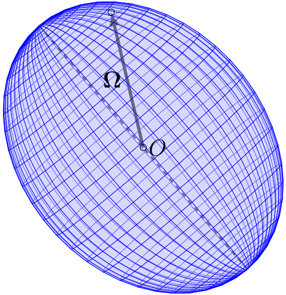
2. Como corolario de (3) se deduce la forma cuadrática siguiente

$$\frac{1}{2T}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_O\cdot\boldsymbol{\Omega} = 1 \tag{4}$$

y denominando a las componentes $(\boldsymbol{\Omega}) = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ y los momentos principales $[\boldsymbol{I}_O] = \mathrm{diag}(A, B, C)$ es equivalente a un elipsoide[1]:

$$\frac{\omega_x^2}{2T/A} + \frac{\omega_y^2}{2T/B} + \frac{\omega_z^2}{2T/C} = 1$$

$$\leftrightsquigarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{5}$$

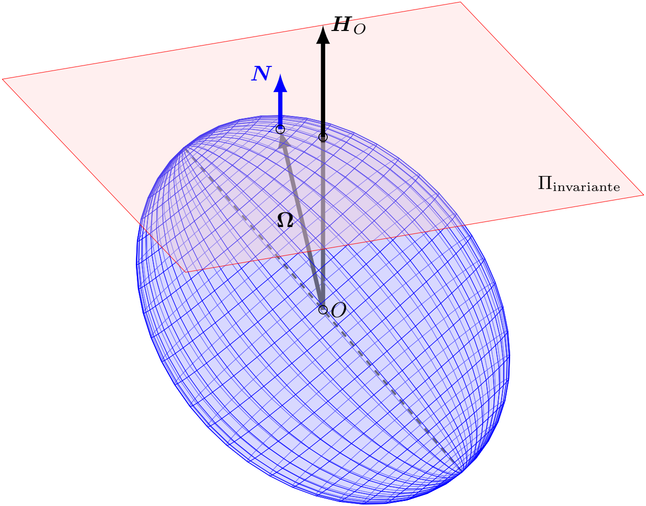


Para el sistema de referencia del cuerpo, el vector $\boldsymbol{\Omega}$ describe un elipsoide homotético al de inercia, con semiejes $a^2 = 2T/A, b^2 = 2T/B, c^2 = 2T/C$.

[1] El elipsoide de inercia es $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$, con semiejes de dimensiones $(1/\sqrt{A}, 1/\sqrt{B}, 1/\sqrt{C})$

Movimiento por inercia – Propiedades Poinsot

2. Se puede comprobar que el elipsoide anterior que contiene al extremo de $\boldsymbol{\Omega}$, es además tangente en todo instante al plano invariante, siendo su normal común $\boldsymbol{N}$. El elipsoide rueda (y pivota) sin deslizar sobre el plano.



Movimiento por inercia – Propiedades Poinsot

3. Se puede expresar, a partir de (2) y (3),

$$\begin{aligned} H^2 &= (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) \cdot (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) \\ &= \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{I}_O^2 \cdot \boldsymbol{\Omega} && (6) \\ 2T &= \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} && (7) \end{aligned}$$

combinando y restando ambas expresiones $H^2 \times (7) - 2T \times (6)$,

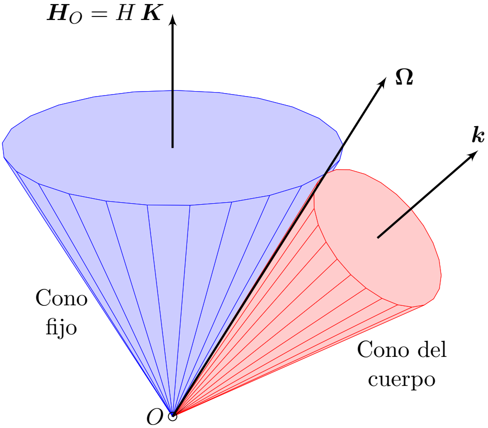
$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \left(H^2 \boldsymbol{I}_O - 2T \boldsymbol{I}_O^2 \right) \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0 \tag{8}$$

Esta expresión algebraica define en la referencia del cuerpo la geometría de un cono cuádrico[2], lo que indica que $\boldsymbol{\Omega}$ es la generatriz de un cono cuádrico o cono del cuerpo.
Si el tensor de inercia es cilíndrico, el cono del cuerpo será un cono de revolución[3].

