2. Dinámica Analítica

MECÁNICA

Grado de Ingeniería Civil

José M.ª Goicolea

Grupo de Mecánica Computacional
Escuela de Ingenieros de Caminos,
Universidad Politécnica de Madrid

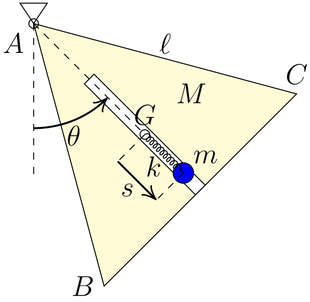
14 de febrero de 2022

POLITÉCNICA

Índice

Índice

- Para desarrollar de forma sistemática las ecuaciones que resultan del Principio de Trabajos Virtuales / Principio de D'Alembert es necesario parametrizar los desplazamientos virtuales $\delta \boldsymbol{r}_i$
- **Definición:**
  Se denominan coordenadas generalizadas a un conjunto cualquiera de parámetros $\{q_j, j = 1, \ldots n\}$*, que sirven para determinar de manera unívoca la configuración del sistema:* $\boldsymbol{r}_i(q_j, t)$.



Ejemplo

2 gdl: $\{q_j\} = \{\theta, s\}$

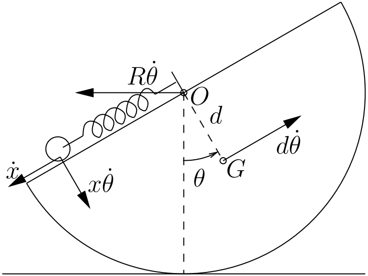
$$\boldsymbol{r}_m = (\frac{2}{3}\ell\frac{\sqrt{3}}{2} + s)\cos\theta\,\boldsymbol{i} - (\frac{2}{3}\ell\frac{\sqrt{3}}{2} + s)\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{r}_G = (\frac{2}{3}\ell\frac{\sqrt{3}}{2})\cos\theta\,\boldsymbol{i} - (\frac{2}{3}\ell\frac{\sqrt{3}}{2})\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j}$$

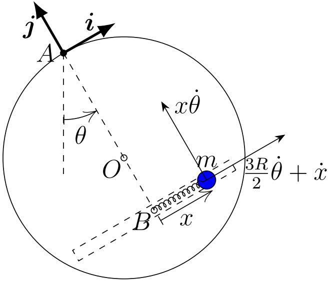
$\longrightarrow \quad \delta\boldsymbol{r}_m, \delta\boldsymbol{r}_G, \dot{\boldsymbol{r}}_m, \dot{\boldsymbol{r}}_G,$ etc

Índice

Coordenadas Generalizadas – Ejemplos

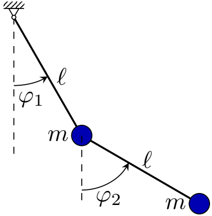


2 grados de libertad: $\{q_j\} = \{\theta, x\}$

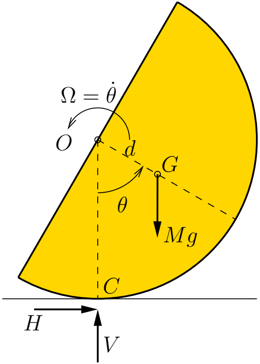


2 grados de libertad: $\{q_j\} = \{\theta, x\}$

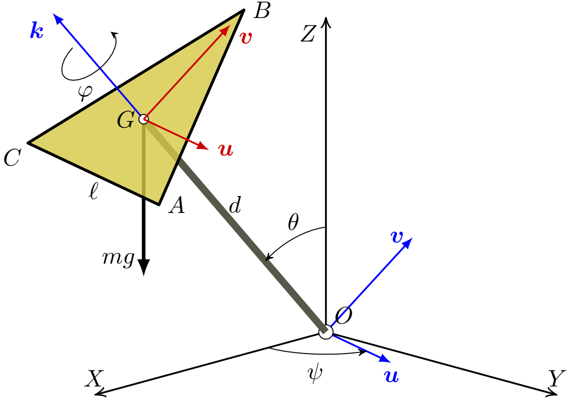
Coordenadas Generalizadas – Ejemplos



2 grados de libertad: $\{q_j\} = \{\varphi_1, \varphi_2\}$



1 grado de libertad: $\{q_j\} = \{\theta\}$



3 grados de libertad:
$\{q_j\} = \{\psi, \theta, \varphi\}$

Índice

Coordenadas Generalizadas – Aplicación

- En general, existirán unas relaciones de los vectores de posición de cada partícula con las coordenadas generalizadas del tipo:

