4. Oscilaciones lineales con 1 grado de libertad

MECÁNICA

Grado de Ingeniería Civil

José M.ª Goicolea

Grupo de Mecánica Computacional
Escuela de Ingenieros de Caminos,
Universidad Politécnica de Madrid

28 de febrero de 2022

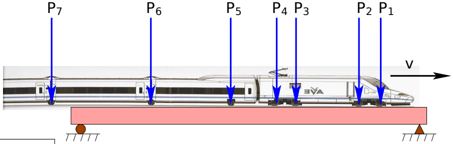
POLITÉCNICA

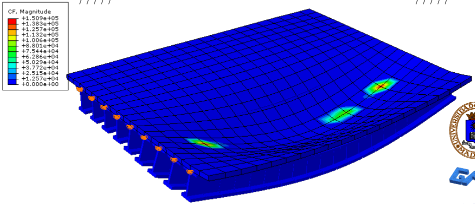
Índice

Índice

Oscilaciones en las estructuras

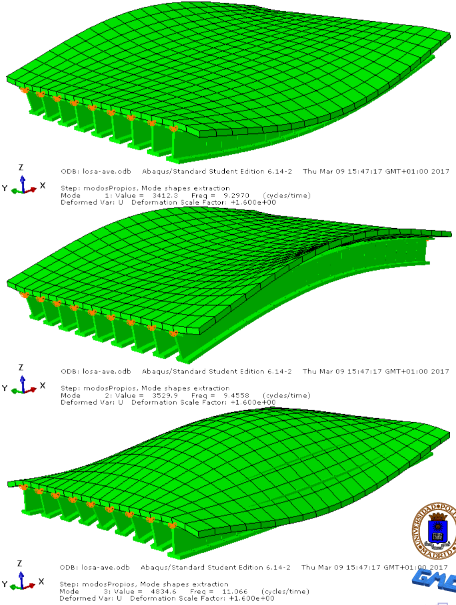
- El estudio de las vibraciones en las estructuras es importante para garantizar:
  - Su funcionalidad
  - El comfort de los usuarios o pasajeros
  - La resistencia y seguridad estructural
- El cálculo dinámico es más importante hoy día por
  - Mayores requisitos y exigencias
  - Cargas más veloces con mayor efecto dinámico
  - Estructuras más esbeltas y ligeras





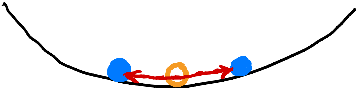
En la realidad los sistemas no tienen un único gdl sino varios. Sin embargo el estudio de oscilaciones en sistemas con 1 gdl es importante por:

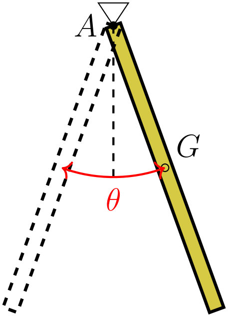
- Permite introducir y analizar los conceptos y fenómenos básicos
- Un caso general con n gdl se puede descomponer en modos de vibración independientes de 1 gdl (análisis modal)
- A menudo hay un modo de vibración fundamental que permite un modelo simplificado con un solo gdl



Oscilaciones pequeñas

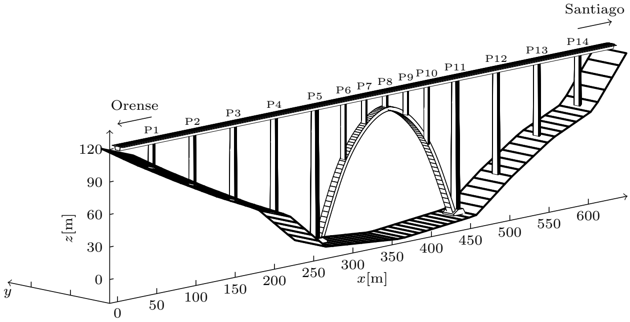
- Estudiaremos las oscilaciones alrededor de una posición de equilibrio estable, por lo que supondremos:
    - Existe una posición de equilibrio estable, con un mínimo de potencial
    - Consideramos pequeñas oscilaciones alrededor de dicha posición, que supongan fuerzas de recuperación lineales

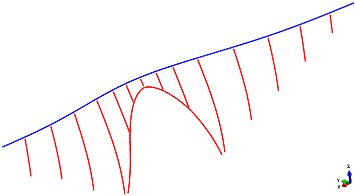


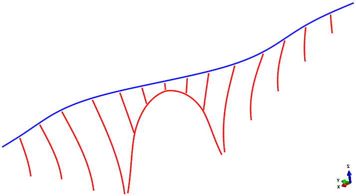


Oscilaciones pequeñas en estructuras

Las hipótesis de equilibrio estable y pequeñas oscilaciones se cumplen en la mayor parte de los casos de vibraciones en estructuras



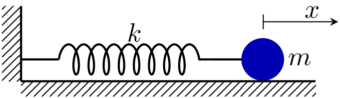




Índice

Ecuación

- Consideramos un resorte lineal, con elongación definida por x. Supondremos vibraciones libres, sin fuerzas exteriores aplicadas.



