6: Cinemática del Sólido Rígido

MECÁNICA – Grado de Ingeniería Civil

José M.ª Goicolea

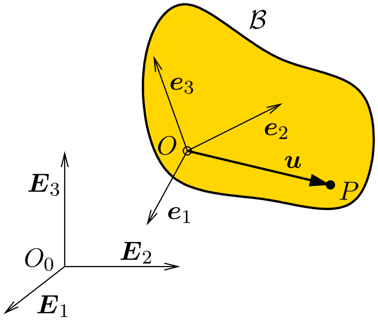
Grupo de Mecánica Computacional
Escuela de Ingenieros de Caminos,
Universidad Politécnica de Madrid

16 de marzo de 2022

Índice

Índice

Derivada de un vector material



Consideramos:

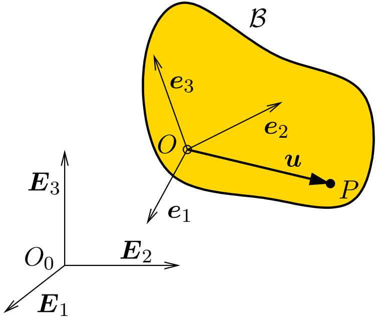
- Triedro fijo $\{O_0, \boldsymbol{E}_i\}$
- Sólido rígido $\mathcal{B}$, con el triedro móvil (del sólido) $\{O, \boldsymbol{e}_i\}$
- Un vector material $\boldsymbol{u}$ ligado al sólido rígido. Este vector puede considerarse como si estuviera *"pinchado"* en el sólido.

- En el triedro del sólido, $\boldsymbol{u} = u_i \boldsymbol{e}_i$,[1] siendo u_i constantes
- Para un movimiento general del sólido (traslación y rotación), el vector $\boldsymbol{u}$ no es constante, aunque su longitud $|\boldsymbol{u}| = u$ sí se conserva:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{u}} \neq \boldsymbol{0} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = u^2 = \text{cte} \tag{2}$$

[1]adoptamos el convenio de sumatorio implícito para índices repetidos



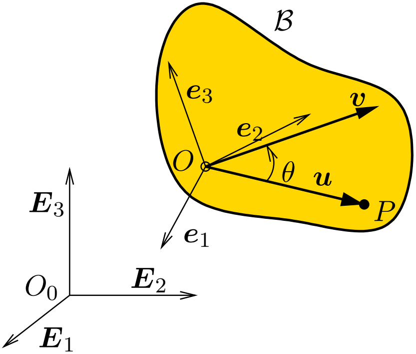
Sólido rígido $\mathcal{B}$, con el triedro móvil (del sólido) $\{O, \boldsymbol{e}_i\}$, y un vector material $\boldsymbol{u}$ ligado al sólido rígido. Este vector une dos puntos materiales del sólido, O y P.

- derivando la expresión (2) obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}) = 2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{u} = 0 \qquad (3)$$

- Este resultado indica que la derivada $\dot{\boldsymbol{u}}$ es perpendicular al vector $\boldsymbol{u}$.

Derivada de un vector material



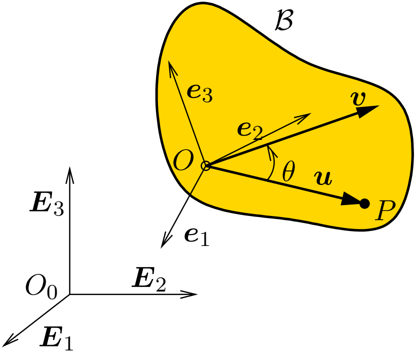
- Sólido rígido $\mathcal{B}$, con el triedro móvil (del sólido) $\{O, \boldsymbol{e}_i\}$, y dos vectores materiales $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ ligados al sólido rígido.
- Su producto escalar debe mantenerse también constante

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = uv \cos\theta = \text{cte.} \qquad (4)$$

- Se considera ahora la derivada del producto escalar de dos vectores materiales del sólido $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) = \dot{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{u} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} \qquad (5)$$

Derivada de un vector material



- En definitiva, para dos vectores materiales $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ ligados al sólido rígido, los resultados (3) y (5):

$$\dot{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u} = 0\,; \quad \dot{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{u} \cdot \dot{\boldsymbol{v}}$$

- Esto caracteriza la derivada temporal de un vector como una aplicación hemisimétrica
- En el espacio geométrico 3D, una aplicación hemisimétrica equivale al producto vectorial por un determinado vector $\boldsymbol{\Omega}$, que denominamos velocidad de rotación[2]

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{u}} \tag{6}$$

[2]Ejercicio: comprobar que esta expresión satisface las propiedades (3) y (5)

Derivada de un vector material

Producto vectorial hemisimétrico

Demostración: El producto vectorial define una aplicación hemisimétrica

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{u}$$

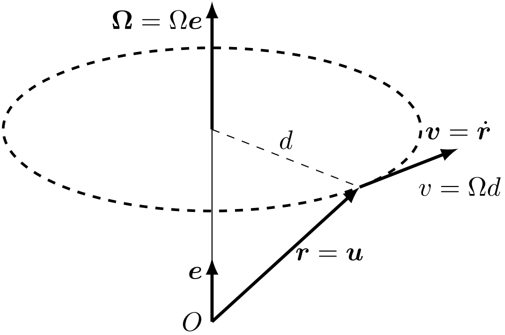
1. Ortogonal a sí mismo:

$$\dot{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u} = 0$$

2. Producto por otro vector:

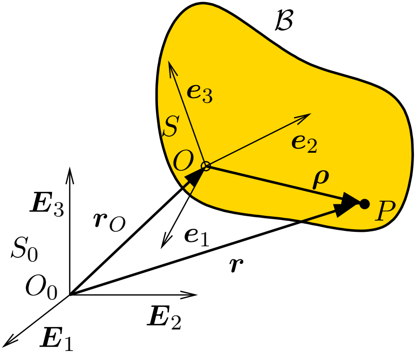
$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{v} &= (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} \\ \dot{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{u} &= (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{u} = -(\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} \end{aligned}$$

Derivada de un vector material



- Interpretación de $\boldsymbol{\Omega}$ como una velocidad de rotación: consideremos la velocidad de un punto definido por el radio vector $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{u}$ con origen en O (o lo que es lo mismo, la velocidad del extremo de $\boldsymbol{u}$ respecto a O) cuando el triedro gira con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \boldsymbol{e}$.
- Si el punto en cuestión se halla situado a distancia d del eje, su velocidad es Ωd, en dirección tangencial a la circunferencia situada en un plano perpendicular al eje de rotación y cuyo centro es la intersección del eje con el plano. Este mismo resultado se obtiene del desarrollo geométrico de la expresión $\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}$.