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_j, t) \quad (i = 1, \ldots N; \quad j = 1, \ldots n) \tag{1}$$

  donde N es el número de partículas del sistema, y n el número de coordenadas generalizadas (grados de libertad si no hay restricciones entre ellas).

- A partir de las relaciones (1), las velocidades se obtienen derivando:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \quad (i = 1, \ldots N) \tag{2}$$

  llamándose velocidades generalizadas a los términos $\dot{q}_j = \mathrm{d}q_j/\mathrm{d}t$.

- Considerando una variación "δ" (es decir, infinitesimal / tangente y a tiempo constante) de las coordenadas en (1), se obtienen los desplazamientos virtuales:

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \qquad i = 1, \dots N. \tag{3}$$

- Nótese que en esta expresión no existe término $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\delta t$, ya que $\delta t = 0$ para un desplazamiento virtual. La variación "δ" se realiza en un instante fijo de tiempo, no a lo largo del movimiento.
- Los desplazamientos virtuales $\delta \boldsymbol{r}_i$ difieren de los desplazamientos infinitesimales reales a lo largo del movimiento, que a partir de (2) serían

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \mathrm{d}q_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\mathrm{d}t \neq \delta \boldsymbol{r}_i$$

Índice

Principio de D'Alembert en coord. generalizadas

- La expresión del Principio de D'Alembert es

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i}_{\delta W} - \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i}_{\delta W^{\text{iner}}} = 0 \qquad \forall \{\delta \boldsymbol{r}_i\} \text{ comp.} \tag{4}$$

- Desarrollamos primero el término δW. Sustituyendo $\delta \boldsymbol{r}_i$ de (3)

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad \Rightarrow \quad \delta W = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right)$$

e intercambiando el orden de los sumatorios,

$$\delta W = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right)}_{Q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j \tag{5}$$

Principio de D'Alembert en coord. generalizadas

- En la expresión (5) se identifican unos coeficientes escalares que llamaremos Fuerzas generalizadas:

$$Q_j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \qquad j = 1, \ldots n. \tag{6}$$

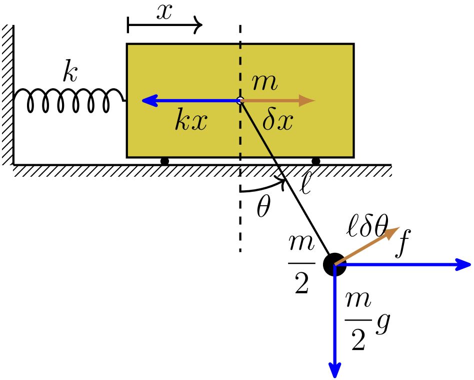
- También se pueden interpretar como los coeficientes de δq_j en la expresión (5) del trabajo virtual δW:

$$\delta W = \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j \tag{7}$$

Observaciones

- Las fuerzas generalizadas son escalares, $Q_j \in \mathbb{R}$
- Corresponden a la proyección de las fuerzas físicas $\boldsymbol{f}_i$ sobre las direcciones $\partial \boldsymbol{r}_i / \partial q_j$

Ejemplo



$$\delta W = -kx\,\delta x - \frac{m}{2}g\,\ell\delta\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + f(\delta x + \ell\delta\theta\cos\theta)$$

Por lo que, agrupando los coeficientes de $(\delta x, \delta\theta)$:

$$Q_x = -kx + f\,, \quad Q_\theta = -\frac{m}{2}g\,\ell\,\mathrm{sen}\,\theta + f\ell\cos\theta \tag{8}$$

Principio de D'Alembert en coord. generalizadas

- El segundo término de (4), sustituyendo $\delta \boldsymbol{r}_i$, se puede expresar como:

$$\delta W^{\mathsf{iner}} = -\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = -\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \quad (9)$$

