5: Oscilaciones con n Grados de Libertad

MECÁNICA

Grado de Ingeniería Civil

José M.ª Goicolea

Grupo de Mecánica Computacional
Escuela de Ingenieros de Caminos,
Universidad Politécnica de Madrid

9 de marzo de 2022

POLITÉCNICA

Índice

Sistemas lineales acoplados

- las ecuaciones generales de la dinámica son de segundo orden en función del tiempo. Cuando son lineales, para el caso con 1 gdl, adoptan la forma siguiente:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \tag{1}$$

- Para el caso con n gdl son de la forma

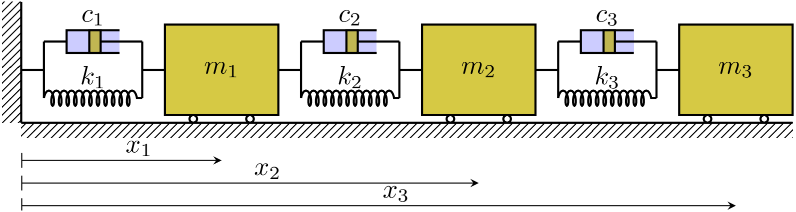
$$m_{ij}\ddot{q}_j + c_{ij}\dot{q}_j + k_{ij}q_j = f_i(t)\,, \tag{2}$$

- En forma matricial (2) se expresa como

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{f}(t)\} \tag{3}$$

- En el caso en que las matrices $[\mathbf{M}], [\mathbf{C}], [\mathbf{K}]$ fuesen diagonales las ecuaciones estarían desacopladas: se podrían considerar como n sistemas de 1 gdl independientes.
- En otro caso, las ecuaciones estarán acopladas: el movimiento de un grado de libertad afecta a los demás, y deben resolverse de forma conjunta.

Sistemas lineales acoplados – Ejemplo



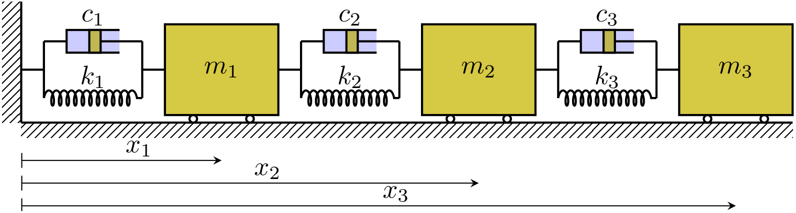
- Tomamos coordenadas absolutas de cada masa en relación con la posición de equilibrio, $\mathbf{q} = (x_1, x_2, x_3)$.
- La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2,$$

- y la energía potencial

$$V = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_3(x_3 - x_2)^2.$$

Sistemas lineales acoplados – Ejemplo



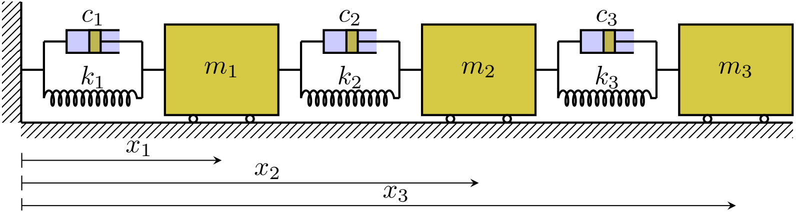
- Las fuerzas de los amortiguadores son no conservativas:

$$
\begin{aligned}
Q_1^{\mathsf{nc}} &= -c_1\dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\
Q_2^{\mathsf{nc}} &= -c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) \\
Q_3^{\mathsf{nc}} &= -c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)
\end{aligned}
$$

- Las ecuaciones de Lagrange, con $L = T - V$, son

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_j} = Q_j^{\mathsf{nc}}
$$

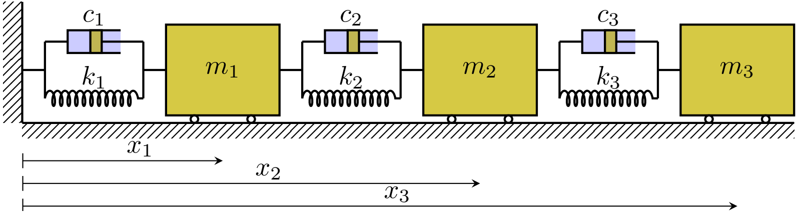
Sistemas lineales acoplados – Ejemplo



Resultan por tanto las ecuaciones del movimiento siguientes:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3x_3 - c_2\dot{x}_1 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - c_3\dot{x}_3 = 0 \\ m_3\ddot{x}_3 - k_3x_2 + k_3x_3 - c_3\dot{x}_2 + c_3\dot{x}_3 = 0 \end{cases}$$

Sistemas lineales acoplados – Ejemplo



Se pueden identificar los coeficientes de las ecuaciones (2):

$$[m_{ij}] = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}, \quad [c_{ij}] = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{pmatrix}, \tag{4}$$
$$[k_{ij}] = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix}.$$

Resulta un sistema de 3 ecuaciones diferenciales lineales y acopladas, al no ser diagonales ni los coeficientes c_{ij} ni los k_{ij}.

Índice

Linealización de ecuaciones

Las ecuaciones de oscilaciones lineales pueden provenir de dos casos:

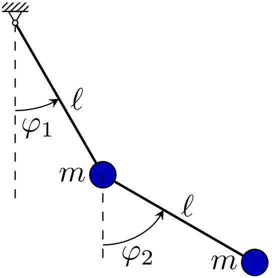
1. Sistema lineal (como el visto antes), en cuyo caso las ecuaciones resultan directamente lineales
2. Sistema no lineal con pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable. Para ello se puede proceder de dos maneras:
   a. Obtener las ecuaciones generales de Lagrange y después linealizar, despreciando los infinitésimos de orden superior.
   b. Obtener directamente los coeficientes lineales de las ecuaciones

$$m_{ij}\ddot{q}_j + c_{ij}\dot{q}_j + k_{ij}q_j = f_i(t)$$

$$m_{ij} = \left.\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right|_{\mathbf{q}_0} \quad ; \quad k_{ij} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{\mathbf{q}_0} \quad ; \quad c_{ij} = -\left.\frac{\partial Q_i^{\mathsf{nc}}}{\partial \dot{q}_j}\right|_{\mathbf{q}_0} \tag{5}$$

Estas derivadas se deben particularizar en la posición de equilibrio.