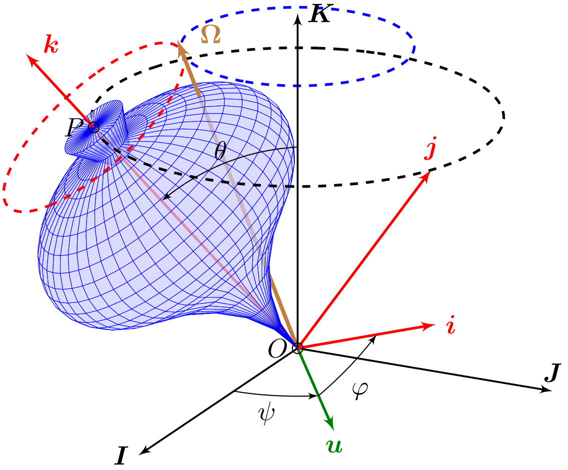
[2] la ecuación general de un cono cuádrico es $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$

[3] el cono es de revolución cuando $a = b$

3. El movimiento por inercia es análogo al de un cono móvil con el cuerpo, que rueda sin deslizar sobre un cono fijo. Ambos conos son los axoides del movimiento, y comparten en todo instante una generatriz, definida por el vector $\boldsymbol{\Omega}$.
   Estos conos son en general conos cuádricos, pero si el sólido tiene simetría cilíndrica de masas son conos de revolución.



Ejemplo: Sólido de revolución en mov. por inercia



El ángulo formado por $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{K}$ (nutación θ) se mantiene constante.

Se muestran las bases del cono del cuerpo y del cono fijo.

Índice

Movimiento por inercia – Ejes permanentes

- Estudiamos la posibilidad de que la velocidad de rotación de un sólido en movimiento por inercia mantenga una dirección constante. Es decir, para $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \boldsymbol{e}$ que la dirección $\boldsymbol{e}$ sea invarante.
- Es fácil comprobar que si la dirección $\boldsymbol{e}$ es constante también lo debe ser el módulo Ω. En efecto, por la constancia de la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \frac{\Omega^2}{2} I_e = \text{cte.} \quad \Rightarrow \quad \Omega = \text{cte.} \tag{9}$$

- Por tanto debe ser $\boldsymbol{\Omega}$ constante. De la ecuación de Euler se deduce:

$$\mathbf{0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{I}_O \cdot \cancelto{\mathbf{0}}{\dot{\boldsymbol{\Omega}}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} = \lambda \boldsymbol{\Omega} \tag{10}$$

- Por tanto, un eje permanente de rotación será necesariamente eje principal de inercia del sólido.

Movimiento por inercia – Ejes permanentes

- Debe comprobarse si la condición necesaria de eje principal garantiza también la estabilidad del eje permanente.
- Para ello, consideramos $\boldsymbol{\Omega}$ alineado con el eje principal 3 (sin pérdida de generalidad), y pequeñas perturbaciones en las otras componentes:

$$(\boldsymbol{\Omega}) = (\epsilon_p, \epsilon_q, r) \qquad \text{con } \epsilon_p, \epsilon_q \ll r \tag{11}$$

- Sustituyendo en las ecuaciones de Euler con $\boldsymbol{M}_O = \mathbf{0}$,

$$0 = A\dot{p} - (B - C)qr = A\dot{\epsilon}_p - (B - C)\epsilon_q r \tag{12}$$

$$0 = B\dot{q} - (C - A)rp = B\dot{\epsilon}_q - (C - A)r\epsilon_p \tag{13}$$

$$0 = C\dot{r} - (A - B)pq = C\dot{r} - (A - B)\cancelto{\approx 0}{\epsilon_p\epsilon_q} \tag{14}$$

- Derivando la ecuación (12) y sustituyendo $\dot{\epsilon}_q$ a partir de (13)

$$(12) \Rightarrow \quad A\ddot{\epsilon}_p - (B - C)\dot{\epsilon}_q r = 0 \tag{15}$$

$$(13) \Rightarrow \quad \dot{\epsilon}_q = \frac{1}{B}(C - A) r \epsilon_p \tag{16}$$