Índice



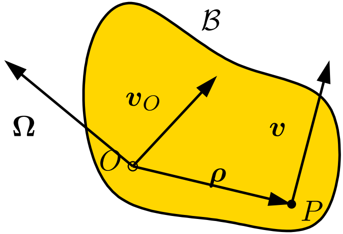
- Punto material del sólido $P \in \mathcal{B}$, con vector posición:
  - $\boldsymbol{r}$ en la referencia fija $S_0 \equiv \{O_0, \boldsymbol{E}_i\}$
  - $\boldsymbol{\rho}$ en la referencia móvil $S \equiv \{O, \boldsymbol{e}_i\}$.
- La relación entre ambos es

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{\rho} \tag{7}$$

- Derivando la relación (7), teniendo en cuenta que $\boldsymbol{r}_O$ es un vector absoluto que se deriva directamente, y que $\boldsymbol{\rho}$ es un vector material que derivamos según la regla (6):

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{r}}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} \tag{8}$$

Velocidades – Campo de velocidades



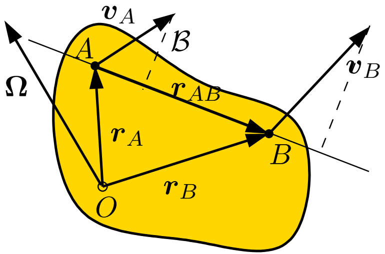
De la ecuación (8) se obtiene la expresión vectorial del campo de velocidades:

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}} \tag{9}$$

- La expresión (9) define un campo de momentos[3].
- En este campo se identifica la resultante con la velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}$ y el momento en un punto P con la velocidad $\boldsymbol{v}(P)$

[3] también asociado a los sistemas de vectores deslizantes como las fuerzas actuantes sobre un sólido

Velocidades – Propiedades e invariantes



Se consideran dos puntos cualesquiera $(A, B) \in \mathcal{B}$ las velocidades en ambos $(\boldsymbol{v}_A, \boldsymbol{v}_B)$ son:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_A &= \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_A \\ \boldsymbol{v}_B &= \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_B \end{aligned} \tag{10}$$

Veamos algunas propiedades básicas del campo de velocidades, que nos ayudarán a interpretarlo, así como establecer tipos de movimiento. Nos basamos en las ecuaciones (10), para dos puntos cualesquiera del sólido.

- Equiproyectividad:

$$\boxed{\boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{r}_{AB} = \boldsymbol{v}_B \cdot \boldsymbol{r}_{AB}} \tag{11}$$

- Invariante escalar:

$$\boxed{\boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{v}_B \cdot \boldsymbol{\Omega}} \tag{12}$$

(Ejercicio: demostrar)

Velocidades – Puntos de velocidad mínima

- La condición para que haya puntos con velocidad nula es que $\exists \boldsymbol{\rho}$ tal que

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_O = -\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} \tag{13}$$

- Es decir, $\boldsymbol{v}_O$ debe ser perpendicular a $\boldsymbol{\Omega}$, por lo que la invariante escalar será nula:

$$\boxed{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{v}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0} \tag{14}$$

- En este caso decimos que el movimiento instantáneo es una rotación

Velocidades – Puntos de velocidad mínima

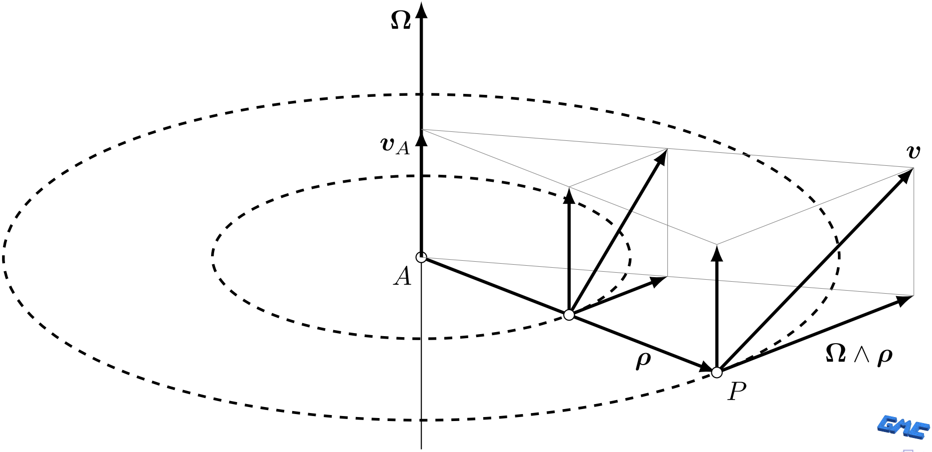
- En el caso más general sin puntos de velocidad nula, se puede demostrar que los puntos cuya velocidad es paralela a $\boldsymbol{\Omega}$ son los puntos de velocidad mínima, y forman un eje:

$$\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} \;\Rightarrow\; \boxed{\boldsymbol{\rho} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_O}{\Omega^2} + \alpha\boldsymbol{\Omega}} \tag{15}$$

- Este se denomina Eje del movimiento Helicoidal Tangente (EHT) y es una recta paralela a $\boldsymbol{\Omega}$.

Velocidades – Movimiento Helicoidal Tangente

La descripción del campo de velocidades como un movimiento helicoidal tangente interpreta la velocidad de un punto P cualquiera como suma de
1) la velocidad de deslizamiento de los puntos del eje ($\boldsymbol{v}_A = \lambda\boldsymbol{\Omega}$)
2) y la velocidad de rotación alrededor del mismo, $\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}$



Índice

Aceleraciones

- Derivando la expresión del campo de velocidades (9)

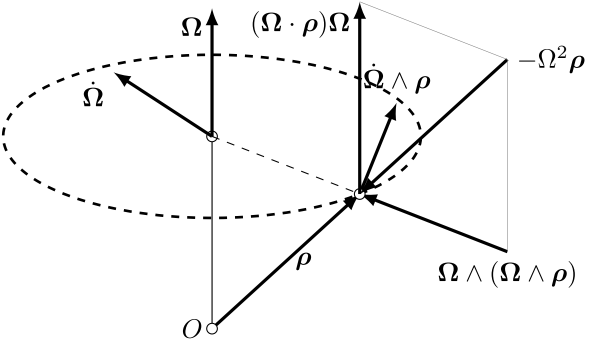
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}$$

y aplicando la regla de derivación de vectores (6)

- se obtiene la expresión del campo de aceleraciones

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho})\,.} \tag{16}$$

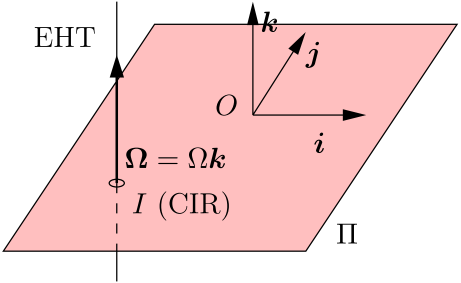
cuyos términos se pueden interpretar según la figura siguiente.