Ejemplo: Péndulo doble – Linealización



Péndulo doble formado por masas puntuales m unidas por varillas sin masa de longitud ℓ

Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}m\ell^2\left[2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\right] + mg\ell(2\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2).$$

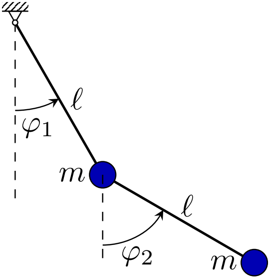
Ecuaciones de Lagrange:

$$0 = 2m\ell^2\ddot{\varphi}_1 + m\ell^2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\ddot{\varphi}_2 - m\ell^2\dot{\varphi}_2^2\,\mathrm{sen}(\varphi_2 - \varphi_1) + 2mg\ell\,\mathrm{sen}\,\varphi_1$$
$$0 = m\ell^2\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + m\ell^2\ddot{\varphi}_2 + m\ell^2\dot{\varphi}_1^2\,\mathrm{sen}(\varphi_2 - \varphi_1) + mg\ell\,\mathrm{sen}\,\varphi_2$$

Ecuaciones linealizadas despreciando términos de segundo orden:

$$0 = 2m\ell^2\ddot{\varphi}_1 + m\ell^2\ddot{\varphi}_2 + 2mg\ell\varphi_1$$
$$0 = m\ell^2\ddot{\varphi}_1 + m\ell^2\ddot{\varphi}_2 + mg\ell\varphi_2$$

Ejemplo: Péndulo doble – Linealización



Las ecuaciones linealizadas para pequeñas oscilaciones son:

$$0 = 2m\ell^2\ddot{\varphi}_1 + m\ell^2\ddot{\varphi}_2 + 2mg\ell\varphi_1$$
$$0 = m\ell^2\ddot{\varphi}_1 + m\ell^2\ddot{\varphi}_2 + mg\ell\varphi_2$$

De forma matricial se pueden expresar como

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}$$

siendo

$$\{\mathbf{q}\} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}, \quad [\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} 2m\ell^2 & m\ell^2 \\ m\ell^2 & m\ell^2 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} 2mg\ell & 0 \\ 0 & mg\ell \end{pmatrix}$$

Índice

Oscilaciones libres – Sin amortiguamiento

- Las ecuaciones generales de un sistema dinámico lineal (o linealizado), con n GDL $\{\mathbf{q}\} = \{q_j\}$, son[1]:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{f}(t)\} \qquad \text{matricial} \qquad (6)$$

$$m_{ij}\ddot{q}_j + c_{ij}\dot{q}_j + k_{ij}q_j = f_i(t) \qquad \text{índices} \qquad (7)$$

  donde $[\mathbf{M}]$ es la matriz de masa, $[\mathbf{C}]$ de amortiguamiento, $[\mathbf{K}]$ de rigidez, $\{\mathbf{f}(t)\}$ el vector de fuerzas aplicadas.

- Consideramos vibraciones sin amortiguamiento y libres:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + \cancelto{\mathbf{0}}{[\mathbf{C}]}\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \cancelto{\mathbf{0}}{\{\mathbf{f}(t)\}}$$

$$\boxed{[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}} \qquad (8)$$

[1] se emplea el convenio de suma implícita para índices repetidos

Oscilaciones libres – Sin amortiguamiento

- Buscamos soluciones armónicas puras que, mediante la notación de la exponencial compleja[2], se expresan como

$$\{\mathbf{q}(t)\} = \{\mathbf{a}\}\mathrm{e}^{i\omega t}, \quad \text{con } \{\mathbf{a}\} \in \mathbb{R}^n \tag{9}$$

- La derivada (segunda) de esta solución es

$$\{\ddot{\mathbf{q}}(t)\} = -\omega^2\{\mathbf{a}\}\mathrm{e}^{i\omega t}, \tag{10}$$

- y sustituyendo en la ecuación (8)

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}](-\omega^2\{\mathbf{a}\}\mathrm{e}^{i\omega t}) + [\mathbf{K}]\{\mathbf{a}\}\mathrm{e}^{i\omega t} &= \{\mathbf{0}\} \\ (-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}])\{\mathbf{a}\}\mathrm{e}^{i\omega t} = \{\mathbf{0}\}(-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}])\{\mathbf{a}\}\cancel{\mathrm{e}^{i\omega t}} &= \{\mathbf{0}\} \end{aligned} \tag{11}$$

- y simplificando $\mathrm{e}^{i\omega t} \neq 0$,

$$(-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}])\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{0}\} \tag{12}$$

[2] $\mathrm{e}^{i\omega t} = \cos\omega t + i\,\mathrm{sen}\,\omega t$

Oscilaciones libres – Sin amortiguamiento

La ecuación (12) define un problema de autovalores generalizado: dadas las matrices $[\mathbf{K}], [\mathbf{M}]$, encontrar $\lambda = \omega^2$ (autovalor o valor propio) y $\{\mathbf{a}\}$ (autovector o vector propio) que cumplen

$$\boxed{([\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}])\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{0}\}} \tag{13}$$

Notas

- la ecuación de autovalores tiene siempre al menos una solución trivial, $\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{0}\}$, como se comprueba fácilmente
- Si existe solución de la trivial $\{\mathbf{a}\} \neq \{\mathbf{0}\}$ no será única, cualquier otra proporcional $\alpha\{\mathbf{a}\}$ también será solución
- Para que existan soluciones distintas a la trivial, la matriz de coeficientes ha de ser singular:

$$\boxed{\det([\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}]) = 0} \tag{14}$$

Índice

Oscilaciones libres – Modos y frecuencias propias

- La expresión (14) se denomina ecuación o polinomio característico:

$$\boxed{\det([\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}]) = 0}$$

es un polinomio de grado n, que en general tiene n soluciones complejas, valores propios o autovalores $\lambda_k \in \mathbb{C}$.

- En nuestro caso, al ser las matrices $[\mathbf{K}], [\mathbf{M}]$ simétricas y definidas positivas, las n soluciones son reales y positivas: $\lambda_k \in \mathbb{R}^+$. Por ello, se pueden obtener las frecuencias propias como las raíces positivas de los valores propios:

$$\omega_k = +\sqrt{\lambda_k} \tag{15}$$

- Para cada valor propio $\lambda_k = \omega_k^2$ existe una solución (no única) para el vector propio asociado:

$$([\mathbf{K}] - \lambda_k[\mathbf{M}])\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{0}\} \quad \longrightarrow \quad \{\mathbf{a}_k\} \tag{16}$$

- La no unicidad de la solución se manifiesta en que podemos elegir una norma o escala para el vector propio. Una opción es la normalización a través de la matriz de masa:

$$\{\mathbf{a}_k\}^\mathsf{T}[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\} = 1 \tag{17}$$

- Otra opción, más sencilla y probablemente más recomendable, es normalizar haciendo que una de las componentes del vector propio, por ejemplo la primera, tenga valor unitario[3]:

$$a_{k1} = 1 \quad \longrightarrow \quad \{\mathbf{a}_k\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ a_{k2} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{Bmatrix} \tag{18}$$

[3] para poder aplicar este criterio la componente normalizada no debe ser nula, en este caso se debe elegir otra componente.

Ortogonalidad de los modos propios

- Una propiedad clave de los modos es la ortogonalidad respecto a la matriz de masas. En efecto, considerando dos modos con valores propios distintos $\lambda_k \neq \lambda_l$

$$\begin{array}{c} \{\mathbf{a}_l\}^{\mathsf{T}}\big(\lambda_k[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\} = [\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_k\}\big) \\ \{\mathbf{a}_k\}^{\mathsf{T}}\big(\lambda_l[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_l\} = [\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_l\}\big) \\ \hline \cancel{(\lambda_k - \lambda_l)}\{\mathbf{a}_l\}^{\mathsf{T}}[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\} = 0 \end{array}$$

  (restando ambas ecuaciones)[a]

- Es decir,

$$\boxed{\{\mathbf{a}_l\}^{\mathsf{T}}[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\} = 0 \quad \text{si } \lambda_l \neq \lambda_k}$$

[a] y considerando que por simetría $\{\mathbf{a}_l\}^{\mathsf{T}}[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\} = \{\mathbf{a}_k\}^{\mathsf{T}}[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_l\}$, e igualmente para $[\mathbf{K}]$