- y desarrollando el coeficiente de δq_j entre paréntesis,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right) - \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} \quad (10) \end{aligned}$$

- donde se ha tenido en cuenta[1] $\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}$

[1] demostración en libro de texto

Principio de D'Alembert en coord. generalizadas

- Empleando la definición de energía cinética, $T \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2$, la ecuación (10) se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \end{aligned} \tag{11}$$

- Finalmente, empleando (6) y (11), el principio de D'Alembert queda expresado en coordenadas generalizadas como:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right] \delta q_j = 0, \quad \forall \{\delta q_j\} \text{ compatibles}} \tag{12}$$

- Esta expresión, al tratarse del principio de D'alembert, puede ser considerada como ecuación fundamental de la dinámica.

Índice

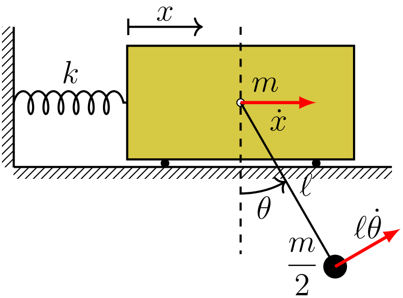
Ecuaciones de Lagrange – Coordenadas libres

- La expresión (12) es completamente general por lo que se puede aplicar a cualquier sistema, con coordenadas libres o no, tanto con enlaces holónomos como no holónomos.
- En el caso en que todos los enlaces sean holónomos, será posible siempre establecer un conjunto de coordenadas libres $\{q_j\}$, en el que las variaciones $\{\delta q_j\}$ se puedan escoger de manera arbitraria, manteniendo la compatibilidad con los enlaces.
- En este caso, (12) equivale a enunciar que cada uno de los coeficientes de las $\{\delta q_j\}$ ha de anularse:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, \dots n).} \tag{13}$$

Estas expresiones son las llamadas ecuaciones de Lagrange, en su forma básica.

Ejemplo



La energía cinética es suma de la del bloque m y la del péndulo $m/2$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta)$$

Desarrollando las derivadas de T e incluyendo las fuerzas generalizadas obtenidas en (8), resultan las ecuaciones generales de la dinámica

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} + \frac{1}{2}m\ell\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{1}{2}m\ell\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta = -kx + f \tag{14}$$

$$\frac{1}{2}m\ell^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}m\ell\ddot{x}\cos\theta = -\frac{1}{2}mg\ell\operatorname{sen}\theta + f\ell\cos\theta \tag{15}$$

Ecuaciones de Lagrange – Coordenadas libres

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, \dots n).}$$

Observaciones

- Se trata de n ecuaciones diferenciales de la dinámica, para un sistema con n gdl, que son necesarias y suficientes para definir la dinámica.
- Son ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden (derivadas segundas $\ddot{q}_j$), de forma similar a la segunda ley de Newton.
- Todas las magnitudes que intervienen son escalares, a partir de ellas los términos de fuerzas de Coriolis, centrífugas etc. resultan de forma consistente y automática.
- No intervienen las reacciones de enlaces lisos, en contraste con las ecuaciones procedentes de los teoremas Newtonianos.
- Permiten una formulación y resolución automática con programación simbólica (MAPLE, MATHEMATICA, MACSYMA, etc.)

Ecuaciones de Lagrange

Pasos para su desarrollo práctico

1. Seleccionar coordenadas (libres) q_j y las relaciones $\boldsymbol{r}_i(q_j)$
2. Obtener las fuerzas generalizadas Q_j
   (veremos después una simplificación importante cuando existe potencial V)
3. Obtener la expresión de la energía cinética $T(q_j, \dot{q}_j, t)$
4. Desarrollar las derivadas, obteniendo las ecuaciones de Lagrange