Campo de aceleraciones del sólido rígido: Interpretación geométrica de los distintos términos (Recordamos que por la *fórmula de expulsión* para el doble producto vectorial resulta $\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}) = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\Omega} - \Omega^2 \boldsymbol{\rho}$.)

Índice

Movimiento plano – Rotación instantánea



- Las velocidades de todos los puntos $\boldsymbol{v}_O, \boldsymbol{v}$ son paralelas al plano Π. Considerando que

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_O = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} \qquad (17)$$

  se deduce que $\boldsymbol{\Omega}$ ha de ser perpendicular al plano

- Por ello consideramos la orientación del triedro en el movimiento plano indicada, de forma que el versor $\boldsymbol{k}$ sea perpendicular al plano, y por tanto

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega\, \boldsymbol{k} \qquad (18)$$

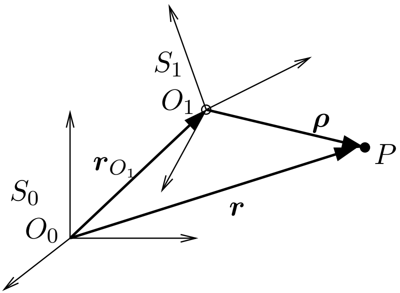
- Una consecuencia inmediata es que $\boldsymbol{\Omega}$ es normal a la velocidad de cualquier punto,

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \qquad (19)$$

- Es decir, todo movimiento plano es una rotación instantánea, en el cual existirá un centro instantáneo de rotación (CIR)

Índice

Composición de 2 o más movimientos



- Composición de movimientos entre dos sistemas S_0 y S_1.
- Campo de velocidades en el movimiento relativo:

$$\underbrace{\boldsymbol{v}_{\text{abs}}}_{\boldsymbol{v}_{S_0}} = \underbrace{\boldsymbol{v}_{O_1} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{v}_{\text{arr}}} + \underbrace{\boldsymbol{v}_{\text{rel}}}_{\boldsymbol{v}_{S_1}}; \tag{20}$$

- La velocidad de arrastre $\boldsymbol{v}_{\text{arr}}$ es un movimiento rígido, supongamos que de un sólido $\mathcal{B}_0$; considerando $\boldsymbol{v}_{S_1}$ el movimiento de un sólido $\mathcal{B}_1$, se deduce que la velocidad es suma de los dos campos:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\mathcal{B}_0} + \boldsymbol{v}_{\mathcal{B}_1} \tag{21}$$

- Por tanto, en la composición de dos o más movimientos, se puede interpretar como suma de los respectivos campos de velocidades

Composición de movimientos – casos

Casos de composición de velocidades

a. Dos traslaciones (rectilíneas, curvas, ...): resulta otro movimiento de traslación, con suma de velocidades:

$$(\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \ \boldsymbol{v}_2 \tag{22}$$

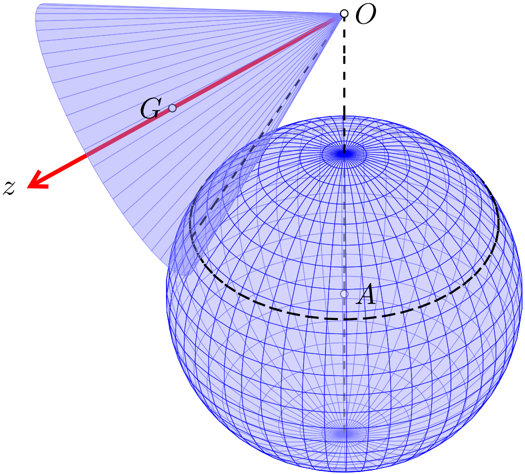
b. Dos rotaciones de ejes concurrentes: resulta otra rotación cuya velocidad es la suma,

$$(\boldsymbol{\Omega}_1,\ \boldsymbol{\Omega}_2) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_1 + \ \boldsymbol{\Omega}_2 \tag{23}$$

El Eje Instantáneo de Rotación pasa por la intersección de ambos ejes y contiene los puntos de velocidad nula $\boldsymbol{v}_{\mathsf{min}} = \boldsymbol{0}$

c. Dos rotaciones de ejes que se cruzan (no se cortan): resulta un movimiento helicoidal tangente general, con velocidad de deslizamiento $\boldsymbol{v}_{\mathsf{min}} \neq \boldsymbol{0}$ y de rotación $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_1 + \ \boldsymbol{\Omega}_2$

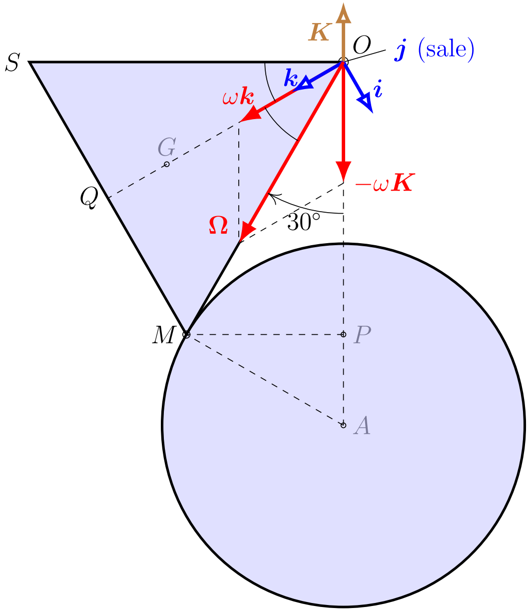
Ejemplo: rotaciones de ejes que se cortan



Cono de revolución con semiángulo 30° cuyo vértice O se mantiene fijo; se mueve manteniéndose en contacto con una esfera fija de radio R, rodando sin deslizar.

[Problema, 09/05/2016]

Ejemplo: rotaciones de ejes que se cortan (2)



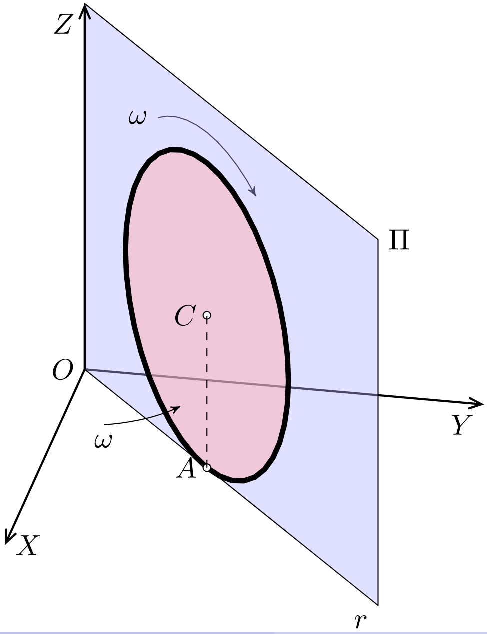
La velocidad angular es

$$\boldsymbol{\Omega} = -\omega\,\boldsymbol{K} + \omega\,\boldsymbol{k}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\omega\,\boldsymbol{i} + \frac{3}{2}\omega\,\boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{\Omega}$ es constante en relación al plano meridiano, pero gira junto con dicho plano con velocidad angular $-\omega\,\boldsymbol{K}$, por lo que