Índice

Oscilaciones libres – Análisis modal

- De esta manera se obtendrían n soluciones del tipo (9), para cada modo y frecuencia propia $(\{\mathbf{a}_k\}, \omega_k)$;
- La solución general será una combinación lineal de los distintos modos:

$$\{\mathbf{q}(t)\} = \sum_{k=1}^{n} C_k \{\mathbf{a}_k\} \mathrm{e}^{i\omega_k t}, \quad \text{con } C_k \in \mathbb{C} \tag{19}$$

- En este sumatorio, la componente de cada modo k debe ser un valor real. Por ello, sumando la respuesta correspondiente a las raíces de ambos signos de los autovalores,

$$\begin{aligned} \{\mathbf{q}_k(t)\} &= C_k^+ \{\mathbf{a}_k\} \mathrm{e}^{i\omega_k t} + C_k^- \{\mathbf{a}_k\} \mathrm{e}^{-i\omega_k t} \\ &= \{\mathbf{a}_k\} \left[C_k^+ \mathrm{e}^{i\omega_k t} + C_k^- \mathrm{e}^{-i\omega_k t} \right] \\ &= \{\mathbf{a}_k\} \Big[\underbrace{(C_k^+ + C_k^-)}_{D_k \in \mathbb{R}} \cos \omega_k t + \underbrace{(C_k^+ - C_k^-) i}_{E_k \in \mathbb{R}} \operatorname{sen} \omega_k t \Big] \end{aligned} \tag{20}$$

Oscilaciones libres – Análisis modal

- Considerando que el movimiento es real, $\{\mathbf{q}_k\} \in \mathbb{R}^n$, cambiamos a unas nuevas constantes reales (D_k, E_k):

$$\left.\begin{array}{r} C_k^+ + C_k^- = D_k \in \mathbb{R} \\ i(C_k^+ - C_k^-) = E_k \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C^+ = \dfrac{1}{2}(D_k - iE_k) \\ C^- = \dfrac{1}{2}(D_k + iE_k) \end{cases} \tag{21}$$

- En función de estas constantes la componente modal k es[4]

$$\{\mathbf{q}_k(t)\} = \{\mathbf{a}_k\}\left[D_k \cos \omega_k t + E_k \operatorname{sen} \omega_k t\right] \tag{22}$$

- o bien, cambiando de nuevo a unas constantes (B_k, δ_k),

$$\{\mathbf{q}_k(t)\} = \{\mathbf{a}_k\} B_k \cos(\omega_k t - \delta_k) \tag{23}$$

siendo $B_k \cos \delta_k = D_k, B_k \operatorname{sen} \delta_k = E_k$

[4] En rojo los parámetros propios del sistema, en azul las constantes que dependen de condiciones iniciales

Oscilaciones libres – Análisis modal

- En definitiva, la solución general *real* puede expresarse como

$$\boxed{\{\mathbf{q}(t)\} = \sum_{k=1}^{n} B_k \{\mathbf{a}_k\} \cos(\omega_k t - \delta_k)} \tag{24}$$

- Esta solución puede interpretarse como una serie de formas o modos de vibración $\{\mathbf{a}_k\}$, oscilando cada uno con su frecuencia propia ω_k[5]:

$$\{\mathbf{q}_k(t)\} = B_k \{\mathbf{a}_k\} \cos(\omega_k t - \delta_k) \tag{25}$$

- Las $2n$ constantes (B_k, δ_k) se determinarían con las $2n$ condiciones iniciales $(q_j(0), \dot{q}_j(0))$.

[5] así como con su ángulo de fase δ_k

- los coeficientes escalares que multiplican a cada modo en la ecuación (25) pueden interpretarse como la amplitud modal función del tiempo, y reciben el nombre de coordenada normal $u_k(t)$:

$$u_k(t) = B_k \cos(\omega_k t - \delta_k) \tag{26}$$

- de esta forma, puede escribirse la ecuación (24) como

$$\{\mathbf{q}(t)\} = \sum_{k=1}^{n} u_k(t)\{\mathbf{a}_k\} \quad \Leftrightarrow \quad q_j(t) = u_k(t) a_{kj} \tag{27}$$

- Si definimos los coeficientes a_{kj} de (27) como una matriz, que denominaremos matriz modal $[\mathbf{A}] = [a_{kj}]$, esta relación define un cambio de coordenadas a las coordenadas normales:

$$q_j = u_k a_{kj} \quad \Leftrightarrow \quad \{\mathbf{q}\} = [\mathbf{A}]^\mathsf{T}\{\mathbf{u}\} \tag{28}$$

- En la práctica, la matriz modal $[\mathbf{A}]$ se construye colocando los vectores propios como filas:

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (29)$$

- La norma de un vector propio respecto de la matriz de masas es el producto interior por sí mismo, que se denomina masa modal M_k:

$$\{\mathbf{a}_k\}^{\mathsf{T}}[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\} = M_k \qquad (30)$$

- Empleando la propiedad de ortogonalidad (19), se puede expresar de forma general

$$\{\mathbf{a}_l\}^{\mathsf{T}}[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\} = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda_k \neq \lambda_l \\ M_k & \text{si } \lambda_k = \lambda_l \end{cases} \tag{31}$$

- De esta forma, empleando la matriz modal, considerando que sus filas son los modos propios,

$$\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdashline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hdashline a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}^{[\mathbf{A}]} [\mathbf{M}] \overbrace{\left(\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{array}\right)}^{[\mathbf{A}]^{\mathsf{T}}}$$

$$= \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & M_n \end{pmatrix} = [\mathbf{M}_D] \tag{32}$$

- es decir, los modos propios de la matriz modal $[\mathbf{A}]$ diagonalizan la matriz de masas $[\mathbf{M}]$

$$[\mathbf{A}][\mathbf{M}][\mathbf{A}]^{\mathsf{T}} = [\mathbf{M}_D] \tag{33}$$

- Por la definición de los modos propios, también diagonalizan la matriz de rigidez $[\mathbf{K}]$,

$$\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdashline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hdashline a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}^{[\mathbf{A}]} [\mathbf{K}] \overbrace{\left(\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{array}\right)}^{[\mathbf{A}]^{\mathsf{T}}}$$

$$= \begin{pmatrix} \omega_1^2 M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 M_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 M_n \end{pmatrix} = [\mathbf{K}_D] \tag{34}$$

Oscilaciones libres – Análisis modal

- Partimos de la ecuación dinámica, hacemos el cambio a coordenadas normales $\{\mathbf{q}\} = [\mathbf{A}]^{\mathsf{T}}\{\mathbf{u}\}$, y premultiplicando por la matriz modal $[\mathbf{A}]$ quedan diagonalizadas:

$$[\mathbf{A}][\mathbf{M}][\mathbf{A}]^{\mathsf{T}}\{\ddot{\mathbf{q}}\}\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{A}][\mathbf{K}][\mathbf{A}]^{\mathsf{T}}\{\mathbf{q}\}\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{0}\} \qquad (35)$$

- En función de las matrices diagonales:

$$[\mathbf{M}_D]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}_D]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{0}\} \qquad (36)$$

con $[\mathbf{M}_D] = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & M_n \end{pmatrix}$, $[\mathbf{K}_D] = \begin{pmatrix} M_1\omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2\omega_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & M_n\omega_n^2 \end{pmatrix}$

- es decir, resultan n ecuaciones desacopladas de 1 GDL

$$\boxed{M_k\ddot{u}_k + \omega_k^2 M_k u_k = 0} \qquad k = 1, 2 \dots n \quad \text{(no sumado)} \qquad (37)$$

- La solución general a estas ecuaciones, como sabemos del tema anterior (T4: oscilaciones lineales con 1 GDL) son armónicas

$$u_k(t) = B_k \cos(\omega_k t - \delta_k) \tag{38}$$

lo que, de hecho, ya sabíamos puesto que coincide con la definición hecha de las coordenadas normales en (26).