- Resulta

$$A\ddot{\epsilon}_p + \frac{1}{B}(C - A)(C - B) r^2 \epsilon_p = 0 \tag{17}$$

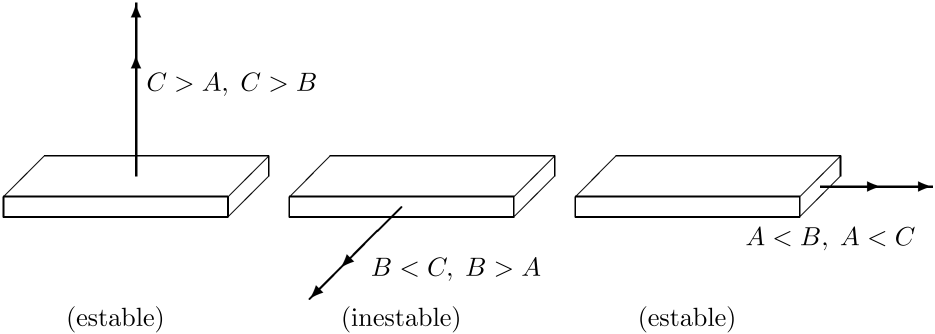
que es una ecuación dinámica lineal de 1 gdl en función de ϵ_p, similar a $m\ddot{x} + kx = 0$.

- Para que el movimiento sea oscilatorio y por tanto acotado el coeficiente de ϵ_p debe ser positivo ($k > 0$ en la ecuación patrón):

$$(C - A)(C - B) > 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} C > B, C > A & \rightarrow \; C \text{ máximo} \\ C < B, C < A & \rightarrow \; C \text{ mínimo} \end{cases} \tag{18}$$

Movimiento por inercia – Ejes permanentes

- Como ejemplo, consideramos un bloque rectangular sometido a rotación según alguno de sus tres ejes de simetría:



- Los ejes de momento de inercia máximo (C) y mínimo (A) originan rotaciones estables, mientras que para el intermedio (B) es inestable.
- Esto puede comprobarse fácilmente lanzando al aire una caja de cartón vacía con dimensiones similares a la de la figura.

Índice

Movimiento por inercia – Ecuaciones movimiento

- Para un caso general, las ecuaciones del movimiento pueden expresarse en función de $(\psi, \theta, \varphi, p, q, r)$ como

$$\cos\theta = \frac{Cr}{H}; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{Ap}{Bq}; \quad \dot{\psi} = H\frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2} \tag{19}$$

$$\begin{cases} 0 = A\dot{p} - (B - C)qr \\ 0 = B\dot{q} - (C - A)rp \\ 0 = C\dot{r} - (A - B)pq \end{cases} \tag{20}$$

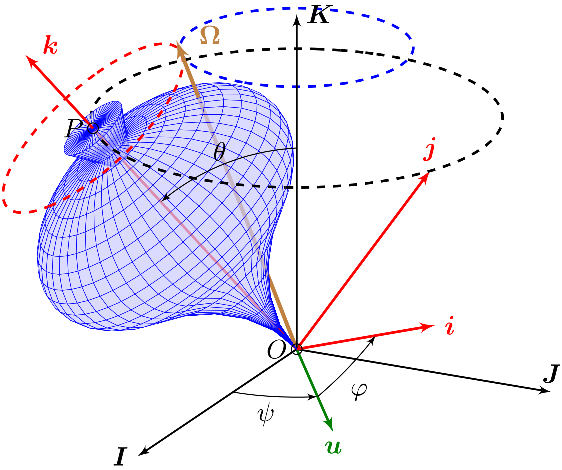
- Para un sólido de revolución (eje según $\boldsymbol{k}$), al ser $A = B$, de $(20)_3$ se deduce

$$C\dot{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \text{cte.} \tag{21}$$

mientras que de $(19)_1$ y $(19)_3$

$$\theta = \arccos\left(\frac{Cr}{H}\right) \text{ (cte.)}; \quad \dot{\psi} = \frac{H}{A} \text{ (cte.)}; \quad \dot{\varphi} = \frac{A - C}{A}r \text{ (cte.)} \tag{22}$$

Movimiento por inercia – Ecuaciones movimiento



Interpretación geométrica de los ángulos de Euler para el movimiento de Poinsot (por inercia) de un sólido con simetría de revolución:

- La nutación es $\theta =$ cte. por lo que el eje $\boldsymbol{k}$ desarrolla un cono circular alrededor de la dirección invariante $\boldsymbol{K}$
- La velocidad de rotación de $\boldsymbol{k}$ es $\dot{\psi} =$ cte.