- Supondremos la posición natural en $x_0 = 0$ [1], sin pérdida de generalidad.
- La única fuerza (interna) es por la recuperación del resorte, que vale

$$F = -kx$$

- La ecuación del movimiento es por tanto

$$m\ddot{x} = -kx \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{x} + kx = 0} \tag{1}$$

- Se trata de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, lineal, de coeficientes constantes, homogénea.

[1] La posición natural es aquella en que la fuerza del resorte es nula

Índice

Energía

- La fuerza del muelle es conservativa, asociada a un potencial $V(x)$. este se calcula integrando el trabajo realizado:

$$V = -\int_0^x F\,\mathrm{d}x = -\int_0^x (-kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx^2.$$

- Al ser la fuerza conservativa, la energía total se conserva,

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{(cte.)} \tag{2}$$

- Para los máximos de la elongación es $\dot{x} = 0$, sustituyendo en (2):

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2. \tag{3}$$

siendo la constante A la elongación máxima.

- Podemos interpretar que en los puntos de elongación máxima toda la energía es potencial ($V_{\text{max}} = \frac{1}{2}kA^2$), mientras que en los puntos de elongación nula toda la energía es cinética ($T_{\text{max}} = \frac{1}{2}kA^2$).

Índice

Integración

- A partir de (3), despejando y separando variables:

$$\dot{x}^2 = \frac{k}{m}(A^2 - x^2) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{k}{m}}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A^2 - x^2}}.$$

- Integrando cada miembro de forma independiente

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{A}, \tag{4}$$

donde φ es una constante de integración.

- Definimos la frecuencia propia ω_0 como

$$\boxed{\omega_0 \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{k}{m}}} \tag{5}$$

- Despejando x en (4) resulta la ecuación del movimiento:

$$\boxed{x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi)} \tag{6}$$

Movimiento armónico

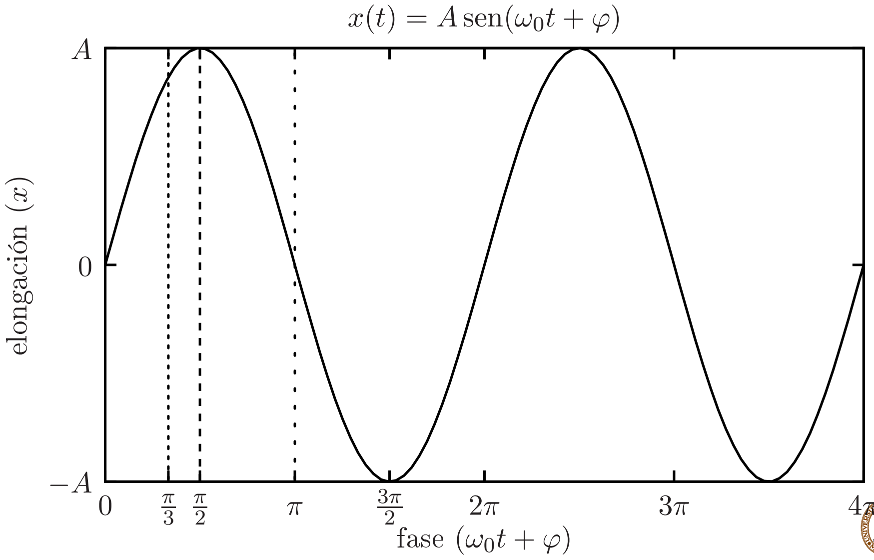


Figura: *Oscilación armónica en vibraciones libres*

Parámetros del sistema / movimiento

Parámetros

- Frecuencia (angular) propia o pulsación: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ [rad/s]
- Frecuencia (circular) propia: $f_0 = \omega_0/(2\pi)$ [Hz]
- Periodo: $T = 1/f_0 = 2\pi/\omega_0$ [s]
- Amplitud de la oscilación: A [m] (longitud)
- Ángulo de fase inicial: φ [rad] (adimensional)

- Las constantes (A, φ) se determinan con las condiciones iniciales $(x_0, \dot{x}_0)$. Particularizando en (6):