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, \dots n)}$$

Índice

Ecuaciones de Lagrange – Función Lagrangiana

- Si las fuerzas aplicadas proceden de un potencial V,

$$\boldsymbol{f}_i = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_i},$$

- las fuerzas generalizadas tendrán entonces la expresión:

$$Q_j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}. \tag{16}$$

- Suponemos que el potencial V depende de las coordenadas y posiblemente del tiempo, pero que no depende de las velocidades:

$$V = V(q_j, t) = \hat{V}(\boldsymbol{r}_i, t).$$

- Sustituyendo (16) y agrupando términos en las ecuaciones de Lagrange (13):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1, \dots n).$$

- Se define la función Lagrangiana como:

$$L(q_j, \dot{q}_j, t) \stackrel{\text{def}}{=} T(q_j, \dot{q}_j, t) - V(q_j, t);$$

- al no depender V de las velocidades, se verifica $\partial T/\partial \dot{q}_j = \partial L/\partial \dot{q}_j$. De esta forma, las ecuaciones quedan finalmente:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, \dots n).} \tag{17}$$

Estas expresiones constituyen las ecuaciones de Lagrange.

Ecuaciones de Lagrange – Función Lagrangiana

- La determinación de la función Lagrangiana $L = T - V$ tiene un papel esencial: una vez determinada la expresión las ecuaciones resultan de forma "automática".
- La dependencia funcional $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ implica que para las derivadas parciales los términos q_j y $\dot{q}_j$ se consideran independientes.
- Si el potencial no es constante $(\partial V/\partial t \neq 0)$, las fuerzas no son conservativas a pesar de provenir de un potencial.
- Para sistemas mecánicos estándar es válida la suposición de que el potencial V no depende de las velocidades. [2]

[2] Sin embargo, esto no ocurriría con fuerzas electromagnéticas.

Ecuaciones de Lagrange – Función Lagrangiana

- Consideramos un caso más general, en el que algunas fuerzas procedan de un potencial ($Q_j^V \stackrel{\text{def}}{=} -\partial V/\partial q_j$) y otras no, que denominaremos fuerzas no conservativas (Q_j^{nc}):

$$Q_j = Q_j^V + Q_j^{\mathsf{nc}} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{\mathsf{nc}},$$

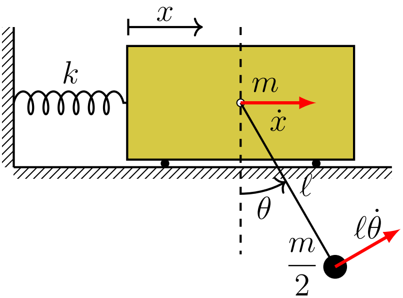
- es posible definir una Lagrangiana parcial $L = T - V$, resultando entonces las ecuaciones:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{\mathsf{nc}}, \quad j = 1, \ldots n} \tag{18}$$

- en estas sólo aparecen expresamente las fuerzas no conservativas Q_j^{nc}

Ecuaciones de Lagrange – Función Lagrangiana

Ejemplo (I)



La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta)$$

El potencial vale

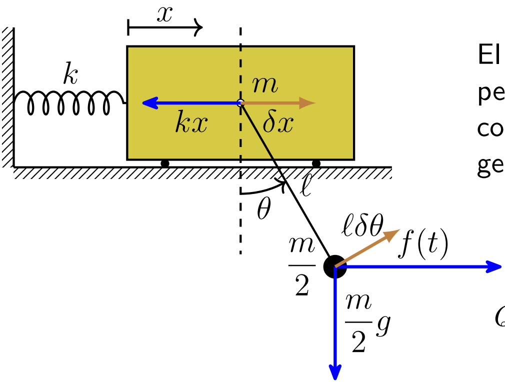
$$V = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{m}{2}g\ell\cos\theta$$

por lo que la Lagrangiana resulta

$$L = T - V = \frac{3}{4}m\dot{x}^2 + \frac{1}{4}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta - \frac{1}{2}kx^2 + \frac{m}{2}g\ell\cos\theta \quad (19)$$

Ecuaciones de Lagrange – Función Lagrangiana

Ejemplo (II)



El peso y el resorte son conservativos, pero la fuerza $f(t)$ es no conservativa, originando las fuerzas generalizadas correspondientes:

$$\delta W^f = f(t)(\delta x + \ell\delta\theta\cos\theta)$$

$$\Downarrow$$

$$Q_x^{\mathrm{nc}} = f(t),\ Q_\theta^{\mathrm{nc}} = f(t)\ell\cos\theta \quad (20)$$