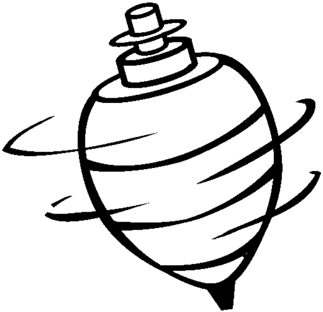
Parte II

Clase T8-2: Peonza simétrica y efecto giroscópico

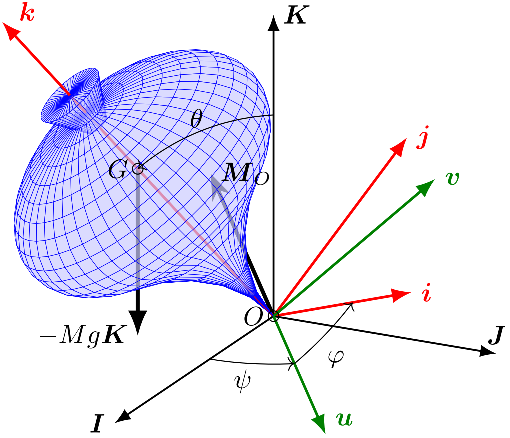
Índice

Peonza simétrica

Peonza simétrica sometida a su propio peso $(-Mg\boldsymbol{K})$, con rotación propia elevada alrededor de su eje $(r \gg 1)$.



Orientación de los ejes considerados para el movimiento de una peonza simétrica sometida a su propio peso alrededor de un punto fijo O de su eje.



Índice

- El tensor de inercia es cilíndrico,

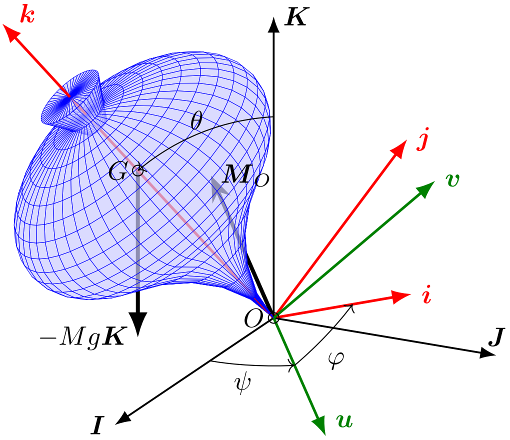
$$[\boldsymbol{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad (23)$$

- El peso $(-Mg\boldsymbol{K})$ es la única fuerza externa activa
- Teniendo en cuenta

$$\boldsymbol{K} = \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{v} + \cos\theta\,\boldsymbol{k} \quad (24)$$

llamando $d = \overline{OG}$ se deduce

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_O &= -Mgd\operatorname{sen}\theta(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{k}) \\ &= -Mgd\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u} \quad (25)\end{aligned}$$



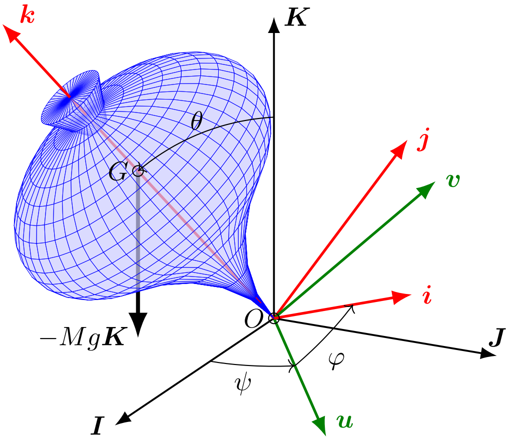
Se produce un efecto dinámico paradójico: en lugar de caer bajo el efecto del peso $-Mg\boldsymbol{K}$, la peonza precesiona debido al momento $\boldsymbol{M}_O$.

- Trabajaremos en el triedro intermedio $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{k})$, donde las componentes de $\boldsymbol{\Omega}$ valen

$$p^{(i)} = \dot{\theta}; \quad q^{(i)} = \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta;$$
$$r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \quad (26)$$

- La expresión de la Lagrangiana es:

$$L = \frac{1}{2} A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta)$$
$$+ \frac{1}{2} C r^2 - M g d \cos \theta \quad (27)$$



- De esta expresión se deducen 3 integrales primeras:

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad h = T + V = \text{cte.} \quad (28)$$

Peonza simétrica – Ecuaciones movimiento

1. Conservación de momento generalizado según ψ:

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = \boxed{A\dot\psi \operatorname{sen}^2\theta + Cr\cos\theta = H \quad \text{cte.}} \tag{29}$$