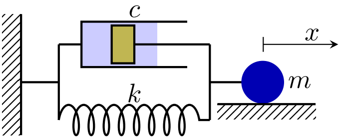
$$x_0 = A \operatorname{sen}\varphi; \quad \dot{x}_0 = A\omega_0 \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = \dfrac{x_0}{\operatorname{sen}\varphi} \\ \varphi = \tan^{-1}\left(\dfrac{\omega_0 x_0}{\dot{x}_0}\right) \end{cases}$$

- Ejemplo: suponiendo $(x_0 = a, \dot{x}_0 = 0)$, resulta

$$A = a, \ \varphi = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad x(t) = a \operatorname{sen}(\omega_0 t + \pi/2) = a \cos(\omega_0 t)$$

Índice

Ecuación



- Se considera un amortiguador viscoso, cuya fuerza es proporcional a la velocidad, $F_A = -c\dot{x}$, en sentido contrario.
- F_A es una resistencia pasiva, no conservativa: Para cualquier trayectoria cerrada el trabajo es esencialmente negativo, disipa energía:

$$W_A = \oint (-c\frac{dx}{dt})\,\mathrm{d}x = \oint (-c\dot{x}^2)\,\mathrm{d}t < 0.$$

- La fuerza total sobre m es ahora

$$F = -c\dot{x} - kx,$$

- resultando la ecuación:

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0} \tag{7}$$

que sigue siendo una ecuación diferencial de segundo orden, lineal, de coeficientes constantes y homogénea.

Índice

Integración

- Para obtener la solución emplearemos de forma auxiliar variable compleja y la exponencial imaginaria. La fórmula de Euler expresa
$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$
- Para una constante imaginaria general $r = p + i\theta \in \mathbb{C}$:
$$\mathrm{e}^{r} = \mathrm{e}^{p+i\theta} = \mathrm{e}^{p}\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{p}(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$
- Supondremos una solución general
$$x(t) = C\mathrm{e}^{rt}\,, \text{ con } C, r \in \mathbb{C}$$
- Las derivadas son
$$\dot{x} = rC\mathrm{e}^{rt}\,, \quad \ddot{x} = r^2 C\mathrm{e}^{rt}$$
- Sustituyendo en la ecuación (7), resulta
$$(mr^2 + cr + k)\mathrm{e}^{rt} = 0 \quad \Rightarrow \quad mr^2 + cr + k = 0. \tag{8}$$

(ecuación característica)

Integración

- El tipo de movimiento depende de la solución de la ecuación característica

$$mr^2 + cr + k = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} \tag{9}$$

- Estas soluciones dependen del signo del discriminante $(c^2 - 4km)$

a) $c^2 - 4km > 0$ (amortiguamiento supercrítico).

  - En este caso existen dos raíces reales para r en (9), ambas negativas:

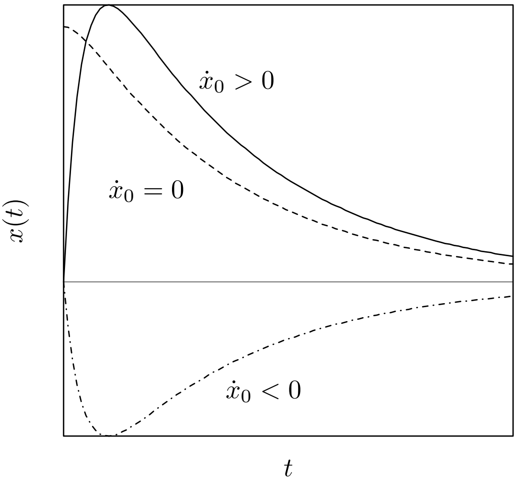
$$r_1 = -p, \quad r_2 = -q.$$

  - La solución general será una combinación lineal:

$$x(t) = a_1 \mathrm{e}^{-pt} + a_2 \mathrm{e}^{-qt}.$$

- Se trata de una solución exponencial decreciente, no oscilatoria.

Integración



Movimiento de un sistema definido por la ecuación $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$*, con amortiguamiento supercrítico* $(c > 2\sqrt{km})$*, bajo distintas condiciones iniciales:*

Caso I) $\dot{x}_0 > 0$*,*
Caso II) $\dot{x}_0 = 0$*,*
Caso III) $\dot{x}_0 < 0$*.*

Integración

b) $c^2 - 4km = 0$ (amortiguamiento crítico).

- En este caso existen una raíz real doble, negativa:

$$r = -\frac{c}{2m}$$

- correspondiendo a las soluciones $x(t) = a\mathrm{e}^{-pt}$ y $x = bt\mathrm{e}^{-pt}$. La solución general será una combinación de estas dos:

$$x = (a + bt)\mathrm{e}^{-pt}$$

- Se trata de una solución dominada por la exponencial decreciente, no oscilatoria.

