Dinámica de Sistemas

MECÁNICA – Grado de Ingeniería Civil

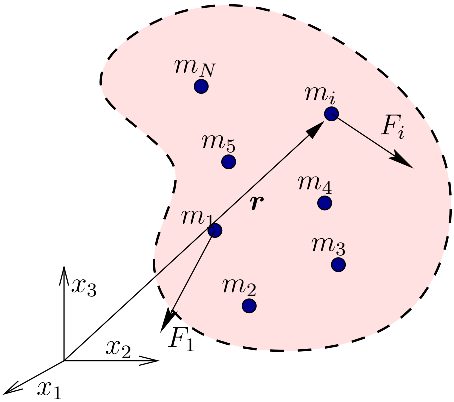
José M.ª Goicolea

Grupo de Mecánica Computacional
Escuela de Ingenieros de Caminos,
Universidad Politécnica de Madrid

7 de febrero de 2022

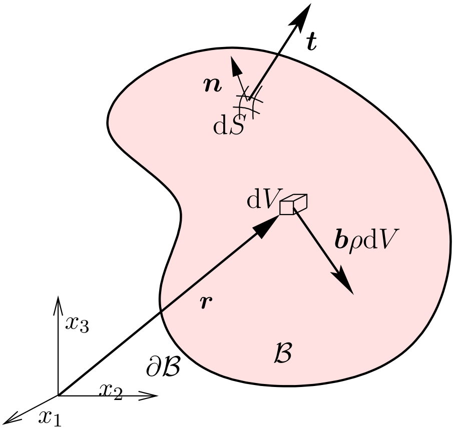
POLITÉCNICA

Concepto



Sistema mecánico discreto

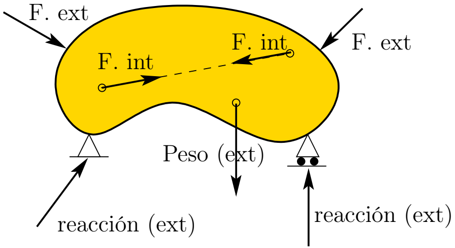
$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$



Sistema mecánico continuo

$$M = \int_{\mathcal{B}} \rho \, \mathrm{d}V$$

Fuerzas y enlaces



Tipos de fuerzas

- Exteriores / interiores
- Activas / reactivas

Tipos de enlaces

- Exteriores / interiores
- Lisos / rugosos (disipativos)
- Holónomos / anholónomos

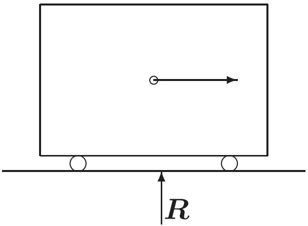
$$\textit{holónomo}: \quad \Phi(\boldsymbol{r}_i, t) = 0$$

$$\textit{anholónomo}: \quad \Phi(\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i, t) = 0$$

- Esclerónomos / reónomos

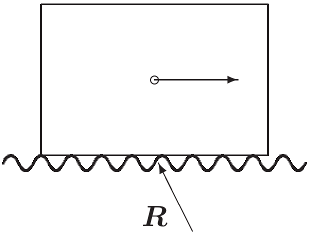
$$\textit{reónomo}: \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} \neq 0$$

Fuerzas y enlaces – enlace liso o rugoso



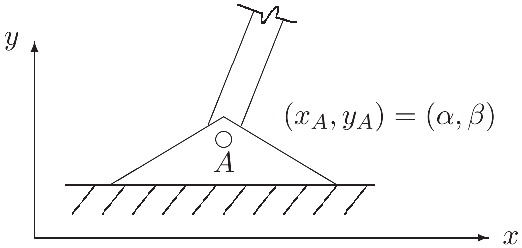
para el movimiento permitido por el enlace (deslizamiento horizontal $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$)

la reacción del enlace liso no realiza trabajo ($\boldsymbol{R} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$),

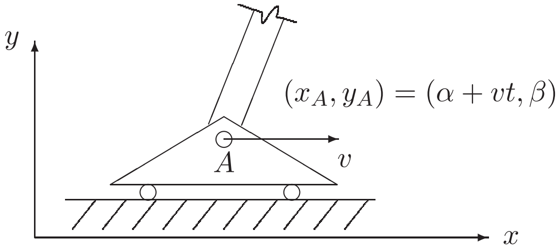


mientras que la reacción del enlace rugoso sí realiza trabajo ($\boldsymbol{R} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} < 0$).