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = -\omega\,\boldsymbol{K} \wedge (-\omega\,\boldsymbol{K} + \omega\,\boldsymbol{k})$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2\boldsymbol{j}$$

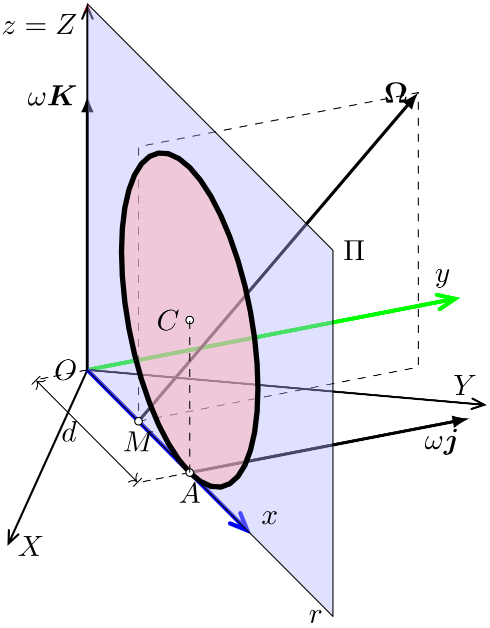
Ejemplo: rotaciones de ejes que se cruzan



Plano Π que gira alrededor del eje OZ con velocidad angular ω constante. A su vez un disco de radio R se mantiene dentro de este plano, rodando sin deslizar sobre la recta móvil r intersección de dicho plano Π con OXY, con la misma velocidad angular ω.

[Problema, 29/04/2013]

Ejemplo: rotaciones de ejes que se cruzan (2)



Velocidad angular:

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega\boldsymbol{j} + \omega\boldsymbol{k}\,.$$

Aceleración angular:

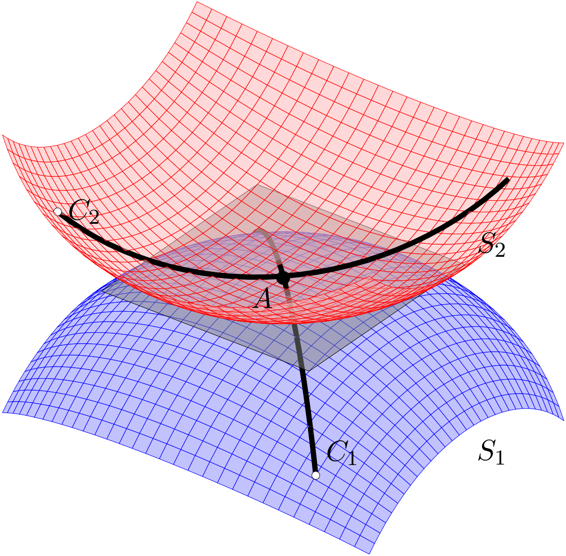
$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\Omega}} &= (\omega\boldsymbol{k}) \wedge (\omega\boldsymbol{j} + \omega\boldsymbol{k}) \\ &= -\omega^2\boldsymbol{i}\,.\end{aligned}$$

Velocidad mínima:

$$\begin{aligned}v_{\text{min}} &= \boldsymbol{v}_A \cdot \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega} \\ &= (\omega d\boldsymbol{j}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) \\ &= \frac{\omega d}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Índice

Movimiento de sólidos tangentes



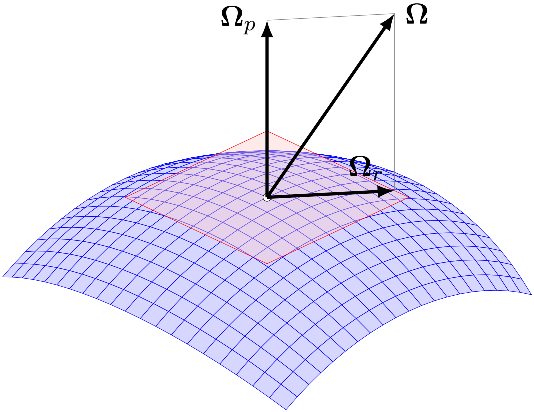
Sólidos tangentes S_1 y S_2, con deslizamiento; se dibuja la huella dejada por el punto de contacto A sobre cada uno.

La velocidad de deslizamiento es

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_{\text{desl}} &= \boldsymbol{v}_{\text{arr}} \\ &= \boldsymbol{v}_{\text{abs}} - \boldsymbol{v}_{\text{rel}} \\ &= \boldsymbol{v}_{A|1} - \boldsymbol{v}_{A|2} \end{aligned}$$

por lo que pertenece al plano tangente común.

Pivotamiento y rodadura



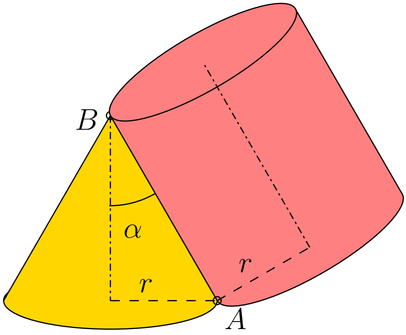
Sólidos tangentes con rodadura sin deslizamiento: componentes de rodadura y pivotamiento de la velocidad de rotación, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_p + \boldsymbol{\Omega}_r$.

$$\boldsymbol{\Omega}_p \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{N})\boldsymbol{N}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_r \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_p$$

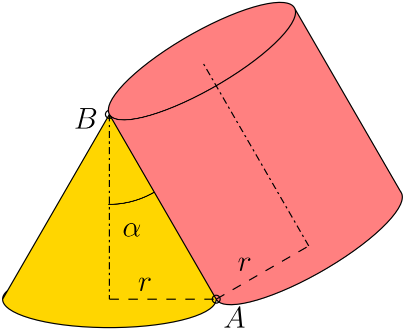
Índice

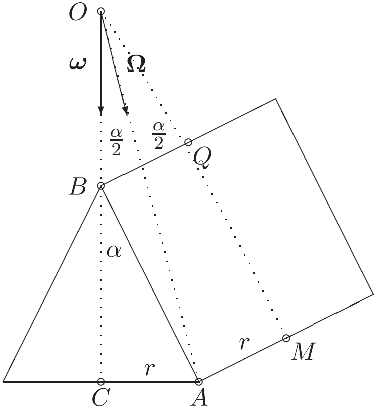
Ejemplos – Rotación con pivotamiento y rodadura



Un cilindro de radio r se mueve manteniéndose tangente a un cono fijo, de radio de la base r y semiángulo α, compartiendo en todo momento una generatriz. Una base del cilindro rueda con velocidad uniforme sin deslizar sobre la base del cono, realizando una revolución completa alrededor del eje del cono en un tiempo τ. La otra base del cilindro se mantiene en contacto con el vértice B.

