1: Trabajos Virtuales

MECÁNICA

Grado de Ingeniería Civil

José M.ª Goicolea

Grupo de Mecánica Computacional
Escuela de Ingenieros de Caminos,
Universidad Politécnica de Madrid

14 de febrero de 2022

Índice

Índice

Ecuaciones Cardinales de la dinámica

- Para un sistema mecánico, se denominan ecuaciones cardinales de la dinámica a las que relacionan las resultantes de fuerzas y de momentos, $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{M}_O$ ó $\boldsymbol{M}_G$:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{a}_G \tag{1}$$

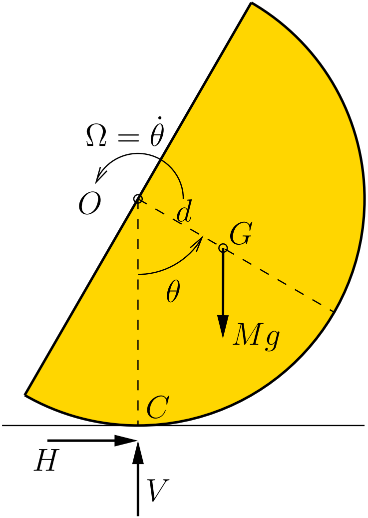
$$\boldsymbol{M}_O = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_O \quad \text{ó} \quad \boldsymbol{M}_G = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_G \tag{2}$$

- Para un caso general 3D cada una de las ecuaciones vectoriales (1) y (2) equivalen a 3 ecuaciones escalares, un total de 6.
- En un movimiento 2D (1) equivale a 2 ecuaciones y (2) a una única ecuación, un total de 3.
- Para el caso particular de un sólido rígido 2D, resultan en

$$F_x = Ma_{G,x}\,, \quad F_y = Ma_{G,y}\,; \tag{3}$$

$$M_O = I_O\dot{\Omega} \quad \text{ó} \quad M_G = I_G\dot{\Omega} \tag{4}$$

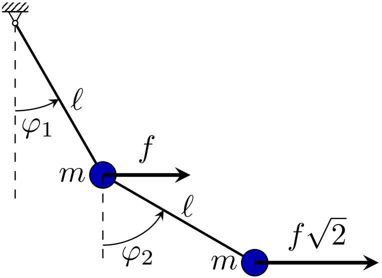
Semidisco que rueda sin deslizar



- Sólido Rígido 2D: $N_{\mathsf{gdl}} = 3$
- 2 Restricciones / reacciones incógnitas (H, V)
- Grados de libertad del sistema: $N_{\mathsf{gdl}} = 3 - 2 = 1$
- Las Ecuaciones Cardinales son necesarias y suficientes para definir la dinámica:

$$F_x = Ma_x$$
$$F_y = Ma_y$$
$$M_G = I_G\dot{\Omega}$$

Péndulo doble



- No es un sólido rígido: 2 partículas, $N_{\text{gdl}} = 2 \times 2 = 4$
- $1 + 1 = 2$ restricciones
- Grados de libertad del sistema: $N_{\text{gdl}} = 4 - 2 = 2$
- Las Ecuaciones Cardinales no son suficientes para definir la dinámica
- Es necesario cortar y dividir en subsistemas para cada partícula, introduciendo incógnitas adicionales para las reacciones en los hilos.

Planteamiento del problema dinámico

Planteamiento de la dinámica

- Para un Sólido Rígido 2D o 3D las Ecuaciones Cardinales son necesarias y suficientes
- Para un sistema general no rígido no son suficientes:
  - Se subdivide en subsistemas rígidos (o partículas individuales)
  - Se introducen incógnitas nuevas por reacciones internas en los cortes
  - Se aplican las Ecuaciones Cardinales en cada subsistema
  - El procedimiento de subdivisión y reacciones incógnitas requiere diseñarse de forma específica para cada caso
- Los métodos de Trabajos Virtuales proporcionan un procedimiento general para obtener las ecuaciones necesarias y suficientes en cualquier sistema
  - Estática: Principio de los Trabajos Virtuales
  - Dinámica: Principio de D'Alembert
- Los métodos de trabajos virtuales son la base para métodos computacionales como los Elementos Finitos