Análisis modal – oscilaciones libres sin amortiguamiento

1. Se calculan en primer lugar los valores propios λ_k(frecuencias propias $\omega_k = +\sqrt{\lambda_k}$) y modos propios $\{\mathbf{a}_k\}$
2. Cálculo de las masas modales M_k (ecuación (30))[a]
3. Diagonalización de las ecuaciones, convertidas en n ecuaciones de 1 GDL (68), en función de las coordenadas normales $u_k(t)$ o amplitudes de los modos de vibración
4. Solución de las ecuaciones desacopladas, aplicando las condiciones iniciales, obteniendo las historias $u_k(t)$
5. Obtener las historias temporales de las coordenadas reales $q_j(t)$ mediante las ecuaciones (27)

[a] Al no ser únicos los modos de vibración, dependen del criterio tomado para su normalización, las masas modales dependen también de la normalización elegida

Índice

Oscilaciones libres – Con amortiguamiento

- La ecuación general de oscilaciones lineales con amortiguamiento es

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\} \tag{39}$$

  siendo $[\mathbf{C}]$ la matriz de amortiguamiento viscoso.

- Las soluciones son del tipo $\{\mathbf{q}(t)\} = \{\mathbf{b}\}\mathrm{e}^{\gamma t}$, siendo $\gamma \in \mathbb{C}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$. Derivando esta solución y sustituyendo en la ecuación,

$$\{\dot{\mathbf{q}}\} = \gamma\{\mathbf{b}\}\mathrm{e}^{\gamma t}, \quad \{\ddot{\mathbf{q}}\} = \gamma^2\{\mathbf{b}\}\mathrm{e}^{\gamma t}$$

$$\big([\mathbf{M}]\gamma^2 + [\mathbf{C}]\gamma + [\mathbf{K}]\big)\{\mathbf{b}\}\cancel{\mathrm{e}^{\gamma t}} = \{\mathbf{0}\} \tag{40}$$

Oscilaciones libres – Con amortiguamiento

- La expresión anterior (40) constituye un problema de autovalores complejo. En el caso general de amortiguamiento $[\mathbf{C}]$ hay n autovalores complejos $\gamma_k \in \mathbb{C}$ y modos asociados $\{\mathbf{b}_k\} \in \mathbb{C}^n$.
  No suele ser necesario un planteamiento tan general en dinámica estructural
- El caso de amortiguamiento proporcional o de Rayleigh es cuando la matriz de amortiguamiento es combinación lineal de las de masa y rigidez,

$$[\mathbf{C}] = \alpha[\mathbf{M}] + \beta[\mathbf{K}] \tag{41}$$

  Es una hipótesis bastante razonable en dinámica estructural

- En este caso, los modos de vibración obtenidos para el problema sin amortiguamiento (matriz modal $[\mathbf{A}]$) también diagonalizan la matriz $[\mathbb{C}]$:

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{A}][\mathbf{C}][\mathbf{A}]^{\mathsf{T}} &= [\mathbf{C}_D] \\
\{\mathbf{a}_k\}^{\mathsf{T}}[\mathbf{C}]\{\mathbf{a}_l\} &= \alpha\{\mathbf{a}_k\}^{\mathsf{T}}[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_l\} + \beta\{\mathbf{a}_k\}^{\mathsf{T}}[\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_l\} \\
&= \begin{cases} C_k = \alpha M_k + \beta\omega_k^2 M_k & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}
\end{aligned} \tag{42}
$$

- En definitiva, para el amortiguamiento proporcional los modos de vibración $\{\mathbf{a}_k\}$ diagonalizan también las ecuaciones

$$
M_k\ddot{u}_k + C_k\dot{u}_k + \omega_k^2 M_k u_k = 0\,, \quad k = 1, 2 \ldots n \tag{43}
$$

Oscilaciones libres – Con amortiguamiento

- Como sabemos de las oscilaciones con 1 GDL, existe un valor crítico del amortiguamiento para que se produzcan vibraciones,

$$C_{k,\mathrm{crit}} = 2\sqrt{M_k K_k} = 2M_k\omega_k \tag{44}$$

- y, a partir de este valor, se puede definir la razón de amortiguamiento crítica $\zeta_k = C_k/C_{k,\mathrm{crit}}$:

$$C_k = \zeta_k C_{k,\mathrm{crit}} = 2\zeta_k M_k \omega_k \tag{45}$$

- por lo cual las ecuaciones desacopladas de 1 GDL para cada modo se pueden expresar

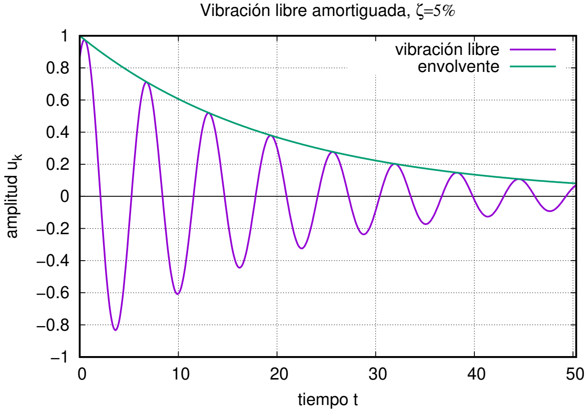
$$\boxed{M_k\ddot{u}_k + 2\zeta_k M_k\omega_k\dot{u}_k + \omega_k^2 M_k u_k = 0}, \quad k = 1, 2 \ldots n \tag{46}$$

Oscilaciones libres – Con amortiguamiento

- Las soluciones a las ecuaciones (46) son armónicas amortiguadas,

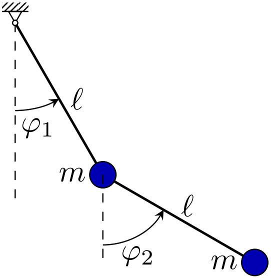
$$u_k(t) = B_k \mathrm{e}^{-\zeta_k \omega_k t} \cos(\omega_{k,D} t - \delta_k) \tag{47}$$

siendo $\omega_{k,D} = \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}$ la frecuencia propia con amortiguamiento



Índice

Péndulo doble – Secc 5.2.4 apuntes



Péndulo doble formado por masas puntuales m unidas por varillas sin masa de longitud ℓ

Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}m\ell^2\left[2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\right] + mg\ell(2\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2).$$

Ecuaciones de Lagrange:

$$0 = 2m\ell^2\ddot{\varphi}_1 + m\ell^2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\ddot{\varphi}_2 - m\ell^2\dot{\varphi}_2^2\,\mathrm{sen}(\varphi_2 - \varphi_1) + 2mg\ell\,\mathrm{sen}\,\varphi_1$$
$$0 = m\ell^2\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + m\ell^2\ddot{\varphi}_2 + m\ell^2\dot{\varphi}_1^2\,\mathrm{sen}(\varphi_2 - \varphi_1) + mg\ell\,\mathrm{sen}\,\varphi_2$$