Integración

c) $c^2 - 4km < 0$ (amortiguamiento subcrítico).

- Se obtienen en este caso dos raíces complejas conjugadas para (8),

$$r_1 = -p + \omega i, \quad r_2 = -p - \omega i,$$

- siendo

$$p = \frac{c}{2m}, \quad \omega = \sqrt{-\frac{c^2}{4m^2} + \frac{k}{m}}.$$

- La parte real de la solución es negativa, dando lugar a una exponencial decreciente, que multiplica a una función armónica:

$$\begin{aligned} x &= a_1 \mathrm{e}^{(-p+i\omega)t} + a_2 \mathrm{e}^{(-p-i\omega)t} = \mathrm{e}^{-pt}(a_1 \mathrm{e}^{i\omega t} + a_2 \mathrm{e}^{-i\omega t}) \\ &= \mathrm{e}^{-pt}[(a_1 + a_2)\cos\omega t + i(a_1 - a_2)\operatorname{sen}\omega t] \end{aligned}$$

- Denominando $B = a_1 + a_2$, $A = i(a_1 - a_2)$, ambas reales, resulta

$$\boxed{x = \mathrm{e}^{-pt}(A \operatorname{sen}\omega t + B\cos\omega t)} \qquad (10)$$

- Esta solución sí es de tipo oscilatorio.

Integración

c) $c^2 - 4km < 0$ (amortiguamiento subcrítico)

- Otra forma equivalente de expresar esta solución es mediante el cambio de las constantes (A, B) a otras (a, φ) definidas por:

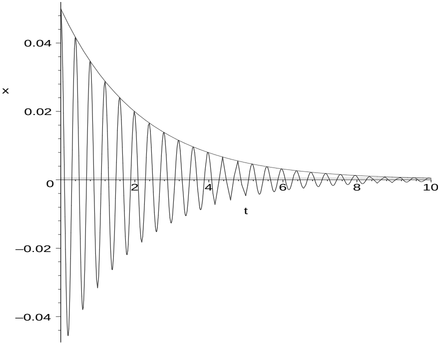
$$A = a\cos\varphi; \quad B = a\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$

- resultando la expresión

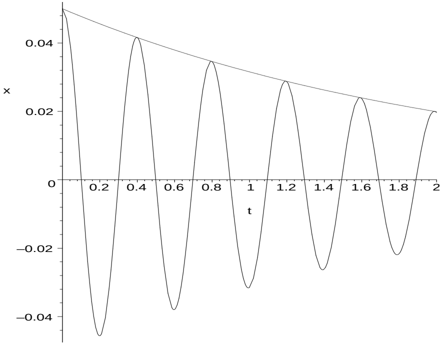
$$\boxed{x = a\,\mathrm{e}^{-\frac{c}{2m}t}\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi), \quad \text{con } \omega \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}.} \tag{11}$$

- La expresión (11) representa un movimiento oscilatorio amortiguado de amplitud decreciente $(a\mathrm{e}^{-pt})$, al estar modulado por una exponencial negativa.

Integración



(a)



(b)

Ejemplo de oscilaciones con amortiguamiento
(a) Gráfica para $t \in [0, 10]$*;*
(b) Detalle de la gráfica para $t \in [0, 2]$*, en la que se aprecian mejor las oscilaciones amortiguadas;*

Integración

Parámetros

- (pseudo-)frecuencia propia del sistema amortiguado:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1 - \frac{c^2}{4km}} \\ = \omega_0\sqrt{1-\xi^2} \qquad (12)$$

- Tasa de amortiguamiento crítico: $\xi \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{c}{c_{\text{crit}}}$, con $c_{\text{crit}} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_0$. (en vibraciones estructurales $\xi \ll 1$)

- En función de estos parámetros, la ecuación diferencial (7) se escribe

$$\boxed{\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0} \qquad (13)$$

- mientras que la solución (11) se expresa como

$$\boxed{x(t) = a\mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)} \qquad (14)$$

Medida del amortiguamiento

- El amortiguamiento se puede medir mediante el decremento logarítmico, que se puede relacionar con la tasa de amortiguamiento crítico.
- Se obtiene primero la razón de amplitud entre dos ciclos consecutivos:

$$\frac{a\mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}}{a\mathrm{e}^{-\xi\omega_0(t+T)}} = \mathrm{e}^{\xi\omega_0 T}$$