Equivale a proyectar $\boldsymbol{H}_O$ sobre la vertical $\boldsymbol{K} = \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{v} + \cos\theta\,\boldsymbol{k}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{K} &= (Ap^{(i)}\boldsymbol{u} + Aq^{(i)}\boldsymbol{v} + Cr\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{K} \\ &= Aq^{(i)}\operatorname{sen}\theta + Cr\cos\theta = A\dot\psi\operatorname{sen}^2\theta + Cr\cos\theta \end{aligned} \tag{30}$$

2. Conservación de momento generalizado según φ:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = Cr \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \text{cte.}} \tag{31}$$

Equivale a proyectar $\boldsymbol{H}_O$ sobre el eje de revolución $\boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{k} = Cr \tag{32}$$

Peonza simétrica – Ecuaciones movimiento

3. Energía constante:

$$E = \frac{1}{2}A(\dot\theta^2 + \dot\psi^2 \operatorname{sen}^2\theta) + \frac{1}{2}Cr^2 + Mgd\cos\theta \quad \text{(cte.)} \tag{33}$$

y considerando que según se vio en (31) que r es también constante,

$$E - \frac{1}{2}Cr^2 = \boxed{E' = \tfrac{1}{2}A(\dot\theta^2 + \dot\psi^2 \operatorname{sen}^2\theta) + Mgd\cos\theta \quad \text{(cte.)}} \tag{34}$$

- En la ecuación (29) se puede eliminar $\dot\psi = \dfrac{H - Cr\cos\theta}{A\operatorname{sen}^2\theta}$;
- sustituyendo en (34) y con el cambio $u = \cos\theta \to \dot\theta = -\dot u/\sqrt{1-u^2}$,

$$E' = \frac{1}{2}A\frac{\dot u^2}{1-u^2} + \frac{1}{2}\cancel{A}\frac{(H - Cru)^2\cancel{(1-u^2)}}{A^{\cancel{2}}(1-u^2)^{\cancel{2}}} + Mgdu \tag{35}$$

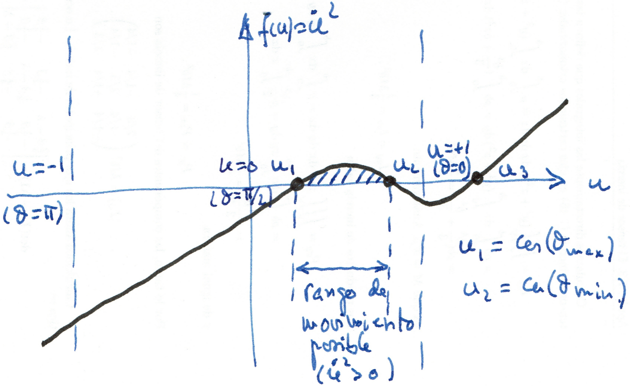
- se obtiene, despejando $\dot u^2$:

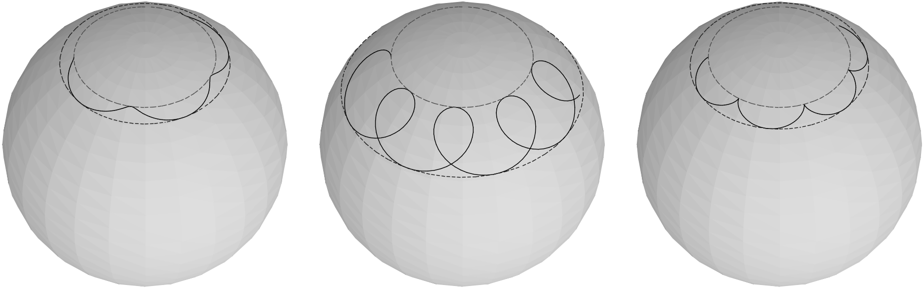
$$\boxed{\dot u^2 = f(u) = (1-u^2)\left(\frac{2E'}{A} - \frac{2Mgdu}{A}\right) - \frac{(H-Cru)^2}{A^2}} \tag{36}$$

$f(u)$ es un polinomio cúbico en u, cuyo valor debe ser además positivo.

$$\boxed{\dot{u}^2 = f(u) = (1-u^2)\left(\frac{2E'}{A} - \frac{2Mgdu}{A}\right) - \frac{(H - Cru)^2}{A^2}} \qquad (37)$$