Índice

Principio de trabajos virtuales

Concepto de Desplazamientos virtuales

- En un sistema de N partículas, se denomina así a un conjunto de desplazamientos infinitesimales arbitrarios de cada partícula del sistema, $\{\delta \boldsymbol{r}_i \ (i = 1, \dots N)\}$.
- Son desplazamientos ficticios, que tienen lugar en un instante dado ("congelado") de tiempo: $\delta t = 0$.
  Pueden considerarse como tangentes al movimiento en una configuración dada del sistema.
- Por el contrario, los desplazamientos infinitesimales reales $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i \neq \delta \boldsymbol{r}_i$ se producen en el movimiento real, durante un intervalo $\mathrm{d}t > 0$, y se pueden expresar como diferenciales de las funciones que definen el movimiento, $\boldsymbol{r}_i(t)$.

Principio de trabajos virtuales

- Sistema en equilibrio, $\dot{\boldsymbol{r}}_i = \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{0}$, $(i = 1, \ldots N)$. Considerando fuerzas activas $(\boldsymbol{f}_i)$ y reactivas $(\boldsymbol{R}_i)$,

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{f}_i + \boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{0} \qquad \forall i = i, \ldots N. \tag{5}$$

- El trabajo virtual realizado por las fuerzas $\boldsymbol{F}_i$ para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales $\{\delta \boldsymbol{r}_i\}$ es, por tanto, también nulo:

$$\delta W \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \qquad \forall \{\delta \boldsymbol{r}_i\}\,. \tag{6}$$

- Sea un sistema con enlaces lisos, y un conjunto de desplazamientos virtuales $\{\delta \boldsymbol{r}_i\}$, compatible con los enlaces.

$$\delta W = \sum_i \boldsymbol{f}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i + \cancelto{0}{\sum_i \boldsymbol{R}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i} = 0\,, \qquad \forall \{\delta \boldsymbol{r}_i\} \text{ comp.}$$

Principio de trabajos virtuales – Enunciado

PTV

"En un sistema material sometido a enlaces lisos, es condición necesaria y suficiente para el equilibrio que el trabajo de las fuerzas aplicadas para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces sea nulo:

$$\boxed{\delta W = \sum_i \boldsymbol{f}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0, \qquad \forall \{\delta \boldsymbol{r}_i\} \textit{ comp."}} \tag{7}$$

- Este enunciado se puede considerar como un principio de la estática, alternativo a las leyes de equilibrio.
- Las fuerzas activas $\boldsymbol{f}_i$ deben incluir tanto las externas como las internas, que en un caso general sí realizan trabajo virtual. Por el contrario, $\boldsymbol{f}_i$ excluyen a las fuerzas de reacción (de enlaces lisos), que no desarrollan trabajo virtual.

Índice

Principio de D'Alembert

- Las ecuaciones de la dinámica para un sistema general de partículas $m_i, i = 1, \dots N$, sometidas a fuerzas activas $\boldsymbol{f}_i$ y reacciones $\boldsymbol{R}_i$ se pueden expresar como

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{f}_i + \boldsymbol{R}_i = m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \qquad \forall i = 1, \dots N \, .$$

- Denominando como fuerzas de inercia los términos $(-m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i)$, se puede considerar como un problema de estática mediante suma de fuerzas

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{f}_i + \boldsymbol{R}_i - m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{0} \qquad \forall i = 1, \dots N \, .$$

- Considerando enlaces lisos y desplazamientos virtuales compatibles con los mismos,

$$\sum_i \boldsymbol{f}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i + \cancelto{0}{\sum_i \boldsymbol{R}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i} - \sum_i m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \, , \qquad \forall \{\delta \boldsymbol{r}_i\} \text{ comp.}$$

Principio de D'Alembert – Enunciado

Principio de D'Alembert

"En un sistema material sometido a enlaces lisos, la evolución dinámica del sistema está determinada, como condición necesaria y suficiente, por la anulación en todo instante del trabajo de las fuerzas aplicadas más el trabajo de las fuerzas de inercia para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces:

$$\boxed{\underbrace{\sum_i \boldsymbol{f}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i}_{\delta W} - \sum_i m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0, \qquad \forall \{\delta \boldsymbol{r}_i\} \textit{ comp."}} \tag{8}$$

- Este enunciado se puede considerar como un principio de la dinámica, alternativo a la ley de Newton.
- Aplica la misma observación realizada arriba para el P.T.V. sobre la naturaleza de las fuerzas $\boldsymbol{f}_i$.