- Se define como el logaritmo Neperiano de esta razón:

$$\begin{aligned}\delta = \log\left(\mathrm{e}^{\xi\omega_0 T}\right) &= \xi\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} = 2\pi\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \\ &\approx 2\pi\xi \quad (\text{para } \xi \ll 1)\end{aligned} \tag{15}$$

Oscilaciones libres con amortiguamiento

Condiciones iniciales

- Las condiciones iniciales $(x_0, v_0 = \dot{x}_0)$ permiten definir las constantes del movimiento (a, φ) en la ecuación del movimiento (14):

$$x(t) = a\mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}\operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

- Sustituyendo en la ecuación:

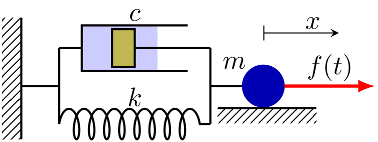
$$\begin{cases} x_0 = a \operatorname{sen}\varphi \\ v_0 = a(-\xi\omega_0 \operatorname{sen}\varphi + \omega\cos\varphi) \end{cases}$$

- Resolviendo estas dos ecuaciones se obtienen las constantes (a, φ).

$$\tan\varphi = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi + v_0/(x_0\omega_0)}\,; \quad a = \frac{x_0}{\operatorname{sen}\varphi}$$

Índice

Oscilaciones forzadas – Integración



Suponemos que actúa una fuerza externa $f(t)$; La ecuación es:

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)} \tag{16}$$

(ecuación diferencial no homogénea)

- Veamos la estructura de la solución; sean dos soluciones cualesquiera $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de (16):

$$m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + x_2 = f(t),$$
$$m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + x_1 = f(t);$$

- Restando término a término,

$$m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) = 0.$$

- Por tanto su diferencia, $x_h(t) = x_2(t) - x_1(t)$, es solución de la ecuación homogénea (7), para vibraciones libres.

- Esto permite expresar la solución general de la ecuación como una solución particular $x_p(t)$ de la misma, [2] más la solución general de la homogénea $x_h(t)$:

$$\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p(t)} \tag{17}$$

- La solución general de la homogénea $x_h(t)$ corresponde a las vibraciones libres, que ya sabemos calcular, ver ecuación (14)
- El problema se limita pues a calcular una solución particular $x_p(t)$ de la ecuación completa (16).
- Consideraremos a continuación varios casos particulares de interés.

[2] que ya veremos cómo se puede hallar

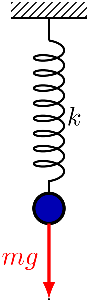
Oscilaciones forzadas – Integración

a) Fuerza constante, $f(t) = D$

- Puede corresponder a una fuerza estática, si su aplicación ha sido lenta, o a una función escalón dinámica, en el caso en que sea súbita.
- La solución particular es otra constante[3]

$$x_p = \frac{D}{k}$$

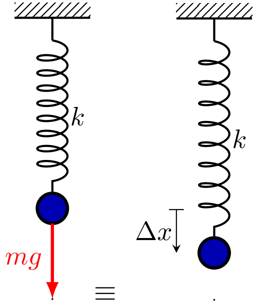
Ejemplos: un muelle en posición vertical sujeto a la gravedad, o la fuerza de rozamiento durante el intervalo en que no cambia de signo (supuesta la reacción normal constante).



[3] La comprobación es inmediata, al ser $\dot{x}_p = \ddot{x}_p = 0$.

a) Fuerza constante, $f(t) = D$

- Por otra parte, llamando $\Delta x = D/k$ (cte.), la adición de una solución $x_p = \Delta x$ puede interpretarse también como una simple traslación del origen de coordenadas, $x'(t) = x(t) - \Delta x = x_h(t)$.
- De esta forma el movimiento puede describirse como una oscilación libre alrededor de un nuevo origen de coordenadas, trasladado Δx.