Del análisis de sus raíces se puede definir el rango de movimiento posible del eje a partir de su nutación $(u = \cos\theta)$:





a) precesión uniforme $\dot{\psi} > 0$ b) precesión oscilante c) precesión con paradas

Los tres tipos de soluciones para el movimiento de la peonza simétrica, obtenidos mediante integración numérica en el ordenador de las ecuaciones del movimiento. La figura representa, sobre una superficie esférica, la trayectoria del extremo del eje de revolución de la peonza.

a) la velocidad de precesión $\dot{\psi}$ lleva sentido uniforme;

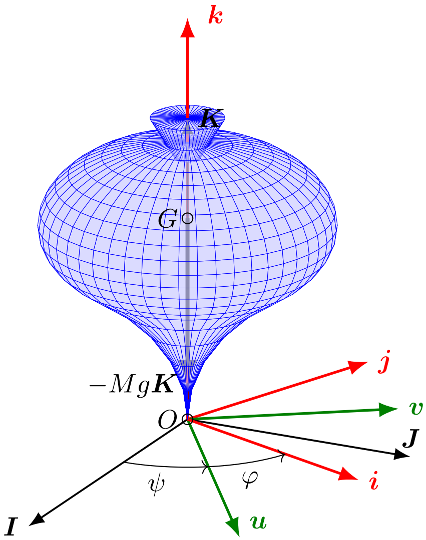
b) $\dot{\psi}$ alterna de signo, describiendo bucles;

c) para los puntos con nutación mínima se anula $\dot{\psi}$, correspondiendo a cúspides en la trayectoria.

Índice

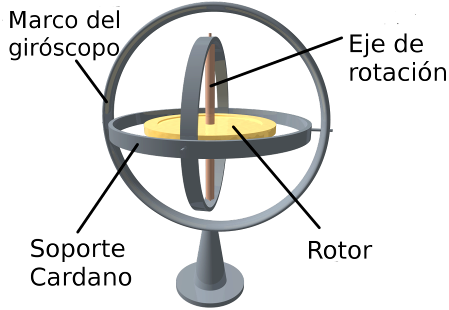
- Se denomina peonza dormida a la situación en que el eje está vertical, $\theta = 0$
- Esta posición es de equilibrio, lo que no garantiza la estabilidad de la misma.
- La estabilidad de este movimiento se estudia en el aptdo. 8.3.2 de los apuntes, concluyendo que la condición es

$$\frac{C^2 r^2}{4A} > Mgd \qquad (38)$$



Efecto giroscópico

Si el momento externo se minimiza mediante el montaje del giróscopo en soportes de Cardano, la orientación del eje se mantiene prácticamente invariable y el giróscopo resulta un instrumento eficaz para señalar una orientación fija en el espacio, lo que constituye la base de los sistemas de navegación y control de orientación inerciales. Estos resultan más precisos que las brújulas magnéticas o incluso imprescindibles cuando se está alejado del campo magnético o gravitatorio terrestre como en las naves espaciales

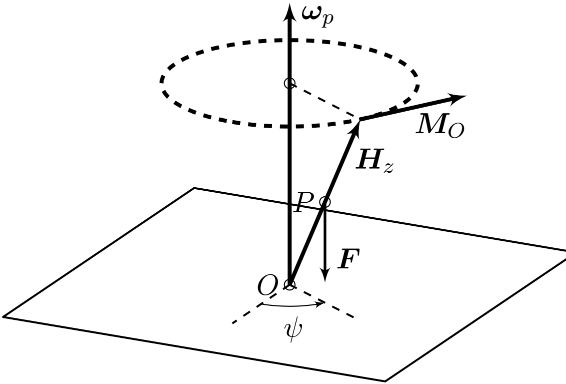


Giróscopo montado en soportes de Cardano

Efecto giroscópico

Podemos comprobar que, si se sustituye el valor obtenido para la precesión lenta ($\dot{\psi} = Mgd/Cr$) en la ecuación se obtiene la identidad de esta última

$$\boldsymbol{M}_O = \frac{d\boldsymbol{H}_z}{dt} = \boldsymbol{\omega}_p \wedge \boldsymbol{H}_z$$



En el movimiento giroscópico, el vector $\boldsymbol{H}_z$ que define el eje del giróscopo gira alrededor del eje $\boldsymbol{\omega}_p$, moviéndose en dirección normal a la fuerza aplicada (es decir, paralelamente al momento $\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{r}_{OP} \wedge \boldsymbol{F}$).