Derivando (19) y considerando (20) resultan las ecuaciones

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} + \frac{1}{2}m\ell\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{1}{2}m\ell\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta + kx = f(t) \quad (21)$$

$$\frac{1}{2}m\ell^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}m\ell\ddot{x}\cos\theta + \frac{1}{2}mg\ell\operatorname{sen}\theta = f(t)\ell\cos\theta \quad (22)$$

Índice

Integrales primeras – Energía cinética

- Teniendo en cuenta la expresión general de las velocidades,

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}_i(q_j, t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \tag{23}$$

- La energía cinética resulta una expresión general cuadrática en $\dot{q}_j$:

$$T = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \right)^2 = T_2 + T_1 + T_0 \,, \tag{24}$$

- donde T_2 es cuadrático en $\dot{q}_j$, T_1 lineal y T_0 independiente:

$$T_2 = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{1}{2} a_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l \,, \; T_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k\dot{q}_k \,, \; T_0 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \right)^2 \tag{25}$$

siendo $\quad a_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_l} \,, \quad a_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$

Índice

Momentos generalizados

- Los momentos generalizados se definen como

$$\boxed{p_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \qquad (j = 1, \dots n)} \tag{26}$$

- En general, ya que el potencial no depende de las velocidades, a partir de (25) resulta

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\dot{q}_k + a_j \tag{27}$$

- En el caso en que no exista dependencia explícita del tiempo ($\partial \boldsymbol{r}_i/\partial t = 0$), será $T_1 = T_0 = 0$. Por tanto, T será una expresión cuadrática homogénea en $\dot{q}_j$, y los momentos generalizados valdrán

$$T = T_2 = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{1}{2} a_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l \quad \Rightarrow \quad p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\dot{q}_k \tag{28}$$

Integrales primeras – Coordenadas cíclicas

- Las ecuaciones de Lagrange (18) se pueden expresar en función de p_j como:

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} + Q_j^{\text{nc}}, \quad j = 1, \dots n \tag{29}$$

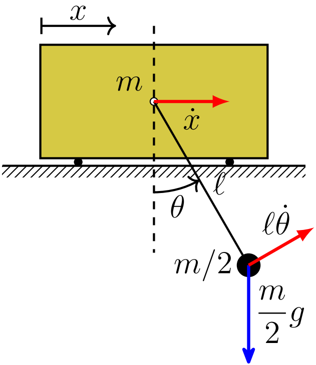
- De donde se deduce fácilmente el teorema de conservación:

$$\boxed{\text{si } \frac{\partial L}{\partial q_j} + Q_j^{\text{nc}} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j = \text{cte.}} \tag{30}$$

Se dice entonces que q_j es una coordenada cíclica o ignorable.

- Las expresiones (30) constituyen integrales primeras del movimiento, ya que son ecuaciones en las que intervienen sólo derivadas primeras de las coordenadas.

Coordenadas cíclicas – Ejemplo



La única fuerza aplicada ahora es el peso, sin fuerzas no conservativas. Tampoco se considera el muelle.

La Lagrangiana vale en este caso

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta) + \frac{m}{2}g\ell\cos\theta$$

La Lagrangiana no depende de x, por lo que

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \frac{m}{2}(\dot{x} + \ell\dot{\theta}\cos\theta) = \text{cte.}$$

La coordenada θ no es cíclica, $\partial L/\partial\theta \neq 0$, para ella será necesario plantear la ecuación dinámica de Lagrange.