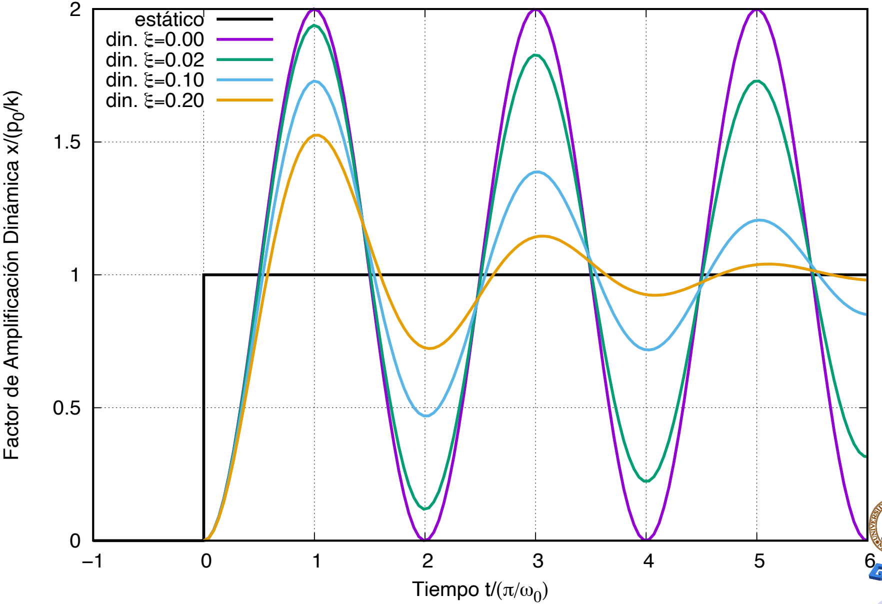


- Esta puede ser la interpretación, por ejemplo, de una masa m colgando de un resorte de constante k en dirección vertical, sometida a su propio peso (mg).
- El movimiento puede estudiarse como una oscilación libre alrededor del punto de equilibrio, situado la distancia $\Delta x = mg/k$ por debajo del punto de longitud natural del muelle.

Factor de Amplificación Dinámica

- Consideramos la respuesta a una carga P_0. La solución estática es
$$x_{\text{est}} = \frac{P_0}{k} \tag{18}$$
- Si la carga se aplica de forma súbita y después se mantiene constante, la solución dinámica es
$$x_{\text{din}}(t) = \frac{P_0}{k} - \frac{P_0/k}{\sqrt{1-\xi^2}} \mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi). \tag{19}$$
- Se define el Factor de Amplificación Dinámica como
$$\text{FAD} = \frac{x_{\text{din,max}}}{x_{\text{est}}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi).$$
- La amplificación máxima se produce para el sistema sin amortiguamiento $\xi = 0$; en este caso el desplazamiento máximo se produce para $\omega_0 t = \pi$, y resulta
$$x_{\text{din,max}} = 2\frac{P_0}{k} \quad \Rightarrow \quad \text{FAD} = 2$$

Ejemplo: FAD para carga instantánea constante



b) Fuerza lineal, $f(t) = Et$

- Se trata de una fuerza que aumenta o disminuye linealmente con el tiempo.
- Tanteamos la solución $x_p = mt + n$, también lineal. Considerando $\dot{x}_p = m, \ddot{x}_p = 0$ y sustituyendo en (16) se obtienen m y n:

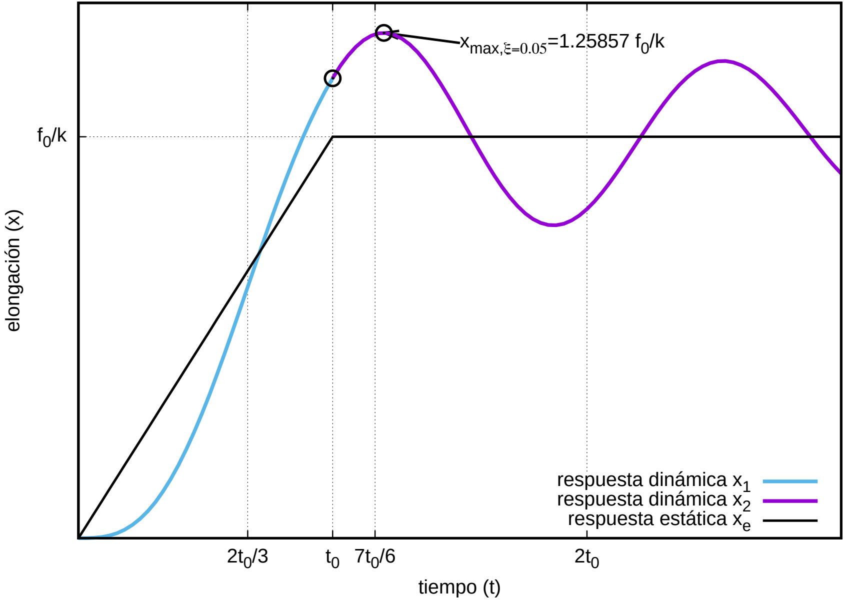
$$cm + k(mt + n) = Et \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m = E/k \\ n = -cE/k^2, \end{cases}$$

- por lo que resulta

$$x_p = \frac{E}{k}\left(t - \frac{c}{k}\right)$$

- Como ejemplo, este caso sirve para estudiar la respuesta a una rampa para aplicación gradual de una fuerza que después se mantenga constante

Ejemplo – FAD con Rampa lineal de carga



c) Fuerza armónica, $f(t) = q \operatorname{sen} \Omega t$.