Fuerzas y enlaces – dependencia de t

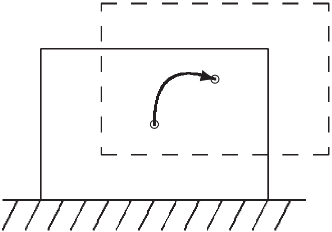


Enlaces holónomos;
a) esclerónomo (no depende del tiempo),



b) reónomo (dependiente del tiempo o enlace móvil)

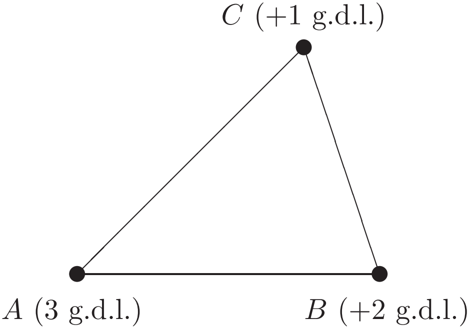
Fuerzas y enlaces



Enlace unilateral, que permite el movimiento vertical en un sólo sentido.

Fuerzas y enlaces – Enlaces de sólido rígido

Sólido rígido caracterizado por 3 partículas (A, B, C)



Grados de libertad: $3 + 2 + 1 = 6$

1. Elegimos una partícula A cualquiera; su posición estará definida por tres coordenadas cartesianas, (x_A, y_A, z_A).
2. Una segunda partícula B, al estar obligada a mantener la distancia $\overline{AB}$, vendrá definida por dos parámetros adicionales (por ejemplo dos ángulos en esféricas respecto de A: (φ_B, λ_B).
3. una tercera partícula C precisa de un único parámetro más para definir su posición, por ejemplo, el ángulo de giro alrededor del eje AB, θ_C.

Cantidad de movimiento

Consideramos un sistema formado por un número finito de partículas, $\{m_i, \ i = 1, \dots N\}$.

Aplicando el principio de la cantidad de movimiento (2.ª ley de Newton) a cada partícula m_i del sistema, siendo $\boldsymbol{F}_i$ la resultante de todas las fuerzas sobre dicha partícula,

$$\boldsymbol{F}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i \boldsymbol{v}_i)\,. \tag{1}$$

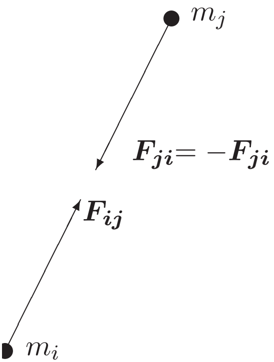
Descompondremos las fuerzas en internas y externas al sistema:

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i^{\text{ext}} + \boldsymbol{F}_i^{\text{int}}\,;$$

Así, al sumar las ecuaciones (1) para todas las partículas del sistema, las fuerzas internas se anulan dos a dos, resultando:

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i^{\text{ext}} + \cancelto{\mathbf{0}}{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i^{\text{int}}} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m_i \boldsymbol{v}_i \right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{P}} \tag{2}$$

Cantidad de movimiento



- Fuerzas internas centrales entre dos partículas m_i y m_j del sistema: sistema nulo.
- La suma para todas las partículas del sistema es un conjunto par de fuerzas, que al anularse dos a dos, resultan en una suma total nula:

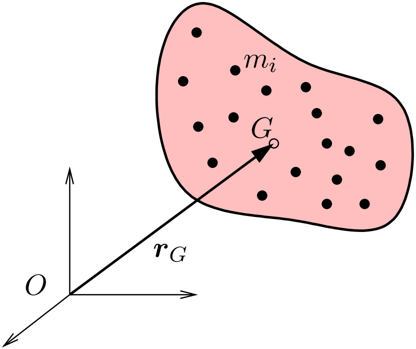
$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i^{\text{int}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N}}_{N} \underbrace{\sum_{i \neq j}}_{N-1} \boldsymbol{F}_{ij} = \boldsymbol{0}$$

Teorema de la cantidad de movimiento

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{P}}$$

“La derivada respecto del tiempo de la cantidad de movimiento del sistema es igual a la resultante de las fuerzas exteriores.”