Índice

Integrales primeras – Jacobi / Energía

- La derivada total de L respecto del tiempo es

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

- En lo que sigue supondremos $Q_j^{\mathsf{nc}} = 0$. Sustituyendo a partir de (17), $\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \dot{p}_j$, y operando:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} \dot{p}_j \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} p_j \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j \right] + \frac{\partial L}{\partial t}$$

- Agrupando los términos con derivadas totales, se deduce

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - L \right] = -\frac{\partial L}{\partial t} \qquad (31)$$

Integrales primeras – Jacobi / Energía

De (31) se obtiene la expresión de la llamada integral de Jacobi:

$$\boxed{\text{si } \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \qquad h \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - L = \text{cte}} \tag{32}$$

Relación entre integral de Jacobi y Energía

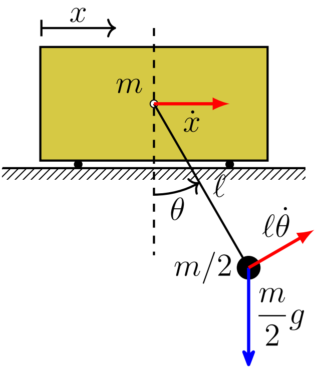
- En el caso en que $\partial \boldsymbol{r}_i / \partial t = 0$, según vimos, la energía cinética es una expresión cuadrática homogénea en $\dot{q}_j$; empleando (27):

$$T = T_2 = \sum_{k,j=1}^{n} \frac{1}{2} a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} p_j \dot{q}_j$$

$$h = \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - L = 2T_2 - (T_2 - V) = T_2 + V = T + V,$$

por lo que h (32) coincide en este caso con la energía total, $T + V$.

Jacobi / Energía – Ejemplo



La única fuerza aplicada es el peso.
La Lagrangiana vale

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta) + \frac{m}{2}g\ell\cos\theta$$

Esta función Lagrangiana no depende explícitamente de t, por lo que

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad h = p_x\dot{x} + p_\theta\dot{\theta} - L = \text{cte.}$$

No hay coordenadas móviles, por lo que coincide con la energía:

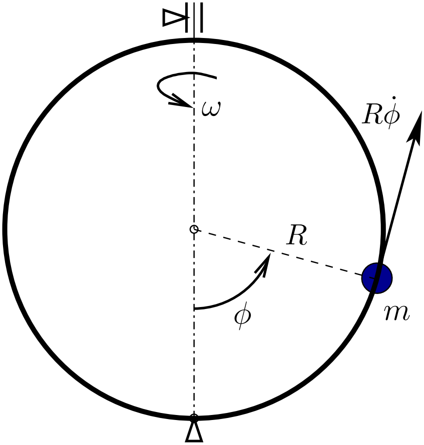
$$h = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta) - \frac{m}{2}g\ell\cos\theta$$

Integrales primeras – Jacobi / Energía

observaciones

- Cuando existan sistemas de coordenadas móviles se verificará $\partial \boldsymbol{r}_i/\partial t \neq 0$ y por tanto $h = p_j \dot{q}_j - L \neq T + V$. Sin embargo, puede que exista la integral de Jacobi (si $\partial L/\partial t = 0$), aunque su significado físico no será en este caso la conservación de la energía.
- Puede darse el caso de que $\partial \boldsymbol{r}_i/\partial t = 0$ y, por tanto, $T + V = h = p_j \dot{q}_j - L$, pero que esta expresión no se mantenga constante por ser $\partial L/\partial t \neq 0$. Esto último ocurrirá si $\partial V(q_j, t)/\partial t \neq 0$, siendo en este caso el sistema no conservativo desde el punto de vista físico, aunque las fuerzas procedan de un potencial (no estacionario).

Jacobi / Energía – Ejemplo coordenadas móviles



- La partícula m desliza libremente sobre el aro (ϕ).
- El aro gira con ω constante, por lo que ϕ es una coordenada móvil.
- La Lagrangiana vale

$$L = \frac{1}{2}m(R^2\dot\phi^2 + R^2\,\mathrm{sen}^2\,\phi\,\omega^2) + mgR\cos\phi$$

- Se cumple $\partial L/\partial t = 0$, luego la int. de Jacobi es $h =$ constante.

Sin embargo, en este caso no coincide con la energía, que no se conserva:

$$h = p_\phi\dot\phi - L = \frac{1}{2}mR^2(\dot\phi^2 - \mathrm{sen}^2\,\phi\,\omega^2) - mgR\cos\phi = \text{cte.}$$

$$T + V = \frac{1}{2}mR^2(\dot\phi^2 + \mathrm{sen}^2\,\phi\,\omega^2) - mgR\cos\phi \neq \text{cte.}$$