Ecuaciones linealizadas despreciando términos de segundo orden:

$$0 = 2m\ell^2\ddot{\varphi}_1 + m\ell^2\ddot{\varphi}_2 + 2mg\ell\varphi_1$$
$$0 = m\ell^2\ddot{\varphi}_1 + m\ell^2\ddot{\varphi}_2 + mg\ell\varphi_2$$

- La expresión matricial de las ecuaciones es:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}$$

$$[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} 2m\ell^2 & m\ell^2 \\ m\ell^2 & m\ell^2 \end{pmatrix}; \quad [\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} 2mg\ell & 0 \\ 0 & mg\ell \end{pmatrix}.$$

- La ecuación característica resulta

$$\det([\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}]) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\left(\frac{g}{\ell} - \lambda\right)^2 - \lambda^2 = 0,$$

- cuyas soluciones son

$$\lambda_1 = (2 - \sqrt{2})\frac{g}{\ell}; \quad \lambda_2 = (2 + \sqrt{2})\frac{g}{\ell}.$$

Péndulo doble – Secc 5.2.4 apuntes

- A partir de éstas podemos calcular los vectores y frecuencias propias asociados a cada una, el resultado es:

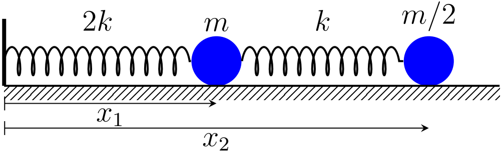
$$\omega_1 = \sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{\ell}}; \quad \{\mathbf{a}_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix};$$
$$\omega_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{\ell}}; \quad \{\mathbf{a}_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{Bmatrix}.$$

- Para estos modos las masas modales valen respectivamente

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} m\ell^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix} = m\ell^2(4+2\sqrt{2})$$
$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} m\ell^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{Bmatrix} = m\ell^2(4-2\sqrt{2}).$$

- EJERCICIO: Grabar video corto excitando cada uno de los modos de vibración por separado, mediante la configuración inicial $\mathbf{q}_0 = \mathbf{a}_k$

Péndulo doble – Sistema lineal



Sistema lineal de 2 gdl formado por sendas masas y resortes

$$V = \frac{1}{2}(2k)x_1^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{2}\dot{x}_2^2$$

Matriz de rigidez:

$$[\mathbf{K}] = [K_{ij}] = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}.$$

Matriz de masas:

$$[\mathbf{M}] = [M_{ij}] = \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j}\right]_{(0,0)} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m/2 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO: Obtener frecuencias y modos propios, así como masas modales

Modos propios de edificio a cortante

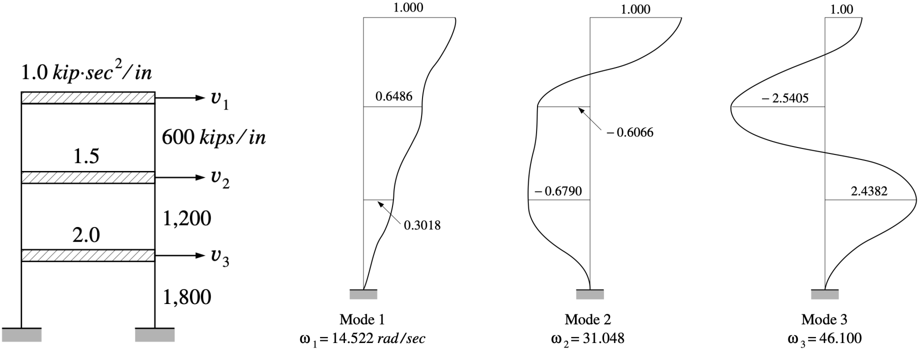


FIGURE E11-2
Vibration properties for the frame of Fig. E12-1.

Cita[6]

[6] *Dynamics of structures 3rd ed,* R.W. Clough, J. Penzien. Computers & Structures, Inc. California USA, 2003

Modos propios de una viga simple

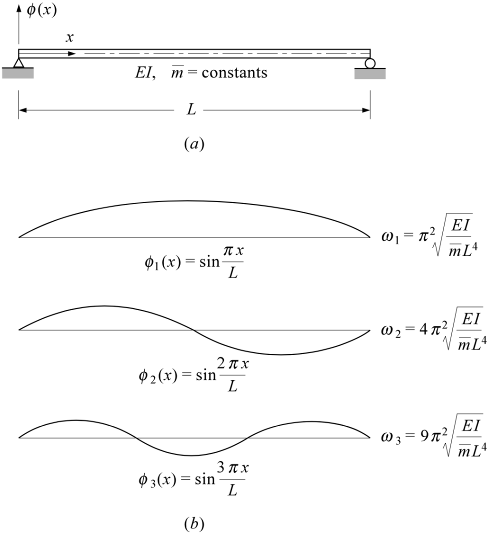


FIGURE E18-1
Simple beam-vibration analysis: (*a*) basic properties of simple beam; (*b*) first three vibration modes.

Modos propios de una ménsula

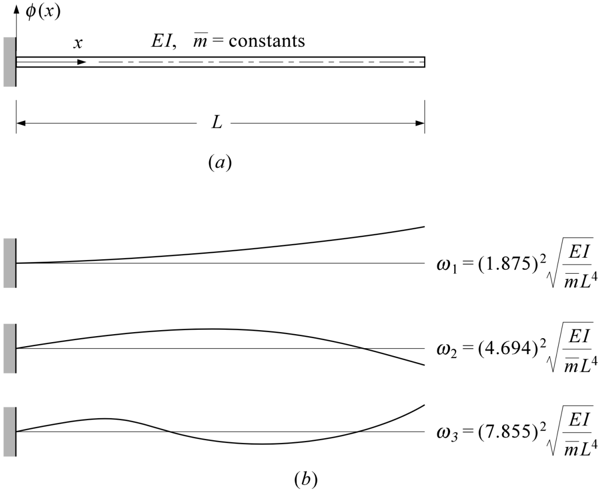


FIGURE E18-2
Cantilever-beam vibration analysis: (*a*) properties of cantilever beam; (*b*) first three vibration modes; (*c*) frequency equation terms.

Índice

Oscilaciones forzadas – Sin amortiguamiento

- Las ecuaciones de un sistema dinámico lineal con n GDL $\{\mathbf{q}\} = \{q_j\}$ sometido a fuerzas externas, sin amortiguamiento, son[7]:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{f}(t)\} \qquad \text{matricial} \qquad (48)$$

$$m_{ij}\ddot{q}_j + k_{ij}q_j = f_i(t) \qquad \text{índices} \qquad (49)$$

  donde $[\mathbf{M}]$ es la matriz de masa, $[\mathbf{K}]$ de rigidez, $\{\mathbf{f}(t)\}$ el vector de fuerzas aplicadas.