- Este caso tiene especial importancia, ya que no sólo sirve para una fuerza armónica en sí misma, sino que servirá también como base para calcular la solución frente a una carga cualquiera, mediante el desarrollo en serie de Fourier
- Tanteamos una solución que sea igualmente armónica, con la misma frecuencia que la excitación, pero admitiendo un posible desfase δ respecto de la carga aplicada:

$$x_p(t) = A \operatorname{sen}(\Omega t + \delta) \tag{20}$$

- Derivando $(\dot{x}_p, \ddot{x}_p)$ y sustituyendo en (16):

$$(k - m\Omega^2) \operatorname{sen}(\Omega t + \delta) + c\Omega \cos(\Omega t + \delta) = \frac{q}{A} \operatorname{sen} \Omega t,$$

- Particularizando para dos valores distintos de t se calcula A y δ:
  1. para $\underline{t = 0}$,
  $$(k - m\Omega^2) \operatorname{sen} \delta + c\Omega \cos \delta = 0,$$
  y despejando δ,
  $$\boxed{\tan \delta = -\frac{c\Omega}{k - m\Omega^2} = -\frac{2\xi\omega_0\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}} \qquad (21)$$
  2. para $\underline{\Omega t + \delta = 0}$,
  $$c\Omega = \frac{q}{A} \operatorname{sen}(-\delta) \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = -\frac{q}{c\Omega} \operatorname{sen} \delta}$$

- Desarrollando la expresión de $\operatorname{sen}\delta$:

$$\operatorname{sen}\delta = \frac{\tan\delta}{\pm\sqrt{1+\tan^2\delta}} = \frac{-c\Omega}{\pm\sqrt{(k-m\Omega^2)^2+c^2\Omega^2}} \tag{22}$$

- resultan finalmente las expresiones siguientes para A:

$$A = \frac{q}{\pm\sqrt{(k-m\Omega^2)^2+c^2\Omega^2}} = \frac{q/m}{\pm\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\xi^2\Omega^2\omega_0^2}}. \tag{23}$$

- Los parámetros A y δ definen la solución particular x_p (20), y dependen únicamente de los parámetros del sistema (no dependen de las condiciones iniciales).

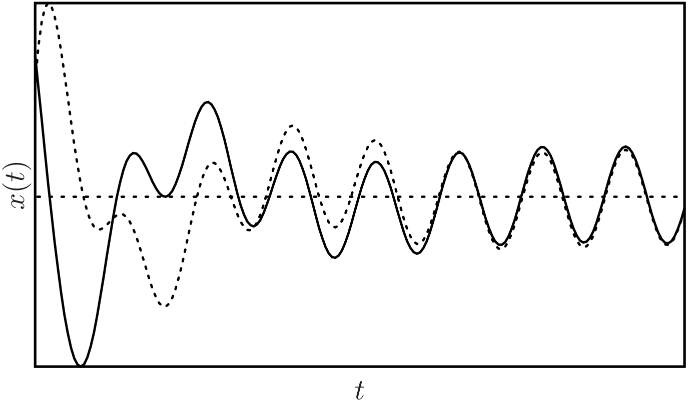
- Una vez conocidos A y δ es posible escribir la solución general de la ecuación completa (16) que resulta:

$$\boxed{x(t) = \underbrace{a\mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)}_{\text{sol. gral. homogénea, } x_h(t)} + \underbrace{A \operatorname{sen}(\Omega t + \delta)}_{\text{sol. part. completa, } x_p(t)}} \tag{24}$$

- En esta expresión (24) quedan tan sólo por determinar los parámetros a y φ, que se obtendrán particularizando las condiciones iniciales.
- Teniendo en cuenta que al cabo del tiempo la solución general de la homogénea desaparece, $x_h(t) \to 0$, se puede diferenciar dos etapas del movimiento:
  1. Régimen transitorio, en el cual $x_h(t)$ es significativo, y coexisten en la respuesta la frecuencia propia del sistema ω y la de la excitación Ω.
  2. Régimen permanente, cuando se puede despreciar $x_h(t)$, quedando sólo $x_p(t)$, y la respuesta sólo contiene la frecuencia de la excitación Ω.

Régimen transitorio y permanente

El régimen permanente no depende de las condiciones iniciales, como se comprueba fácilmente a partir de la ecuación (24)



Movimiento oscilatorio forzado, para dos condiciones iniciales distintas; al cabo de cierto tiempo, el régimen permanente es el mismo.