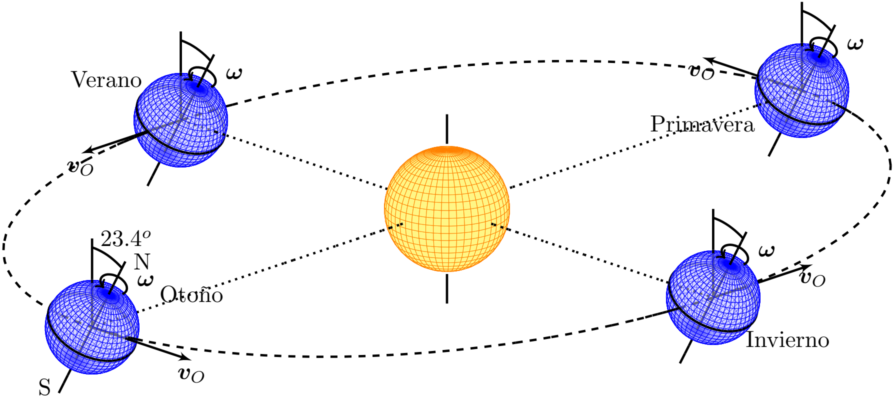
- Al rodar sin deslizar en el punto A, su velocidad es nula $\boldsymbol{v}_A = \mathbf{0}$, por lo que identificamos el movimiento del cilindro como una rotación instantánea.
- En el punto B habrá por el contrario deslizamiento, $\boldsymbol{v}_B \neq \mathbf{0}$, luego no pertenece al eje instantáneo de rotación





- El movimiento se puede descomponer en una rotación del eje OQM del cilindro alrededor del eje vertical OC, con velocidad de rotación $\boldsymbol{\omega}$, y una velocidad de rotación del cilindro alrededor de su eje.
- El resultado de suma de los dos vectores de rotación debe ser tal que el vector resultante $\boldsymbol{\Omega}$ por O pase también por A, ya que ambos pertenecen al eje instantáneo de rotación.

Ejemplos – Movimiento de la tierra

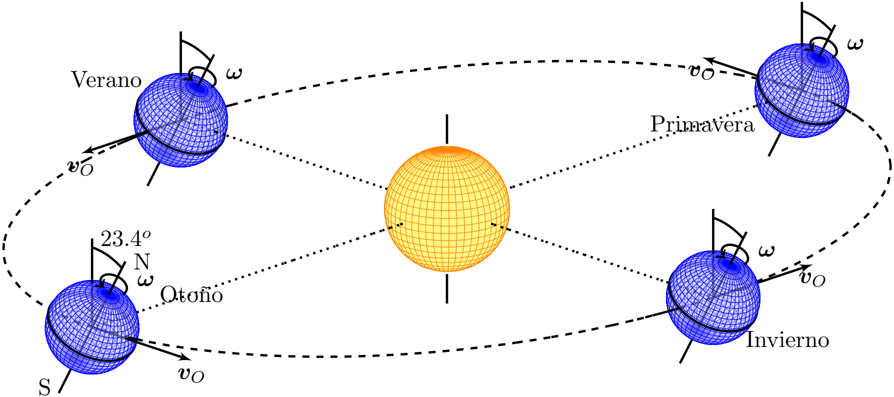


Se puede interpretar como composición de una traslación y una rotación:

a. Traslación alrededor del Sol, con órbita elíptica (aproximadamente circular), a la distancia media de 149 millones de kilómetros.

b. Rotación $\boldsymbol{\omega}$ en torno a su eje Norte-Sur, que mantiene su dirección aproximadamente invariante, con inclinación aproximada de $23{,}4^{\circ}$ respecto de la normal al plano de la eclíptica.

Ejemplos – Movimiento de la tierra



Por consiguiente, el movimiento de la Tierra es un movimiento helicoidal tangente general con deslizamiento. No equivale a una rotación instantánea, salvo en dos puntos singulares de la órbita: los solsticios de verano e invierno, en los que se cumple $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{v}_O = 0$.

Índice

Composición de rotaciones infinitesimales: conmutativa

- Composición de dos movimientos de rotación instantánea $(\boldsymbol{\Omega}_1, \boldsymbol{\Omega}_2)$, con ejes que se cortan en un punto O de velocidad nula. El campo de velocidades de cada movimiento y el conjunto son:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{\Omega}_1 \wedge \boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{\Omega}_2 \wedge \boldsymbol{\rho} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (\underbrace{\boldsymbol{\Omega}_1 + \boldsymbol{\Omega}_2}_{\boldsymbol{\Omega}}) \wedge \boldsymbol{\rho} \tag{24}$$

- El campo de velocidades es enteramente análogo al de movimientos infinitesimales, sin más que emplear las rotaciones infinitesimales en el intervalo $\mathrm{d}t$, es decir $\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_{\{1,2\}} = \boldsymbol{\Omega}_{\{1,2\}}\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 + \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 = (\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_1 + \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_2) \wedge \boldsymbol{\rho} = \mathrm{d}\boldsymbol{\theta} \wedge \boldsymbol{\rho} \tag{25}$$

- Puesto que la suma de vectores no depende del orden, se deduce que la composición de rotaciones infinitesimales es conmutativa:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\theta} = \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_1 + \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_2 = \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_2 + \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_1 \tag{26}$$

Composición de rotaciones finitas: no conmutativa

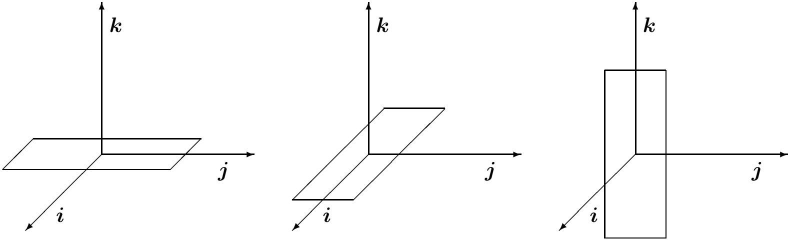
Por el contrario, las rotaciones finitas no son conmutativas.
Consideramos un ejemplo en la pantalla siguiente, en el que realizan dos rotaciones finitas idénticas pero con distinto orden:

a. se realiza primero la rotación $\frac{\pi}{2}\boldsymbol{k}$ seguida de $\frac{\pi}{2}\boldsymbol{j}$;

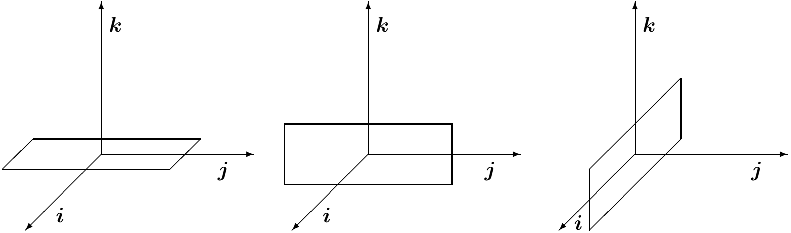
b. se realiza primero la rotación $\frac{\pi}{2}\boldsymbol{j}$ seguida de $\frac{\pi}{2}\boldsymbol{k}$.