- Realizamos el desacoplamiento modal: partimos de la ecuación dinámica, hacemos el cambio a coordenadas normales $\{\mathbf{q}\} = [\mathbf{A}]^\mathsf{T}\{\mathbf{u}\}$, y premultiplicamos por la matriz modal $[\mathbf{A}]$:

$$[\mathbf{A}][\mathbf{M}][\mathbf{A}]^\mathsf{T}\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{A}][\mathbf{K}][\mathbf{A}]^\mathsf{T}\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{f}(t)\} \qquad (50)$$

- Las ecuaciones diagonalizadas resultan:

$$[\mathbf{M}_D]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}_D]\{\mathbf{u}\} = \{\boldsymbol{\eta}(t)\} \qquad (51)$$

[7] se emplea el convenio de suma implícita para índices repetidos

Oscilaciones forzadas – Sin amortiguamiento

- Teniendo en cuenta que la matriz modal $[\mathbf{A}]$ está formada por los vectores propios por filas ($\{\mathbf{a}_k\}^{\mathsf{T}}$), y que en la expresión anterior solo los términos de la diagonal no son nulos, considerando la contribución del modo k,

$$\underbrace{\{\mathbf{a}_k\}^{\mathsf{T}}[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\}}_{M_k}\ddot{u}_k + \underbrace{\{\mathbf{a}_k\}^{\mathsf{T}}[\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_k\}}_{\omega_k^2 M_k}u_k = \underbrace{\{\mathbf{a}_k\}^{\mathsf{T}}\{\mathbf{f}(t)\}}_{a_{kp}f_p(t)=\eta_k(t)} \qquad (52)$$

$$M_k\ddot{u}_k + \omega_k^2 M_k u_k = a_{kp}f_p(t) \qquad (53)$$

- Los términos $\eta_k(t)$ se denominan fuerzas modales

$$\eta_k(t) = a_{kp}f_p(t) = \{\mathbf{a}_k\}^{\mathsf{T}}\{\mathbf{f}(t)\}, \qquad (54)$$

  y pueden interpretarse como el producto escalar del vector de fuerzas $\{\mathbf{f}\}$ por cada modo de vibración $\{\mathbf{a}_k\}$
- resultan n ecuaciones desacopladas de 1 GDL

$$\boxed{\ddot{u}_k + \omega_k^2 u_k = \frac{1}{M_k}\eta_k(t)} \qquad k = 1, 2 \dots n \quad \text{(no sumado)} \qquad (55)$$

- Ejemplos: vector de fuerzas de signo uniforme, vector modal de signo uniforme

Oscilaciones forzadas – Sin amortiguamiento

- Un caso práctico importante es cuando las fuerzas aplicadas son de tipo armónico:

$$\{\mathbf{f}(t)\} = \{\mathbf{F}\} \operatorname{sen} \Omega t \tag{56}$$

donde $\{\mathbf{F}\}$ es un vector constante, y Ω la frecuencia de excitación[8].

- Desarrollando las fuerzas modales en este caso

$$\frac{1}{M_k}\eta_k(t) = \underbrace{\frac{1}{M_k}\{\mathbf{a}_k\}^{\mathsf{T}}\{\mathbf{F}\}}_{\Gamma_k} \operatorname{sen} \Omega t \tag{57}$$

- Γ_k se denominan coeficientes de participación modal, en función de los cuales las ecuaciones modales desacopladas son

$$\boxed{\ddot{u}_k + \omega_k^2 u_k = \Gamma_k \operatorname{sen} \Omega t} \tag{58}$$

[8] frecuencia angular, en rad/s

Oscilaciones forzadas – Sin amortiguamiento

- La solución de esta ecuación es la suma de la general de la homogénea y la particular de la completa:

$$u_k(t) = \underbrace{B_k \cos(\omega_k t - \delta_k)}_{u_k^h(t)} + \underbrace{D_k \operatorname{sen} \Omega t}_{u_k^p(t)} \tag{59}$$

- La solución de la homogénea $u_k^h(t)$ está acotada, con amplitud máxima B_k función de las condiciones iniciales
- La solución particular de la completa $u_k^p(t)$ se obtiene obligando a que cumpla la ecuación (58):

$$-D_k\Omega^2 \operatorname{sen} \Omega t + \omega_k^2 D_k \operatorname{sen} \Omega t = \Gamma_k \operatorname{sen} \Omega t \tag{60}$$

$$D_k\left(-\Omega^2 + \omega_k^2\right) \cancel{\operatorname{sen} \Omega t} = \Gamma_k \cancel{\operatorname{sen} \Omega t} \tag{61}$$

Oscilaciones forzadas – Sin amortiguamiento

- En definitiva, la amplitud de la solución permanente es

$$D_k = \frac{\Gamma_k}{\omega_k^2 - \Omega^2} \tag{62}$$

- cuyo valor tiende a ∞ cuando la frecuencia de excitación se aproxima a la frecuencia propia:

$$\lim_{\Omega \to \omega_k} D_k = \infty \tag{63}$$

- Este fenómeno se denomina resonancia: la fuerza de excitación se acopla con la vibración de uno de los modos propios, y en cada ciclo aumenta la energía del sistema, cuya amplitud de oscilación crecería teóricamente indefinidamente.
(En la práctica, debido al amortiguamiento o disipación, esta amplitud alcanza un máximo sin llegar a ∞)

Índice

Análisis por descomposición modal de torre ménsula

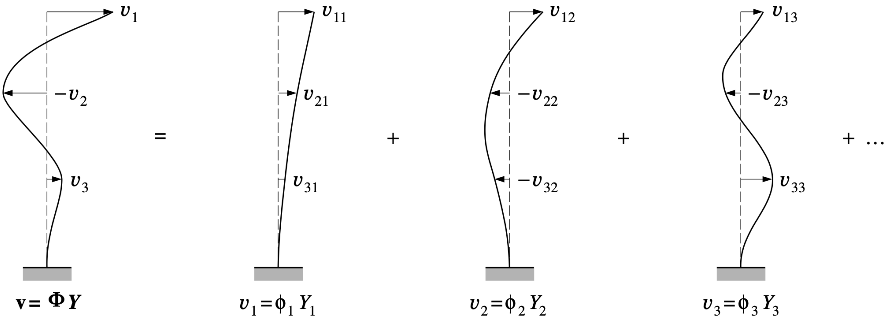


FIGURE 12-1
Representing deflections as sum of modal components.

NOTA: Correspondencia de notación:

- coordenadas $\mathbf{q} \equiv q_j \to \mathbf{v} \equiv v_j$,
- modos normales $\mathbf{a}_k \to \phi_k$,
- matriz modal $\mathbf{A} \to \mathbf{\Phi}^{\mathsf{T}}$,
- coordenadas normales $u_i \to Y_i$

Análisis por descomposición modal de viga

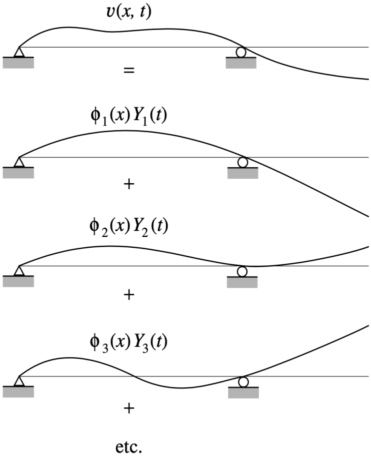
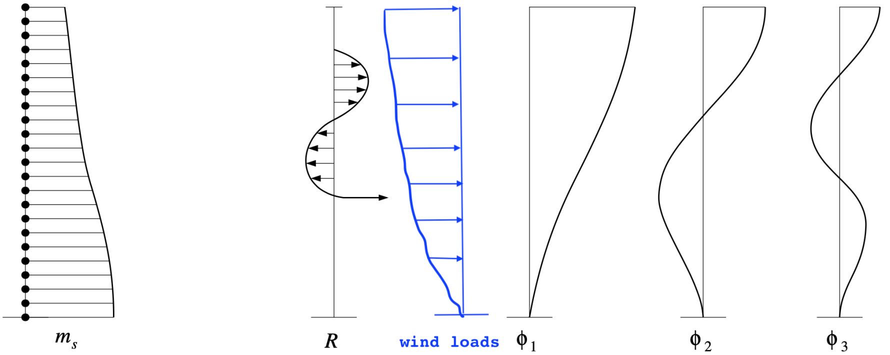


FIGURE 19-1
Arbitrary beam displacements represented by normal coordinates.