Índice

Resonancia

- La amplitud A del régimen permanente (23), se puede expresar como

$$A = \frac{q/k}{\sqrt{\left(1-(\Omega/\omega_0)^2\right)^2 + \left(2\xi\Omega/\omega_0\right)^2}} \tag{25}$$

- Para el caso sin amortiguamiento ($\xi = 0$), particularizando (25)

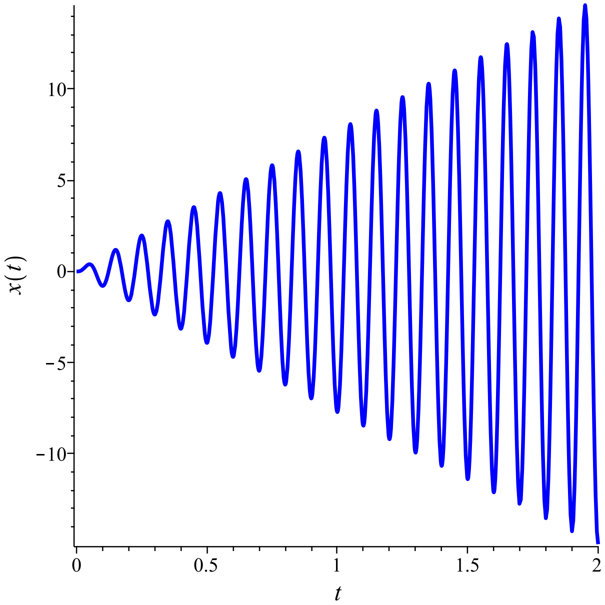
$$A = \frac{q/k}{1-(\Omega/\omega_0)^2}$$

- Para $\Omega \to \omega_0$ se obtendría una amplitud teóricamente infinita:

$$A = \frac{q/k}{1-(\Omega/\omega_0)^2} \underset{\Omega\to\omega_0}{\longrightarrow} \infty \qquad \text{¡resonancia!}$$

- Físicamente la resonancia corresponde a un acoplamiento entre la excitación periódica y la oscilación del sistema, con un aporte positivo de energía en cada ciclo

Resonancia – ejemplo $\xi \approx 0$



- La energía del sistema y su amplitud crecen linealmente con t
- En el caso teórico la amplitud llegaría a ∞; en la práctica el sistema se fractura o colapsa en cierto instante.

Resonancia

- En un caso general con $\xi \neq 0$ la resonancia es cuando se produce el máximo de la amplitud $A(\Omega)$ en (25). Esto se puede obtener como el mínimo del radicando en el denominador

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Omega}\left[\left(1 - (\Omega/\omega_0)^2\right)^2 + \left(2\xi\Omega/\omega_0\right)^2\right] \tag{26}$$

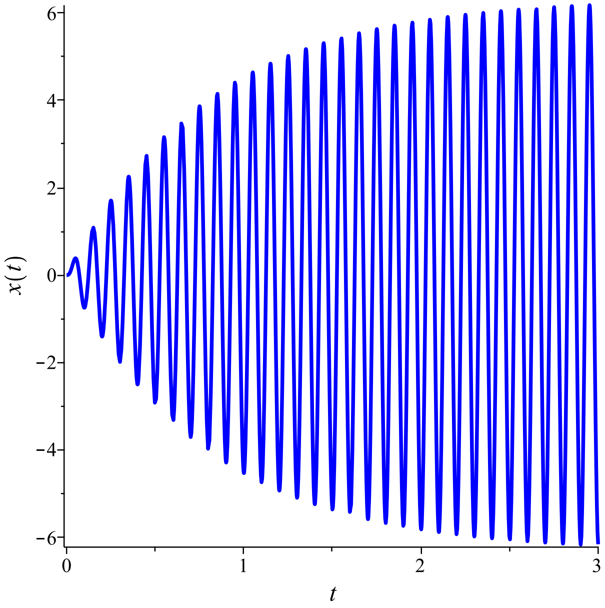
- lo que se produce para la frecuencia resonante

$$\frac{\Omega}{\omega_0} = \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2\xi^2}}$$

  Para amortiguamiento pequeño $\xi \ll 1$ es muy similar a la frecuencia propia del sistema: $\Omega_r \approx \omega = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2} \approx \omega_0$
- La amplitud resonante se obtiene sustituyendo Ω_r en (23):

$$\boxed{A_r = A(\Omega_r) = \frac{q}{c\omega} = \frac{q/k}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}} \tag{27}$$

Resonancia – ejemplo $\xi = 0{,}02$



- La amplitud A crece linealmente con t hasta que llega a un valor límite A_r en el régimen permanente
- El máximo A_r es aproximadamente inversamente proporcional a ξ