¡Los resultados son completamente distintos!

Composición de rotaciones finitas: no conmutativa

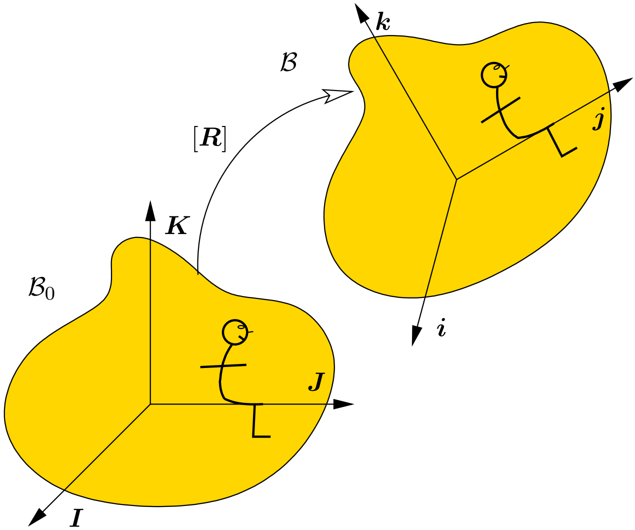


a) rotación $\frac{\pi}{2}\boldsymbol{k}$ seguida de $\frac{\pi}{2}\boldsymbol{j}$.



b) rotación $\frac{\pi}{2}\boldsymbol{j}$ seguida de $\frac{\pi}{2}\boldsymbol{k}$.

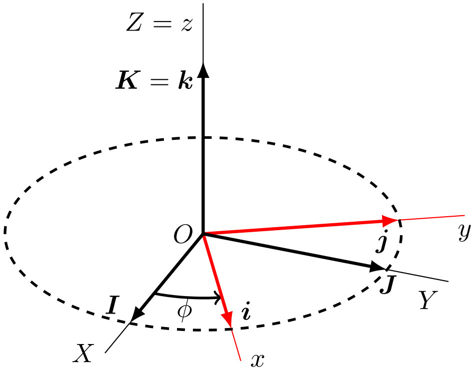
Índice



- Se denomina rotación finita al cambio de orientación más general posible de un sistema rígido.
- Se puede interpretar como un cambio de base, definido por la matriz $[\boldsymbol{R}]$, que permita pasar del triedro fijo $(\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{K})$ al triedro del cuerpo $(\boldsymbol{i}\,\boldsymbol{j}\,\boldsymbol{k})$:

$$\boxed{(\boldsymbol{i}\ \boldsymbol{j}\ \boldsymbol{k}) = (\boldsymbol{I}\ \boldsymbol{J}\ \boldsymbol{K})\ [\boldsymbol{R}]} \tag{27}$$

Rotación como cambio de base – ejemplo básico



Rotación elemental ϕ alrededor del eje Z: origina el nuevo triedro $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ definido por las relaciones

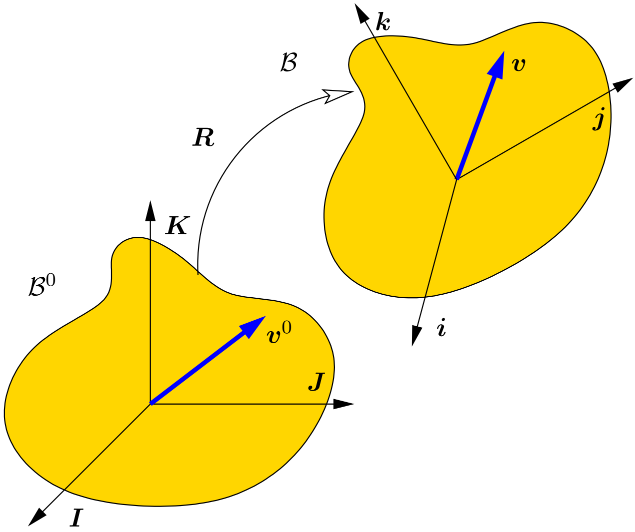
$$\begin{cases} \boldsymbol{i} = \boldsymbol{I}\cos\phi + \boldsymbol{J}\,\mathrm{sen}\,\phi, \\ \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{I}\,\mathrm{sen}\,\phi + \boldsymbol{J}\cos\phi \\ \boldsymbol{k} = \boldsymbol{K} \end{cases} \tag{28}$$

En forma matricial, la transformación de rotación asociada es[4]

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{J} & \boldsymbol{K}\end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\phi & -\mathrm{sen}\,\phi & 0 \\ \mathrm{sen}\,\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{[\boldsymbol{R}]} \tag{29}$$

[4] Las columnas de $[\boldsymbol{R}]$ coinciden con las componentes de los vectores de la nueva base

Rotación como cambio de base – coordenadas



- El sólido $\mathcal{B}$ sufre una rotación $\boldsymbol{R}$. Un vector material se transforma como $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}^0$
- Consideramos las coordenadas de $\boldsymbol{v}$: (X, Y, Z) en la base inicial (espacial, fija); (x, y, z) en la nueva base (material, del cuerpo)
- Ambas coordenadas representan el mismo vector $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{v} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k} = X\,\boldsymbol{I} + Y\,\boldsymbol{J} + Z\,\boldsymbol{K} \tag{30}$$

Rotación como cambio de base – coordenadas

- Desarrollando esta ecuación y el cambio de base en notación matricial

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{K}) \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = (\boldsymbol{i}\,\boldsymbol{j}\,\boldsymbol{k}) \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = (\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{K})\,[\boldsymbol{R}] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \tag{31}$$

- De donde se deduce la expresión del cambio de coordenadas,

$$\boxed{\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{R}] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}} \tag{32}$$

- Si se consideran los vectores columna en esta expresión como coordenadas espaciales, da pie a interpretar alternativamente la rotación como activa, de forma que no se consideren distintas coordenadas de un mismo vector material, sino un nuevo vector en el espacio, $\boldsymbol{R} : \boldsymbol{v}^0 \mapsto \boldsymbol{v}$