Nota: Correspondencia de notación:

- coordenadas $\mathbf{q} \equiv q_j \to \mathbf{v} \equiv v_j$,
- modos normales $\mathbf{a}_k \to \phi_k$,
- coordenadas normales $u_i \to Y_i$

Fuerzas y modos propios de edificio típico



(*a*) Story mass vector (*b*) Load distribution vector (*c*) Mode shapes

FIGURE 14-2
Mass and load distribution and vibration mode shapes for typical building.

NOTA: Correspondencia de notación:

- modos normales $\mathbf{a}_k \to \phi_k$,
- fuerzas $\mathbf{f} \to R$

Índice

Oscilaciones forzadas – Con amortiguamiento

- En la realidad siempre existe algún amortiguamiento, por pequeño que sea.
- El amortiguamiento en estructuras de obras civiles, en término de razón ζ respecto al crítico, es generalmente pequeño, entre $0{,}2\,\%$ y $5-10\,\%$
- En la ecuación incluimos un término de amortiguamiento viscoso y la diagonalización se realiza para la ecuación completa con los términos de amortiguamiento

$$[\mathbf{A}][\mathbf{M}][\mathbf{A}]^{\mathsf{T}}\{\ddot{\mathbf{u}}\}+[\mathbf{A}][\mathbf{C}][\mathbf{A}]^{\mathsf{T}}\{\dot{\mathbf{u}}\}+[\mathbf{A}][\mathbf{K}][\mathbf{A}]^{\mathsf{T}}\{\mathbf{u}\}=[\mathbf{A}]\{\mathbf{f}(t)\} \tag{64}$$

- Admitiendo que el amortiguamiento es proporcional (Rayleigh), también se diagonaliza la matriz de amortiguamiento. Las ecuaciones diagonalizadas (desacopladas) resultan:

$$[\mathbf{M}_D]\{\ddot{\mathbf{u}}\}+[\mathbf{C}_D]\{\dot{\mathbf{u}}\}+[\mathbf{K}_D]\{\mathbf{u}\}=\{\boldsymbol{\eta}(t)\} \tag{65}$$

Oscilaciones forzadas – Con amortiguamiento

- Desarrollando la ecuación (65) para el modo $\mathbf{a}_k$ (fila y columna k de $[\mathbf{A}]$ y $[\mathbf{A}]^\mathsf{T}$ respectivamente)

$$\underbrace{\{\mathbf{a}_k\}^\mathsf{T}[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\}}_{M_k}\ddot{u}_k + \underbrace{\{\mathbf{a}_k\}^\mathsf{T}[\mathbf{C}]\{\mathbf{a}_k\}}_{\alpha M_k + \beta\omega_k^2 M_k}\dot{u}_k + \underbrace{\{\mathbf{a}_k\}^\mathsf{T}[\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_k\}}_{\omega_k^2 M_k}u_k = \underbrace{\{\mathbf{a}_k\}^\mathsf{T}\{\mathbf{f}(t)\}}_{a_{kp}f_p(t)=\eta_k(t)} \quad (66)$$

- La ecuación desacoplada para el modo k resulta

$$M_k\ddot{u}_k + \underbrace{(\alpha + \beta\omega_k^2)}_{2\zeta_k\omega_k} M_k\dot{u}_k + \omega_k^2 M_k u_k = \eta_k(t) \quad (67)$$

- por lo cual la ecuación dinámica de 1 GDL para cada modo es[9]

$$\boxed{\ddot{u}_k + 2\zeta_k\omega_k\dot{u}_k + \omega_k^2 u_k = \frac{1}{M_k}\eta_k(t)} \quad k = 1, 2 \ldots n \quad (68)$$

[9] en estas expresiones ω_k es la frecuencia propia sin amortiguamiento

- Un caso práctico importante es cuando las fuerzas aplicadas son de tipo armónico:

$$\{\mathbf{f}(t)\} = \{\mathbf{F}\} \operatorname{sen} \Omega t \tag{69}$$

donde $\{\mathbf{F}\}$ es un vector constante, y Ω la frecuencia de excitación[10].

- Obteniendo las fuerzas modales en este caso

$$\frac{1}{M_k}\eta_k(t) = \underbrace{\frac{1}{M_k}\{\mathbf{a}_k\}^{\mathsf{T}}\{\mathbf{F}\}}_{\Gamma_k} \operatorname{sen} \Omega t \tag{70}$$

- Γ_k se denominan coeficientes de participación modal, en función de los cuales las ecuaciones modales desacopladas son

$$\boxed{\ddot{u}_k + 2\zeta_k \omega_k \dot{u}_k + \omega_k^2 u_k = \Gamma_k \operatorname{sen} \Omega t} \tag{71}$$

[10] frecuencia angular, en rad/s

Oscilaciones forzadas – Con amortiguamiento

- La solución de esta ecuación es la suma de la general de la homogénea y la particular de la completa:

$$u_k(t) = \underbrace{B_k \mathrm{e}^{-\zeta_k \omega_k t} \cos(\omega_{k,D} t - \delta_k)}_{u_k^h(t)} + \underbrace{D_k \operatorname{sen}(\Omega t + \alpha_k)}_{u_k^p(t)} \tag{72}$$

siendo $\omega_{k,D} = \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}$ la frecuencia propia con amortiguamiento

- La solución de la homogénea $u_k^h(t)$ es una función armónica amortiguada, ya deducida en la ecuación (47), que desaparece al cabo de suficiente tiempo. Las constantes (B_k, δ_k) se obtienen con las condiciones iniciales.
- La solución particular de la completa $u_k^p(t)$ se obtiene obligando a que cumpla la ecuación (71):

$$\begin{aligned} &- D_k \Omega^2 \operatorname{sen}(\Omega t + \alpha_k) + D_k \Omega \cos(\Omega t + \alpha_k) + \\ &\qquad + \omega_k^2 D_k (\operatorname{sen} \Omega t + \alpha_k) = \Gamma_k \operatorname{sen} \Omega t \end{aligned} \tag{73}$$

Oscilaciones forzadas – Con amortiguamiento

- Las constantes (D_k, α_k) se obtienen a partir de la ecuación (73), particularizando para dos instantes distintos $(t = 0, \Omega t + \alpha_k = 0)$. El resultado es, en función del parámetro $\beta_k = \Omega/\omega_k$:

$$\tan\alpha_k = -\frac{\Gamma_k/(\omega_k^2 M_k)}{2\zeta_k\beta_k} \tag{74}$$

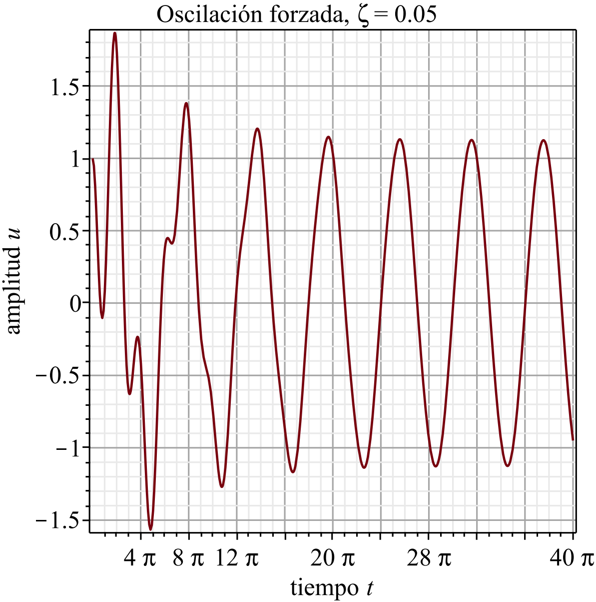
$$D_k = \frac{\Gamma_k/(\omega_k^2 M_k)}{\sqrt{(1-\beta_k^2)^2 + 4\zeta_k^2\beta_k^2}} \tag{75}$$