Índice

Rotación como transformación ortogonal

- Hacemos la consideración de que la longitud del vector $\boldsymbol{v}$ debe ser la misma medida en ambas bases (coordenadas):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v})\{\boldsymbol{v}\} = (x\,y\,z)\begin{Bmatrix}x\\y\\z\end{Bmatrix} &= (X\,Y\,Z)\begin{Bmatrix}X\\Y\\Z\end{Bmatrix}\\ &= \Big((x\,y\,z)\,[\boldsymbol{R}]^{\mathsf{T}}\Big)\Big([\boldsymbol{R}]\begin{Bmatrix}x\\y\\z\end{Bmatrix}\Big)\end{aligned} \tag{33}$$

- se deduce la relación siguiente, que indica que $[\boldsymbol{R}]$ es ortogonal

$$\boxed{[\boldsymbol{R}]^{\mathsf{T}}[\boldsymbol{R}] = [\mathbf{1}]} \tag{34}$$

- Asimismo, tomando determinantes en (34),

$$\det(\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}})\det(\boldsymbol{R}) = \big(\det(\boldsymbol{R})\big)^2 = 1 \quad \Rightarrow^{5} \quad \boxed{\det(\boldsymbol{R}) = 1} \tag{35}$$

[5] la solución $\det(\boldsymbol{R}) = -1$ se descarta, correspondería a una rotación impropia con cambio de orientación de ejes; la solución $+1$ define una rotación propia

Composición de rotaciones

- Se plantea la composición de dos rotaciones, sucesivamente $[\boldsymbol{R}_1]$ y $[\boldsymbol{R}_2]$, cambiando a las correspondientes bases:

$$(\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{K})\;{}_{[\boldsymbol{R}_1]}\longrightarrow (\boldsymbol{i}'\,\boldsymbol{j}'\,\boldsymbol{k}')\;{}_{[\boldsymbol{R}_2]}\longrightarrow (\boldsymbol{i}\,\boldsymbol{j}\,\boldsymbol{k}) \tag{36}$$

- Desarrollando las expresiones del cambio de base,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{i}\,\boldsymbol{j}\,\boldsymbol{k}) &= (\boldsymbol{i}'\,\boldsymbol{j}'\,\boldsymbol{k}')\,[\boldsymbol{R}_2] = \Big((\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{K})\,[\boldsymbol{R}_1]\Big)[\boldsymbol{R}_2] \\ &= (\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{K})\,[\boldsymbol{R}_1][\boldsymbol{R}_2]\end{aligned} \tag{37}$$

- Es decir, la matriz de rotación conjunta es[6] [7]

$$\boxed{[\boldsymbol{R}] = [\boldsymbol{R}_1][\boldsymbol{R}_2]} \tag{38}$$

[6] Se recuerda que el producto de matrices no es conmutativo, $[\boldsymbol{R}_1][\boldsymbol{R}_2] \neq [\boldsymbol{R}_2][\boldsymbol{R}_1]$

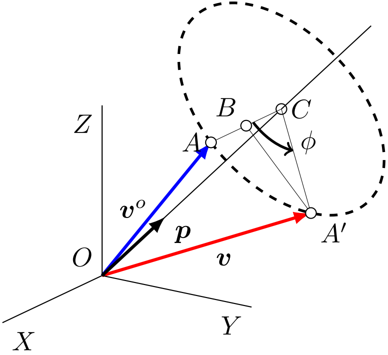
[7] Esta expresión requiere que la definición de las sucesivas rotaciones sea relativa, en cada paso en función de los nuevos ejes, no absoluta en los ejes iniciales

Rotación activa / Vector de rotación de Euler $\phi\,\boldsymbol{p}$

- La ecuación (32) permite interpretar la rotación de forma activa, como una aplicación que transforma un vector $\boldsymbol{v}^0$ en la configuración inicial del cuerpo $\mathcal{B}^0$ a un nuevo vector $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}^0=\boldsymbol{v} \tag{39}$$

- Esta aplicación se comprueba fácilmente que es lineal y por tanto constituye un tensor de orden 2.



- El teorema de Euler expresa que toda rotación $\boldsymbol{R}$ (ortogonal y propia) se corresponde con un giro de un cierto ángulo ϕ, alrededor de una determinada dirección $\boldsymbol{p}$ (vector unitario).
- El vector $\phi\,\boldsymbol{p}$ se denomina vector de rotación de Euler.
- La figura representa este giro $\phi\,\boldsymbol{p}$ aplicado a $\boldsymbol{v}^0$ para obtener $\boldsymbol{v}$.

Índice

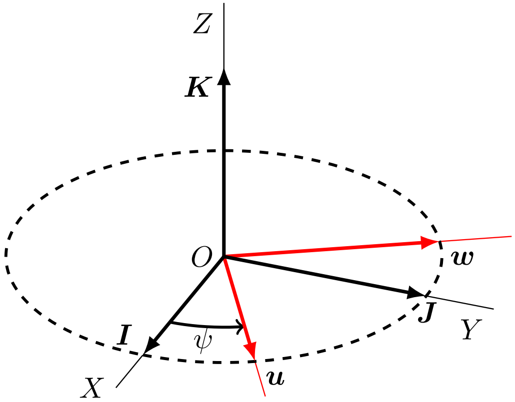
Ángulos de Euler

- El número de parámetros escalares que definen en el caso más general una rotación son tres[8]. Estos podrían definirse, por ejemplo, como las tres componentes del vector de rotación de Euler $\phi \boldsymbol{p}$.
- Sin embargo, para definir los tres grados de libertad de rotación emplearemos los ángulos de Euler. Estos son tres rotaciones elementales[9] en un orden prefijado:
  1. Precesión ψ alrededor del eje 3;
  2. Nutación θ alrededor del nuevo eje 1
  3. Rotación propia φ alrededor del nuevo eje 3
- A continuación definimos con detalle las operaciones de los tres ángulos de Euler.

[8] En principio las componentes de la matriz de rotación $[\boldsymbol{R}]$ son nueve, pero están sometidos a las condiciones de ortogonalidad (34), que constituyen seis restricciones, lo que deja un número de $9 - 6 = 3$ grados de libertad.