- Se denomina resonancia cuando la amplitud D_k alcanza un valor muy elevado, aunque a diferencia del caso sin amortiguamiento, no tiende a infinito. El máximo en función de la frecuencia de excitación Ω se puede obtener derivando la expresión (75), resultando:

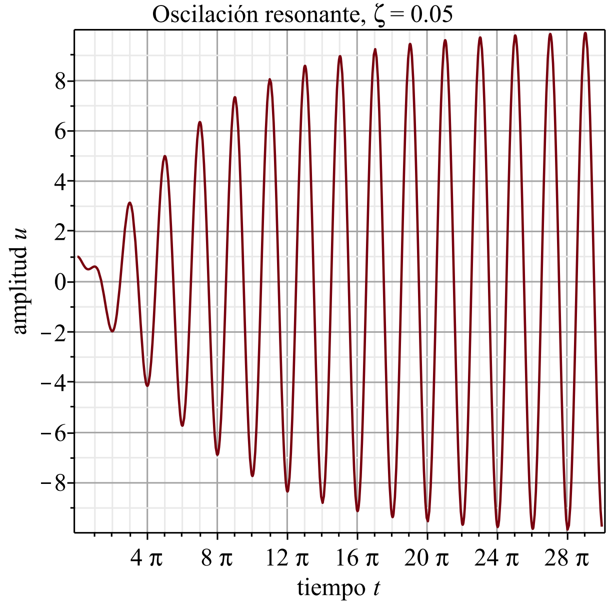
$$\Omega_{k,\text{reson}} = \omega_k\sqrt{1-2\zeta_k^2} \quad \Rightarrow \quad D_{k,\text{reson}} = \frac{\Gamma_k/(\omega_k^2 M_k)}{2\zeta_k\sqrt{1-\zeta_k^2}}$$

Índice

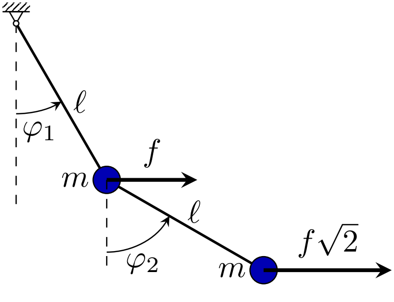
Oscilación forzada no resonante



Oscilación forzada resonante



Péndulo doble con fuerzas



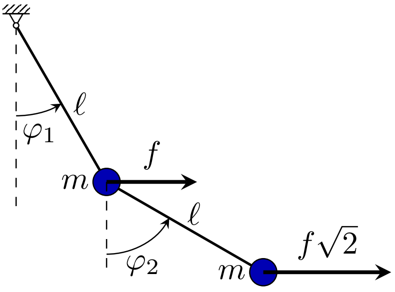
Al péndulo del problema anterior le aplicamos ahora unas fuerzas, con $f =$ cte. En las ecuaciones deben intoducirse las fuerzas generalizadas asociadas a las coordenadas (φ_1, φ_2). Desarrollando el trabajo virtual,

$$\begin{aligned} \delta W &= f\ell\cos\varphi_1\,\delta\varphi_1 \\ &\quad + f\sqrt{2}(\ell\cos\varphi_1\,\delta\varphi_1 + \ell\cos\varphi_2\,\delta\varphi_2) \\ &= f\ell\cos\varphi_1(1+\sqrt{2})\delta\varphi_1 + f\ell\sqrt{2}\cos\varphi_2\,\delta\varphi_2 \end{aligned}$$

Identificando coeficientes y particularizando para las ecuaciones linealizadas en $(\varphi_1, \varphi_2) = (0, 0)$ resulta

$$\{\mathbf{f}\} = \begin{Bmatrix} f\ell(1+\sqrt{2}) \\ f\ell\sqrt{2} \end{Bmatrix} \tag{76}$$

Péndulo doble con fuerzas



Las fuerzas modales son

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} f\ell(1+\sqrt{2}) \\ f\ell\sqrt{2} \end{Bmatrix} = f\ell(3+\sqrt{2}) \tag{77}$$

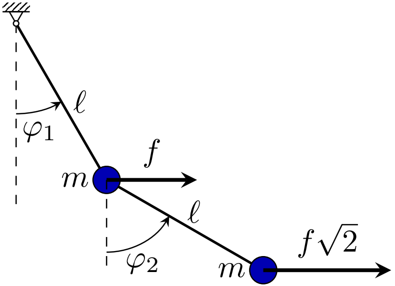
$$\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} f\ell(1+\sqrt{2}) \\ f\ell\sqrt{2} \end{Bmatrix} = f\ell(-1+\sqrt{2}) \tag{78}$$

y las ecuaciones dinámicas de cada modo resultan

$$\ddot{u}_1 + (2-\sqrt{2})\frac{g}{\ell}u_1 = \frac{f\ell(3+\sqrt{2})}{m\ell^2(4+2\sqrt{2})} \tag{79}$$

$$\ddot{u}_2 + (2+\sqrt{2})\frac{g}{\ell}u_2 = \frac{f\ell(-1+\sqrt{2})}{m\ell^2(4-2\sqrt{2})} \tag{80}$$

Péndulo doble con fuerzas y amortiguamiento



$$\{\mathbf{f}\} = \begin{Bmatrix} f\ell(1+\sqrt{2}) \\ f\ell\sqrt{2} \end{Bmatrix} \tag{81}$$

EJERCICIO: desarrollar las ecuaciones del mismo ejemplo suponiendo que hay un amortiguamiento proporcional de valor $[\mathbf{C}] = \beta[\mathbf{K}]$

Los coeficientes de amortiguamiento diagonalizados y razones críticas son

$$C_{\{1,2\}} = \beta\omega^2_{\{1,2\}} M_{\{1,2\}}\,; \quad \zeta_{\{1,2\}} = \frac{C_{\{1,2\}}}{2\omega_{\{1,2\}} M_{\{1,2\}}} = \frac{\beta}{2}\omega_{\{1,2\}} \tag{82}$$

y las ecuaciones dinámicas de cada modo resultan

$$\ddot{u}_1 + \beta(2-\sqrt{2})\frac{g}{\ell}\dot{u}_1 + (2-\sqrt{2})\frac{g}{\ell}u_1 = \frac{f\ell(3+\sqrt{2})}{m\ell^2(4+2\sqrt{2})} \tag{83}$$

$$\ddot{u}_2 + \beta(2+\sqrt{2})\frac{g}{\ell}\dot{u}_2 + (2+\sqrt{2})\frac{g}{\ell}u_2 = \frac{f\ell(-1+\sqrt{2})}{m\ell^2(4-2\sqrt{2})} \tag{84}$$