[9] denominamos rotaciones elementales las que son alrededor de los ejes del triedro

Ángulos de Euler – Precesión $\psi\boldsymbol{K}$



$$\text{Triedro fijo: } (\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K})$$
$$+$$
$$\text{Rotación } \psi\boldsymbol{K} \text{ (precesión)}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{I}\cos\psi + \boldsymbol{J}\,\mathrm{sen}\,\psi, \\ \boldsymbol{w} = -\boldsymbol{I}\,\mathrm{sen}\,\psi + \boldsymbol{J}\cos\psi \end{cases}$$

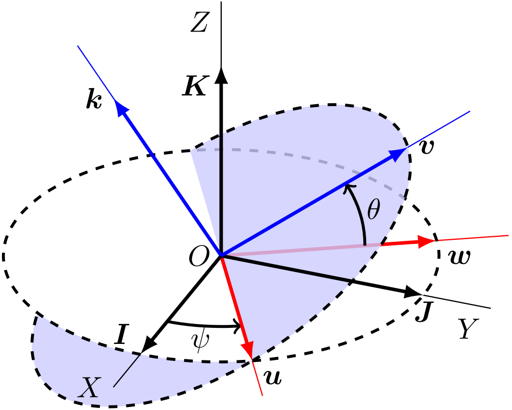
$$\downarrow$$

$$\text{Triedro: } (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{K})$$

La expresión matricial equivalente es

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{K}) = (\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}) \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\psi & -\mathrm{sen}\,\psi & 0 \\ \mathrm{sen}\,\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{[\mathbf{R}_\psi]}$$

Ángulos de Euler – Nutación $\theta\boldsymbol{u}$



Triedro: $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{K})$

$+$

Rotación $\theta\boldsymbol{u}$ (Nutación)

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}\cos\theta + \boldsymbol{K}\operatorname{sen}\theta, \\ \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{w}\operatorname{sen}\theta + \boldsymbol{K}\cos\theta. \end{cases}$$

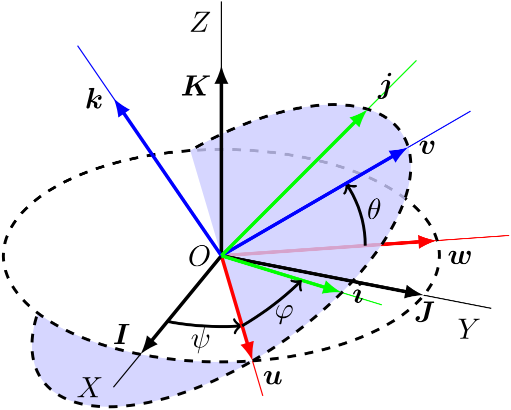
$\downarrow$

Triedro intermedio: $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{k})$

La expresión matricial equivalente es

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{k}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{K}) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{[\mathbf{R}_\theta]}$$

Ángulos de Euler – Rotación propia $\varphi \boldsymbol{k}$



Triedro intermedio: $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{k})$

$+$

Rotación $\varphi \boldsymbol{k}$ (rot. propia)

$$\begin{cases} \boldsymbol{i} = \boldsymbol{u} \cos\varphi + \boldsymbol{v} \operatorname{sen}\varphi, \\ \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{u} \operatorname{sen}\varphi + \boldsymbol{v} \cos\varphi. \end{cases}$$

$\downarrow$

Triedro del cuerpo: $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$

La expresión matricial equivalente es

$$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{k}) \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{[\mathbf{R}_\varphi]}$$

Rotación conjunta

Teniendo en cuenta que cada matriz de rotación se define de forma relativa al triedro rotado en la operación anterior, la rotación conjunta se obtiene como producto de las tres en el siguiente orden:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{k}\end{pmatrix}[\mathbf{R}_\varphi] \\ &= \begin{pmatrix}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{w} & \boldsymbol{K}\end{pmatrix}[\mathbf{R}_\theta][\mathbf{R}_\varphi] \\ &= \begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{J} & \boldsymbol{K}\end{pmatrix}[\mathbf{R}_\psi][\mathbf{R}_\theta][\mathbf{R}_\varphi]\end{aligned}$$

Por tanto, la matriz conjunta resulta:

$$[\mathbf{R}] = [\mathbf{R}_\psi][\mathbf{R}_\theta][\mathbf{R}_\varphi] =$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{c}\,\psi\,\mathrm{c}\,\varphi - \mathrm{s}\,\psi\,\mathrm{c}\,\theta\,\mathrm{s}\,\varphi & -\mathrm{c}\,\psi\,\mathrm{s}\,\varphi - \mathrm{s}\,\psi\,\mathrm{c}\,\theta\,\mathrm{c}\,\varphi & \mathrm{s}\,\psi\,\mathrm{s}\,\theta \\ \mathrm{s}\,\psi\,\mathrm{c}\,\varphi + \mathrm{c}\,\psi\,\mathrm{c}\,\theta\,\mathrm{s}\,\varphi & -\mathrm{s}\,\psi\,\mathrm{s}\,\varphi + \mathrm{c}\,\psi\,\mathrm{c}\,\theta\,\mathrm{c}\,\varphi & -\mathrm{c}\,\psi\,\mathrm{s}\,\theta \\ \mathrm{s}\,\theta\,\mathrm{s}\,\varphi & \mathrm{s}\,\theta\,\mathrm{c}\,\varphi & \mathrm{c}\,\theta \end{pmatrix}$$

Esta matriz es ortogonal, lo cual facilita el cálculo de la inversa:

$$[\mathbf{R}]^{-1} = [\mathbf{R}]^{\mathsf{T}}$$

Índice

Velocidad de rotación

La velocidad angular se puede expresar en función de las derivadas temporales de los ángulos de Euler,

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\,\boldsymbol{K} + \dot{\theta}\,\boldsymbol{u} + \dot{\varphi}\,\boldsymbol{k} \tag{40}$$

Para expresar las componentes en un mismo triedro, en este caso el del cuerpo $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, se considera

$$\boldsymbol{K} = \operatorname{sen}\theta\boldsymbol{v} + \cos\theta\boldsymbol{k} = \operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j}) + \cos\theta\boldsymbol{k} \tag{41}$$

$$\boldsymbol{u} = \cos\varphi\boldsymbol{i} - \operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{j} \tag{42}$$

Resultando las componentes en el triedro del cuerpo,

$$\boxed{\boldsymbol{\Omega} = p\,\boldsymbol{i} + q\,\boldsymbol{j} + r\,\boldsymbol{k} \qquad \begin{cases} p = \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \\ q = -\dot{\theta}\operatorname{sen}\varphi + \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ r = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}} \tag{43}$$

Velocidad de rotación – triedro intermedio

La velocidad angular se puede expresar en función de las derivadas de los ángulos de Euler,

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\,\boldsymbol{K} + \dot{\theta}\,\boldsymbol{u} + \dot{\varphi}\,\boldsymbol{k} \tag{44}$$

Para expresar ahora todas las componentes en el triedro intermedio $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{k})$, se considera

$$\boldsymbol{K} = \operatorname{sen}\theta \boldsymbol{v} + \cos\theta \boldsymbol{k} \tag{45}$$

Resultando las componentes en el triedro intermedio

$$\boxed{\boldsymbol{\Omega} = p^{(i)}\,\boldsymbol{u} + q^{(i)}\,\boldsymbol{v} + r^{(i)}\,\boldsymbol{k} \qquad \begin{cases} p^{(i)} = \dot{\theta} \\ q^{(i)} = \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta \\ r^{(i)} = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta = r \end{cases}} \tag{46}$$