Centro de Masa (CDM)



Se define como:

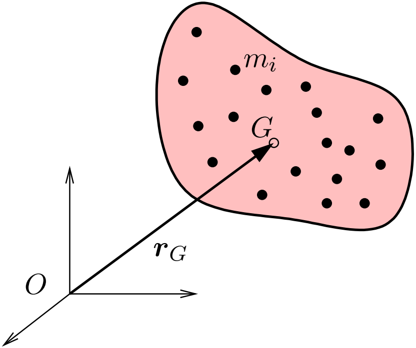
$$\boldsymbol{r}_G \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i}{M}, \tag{3}$$

Derivando:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i\right] = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{P}$$
$$= M\boldsymbol{v}_G, \tag{4}$$

donde $\boldsymbol{v}_G \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_G/\mathrm{d}t$

Centro de Masa (CDM) – Cantidad de movimiento



Sustituyendo $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_G$ en

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{P}$$

y llamando $\boldsymbol{a}_G \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_G/\mathrm{d}t^2$:

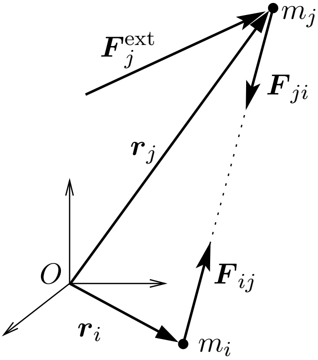
Movimiento del CDM

$$\boxed{\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{a}_G} \qquad (5)$$

Se puede estudiar el movimiento del Centro de Masas G de un sistema como si fuera una partícula, concentrando toda la masa del sistema, sometida a la resultante de fuerzas exteriores sobre el sistema

Momento cinético

Sumando para todo el sistema, distinguiendo fuerzas internas y externas, y suponiendo que las fuerzas internas son centrales, por lo que El momento de cada pareja de fuerzas $(\boldsymbol{F}_{ij}, \boldsymbol{F}_{ji})$ es nulo:



$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{M}_O^i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{F}_i^{\text{ext}} + \cancelto{\mathbf{0}}{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \wedge \left(\sum_{i \neq j} \boldsymbol{F}_{ij} \right)}$$

Por lo que las resultantes son

$$\boldsymbol{H}_O \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \boldsymbol{H}_O^i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \wedge m_i \boldsymbol{v}_i$$

$$\boldsymbol{M}_O \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \boldsymbol{M}_O^i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{F}_i^{\text{ext}}$$

Ecuación de balance del Momento Cinético:
$$\boxed{\boldsymbol{M}_O = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{H}_O} \qquad (6)$$

Momento cinético

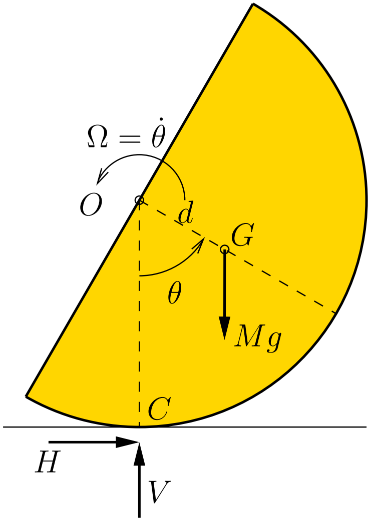
Observaciones sobre el balance de momento cinético

- **Importante**: la ecuación (6) de balance de momento cinético tiene que expresarse con momentos en un punto O fijo (origen de un sistema de referencia inercial)
- El momento cinético en un punto cualquiera Q viene dado por la expresión

$$\boldsymbol{H}_Q = \boldsymbol{H}_O + \boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{r}_Q = \boldsymbol{H}_O - \boldsymbol{r}_Q \wedge (M\boldsymbol{v}_G) . \tag{7}$$

- Sin embargo, a no ser que este punto Q sea fijo no se puede aplicar en él la ecuación del momento cinético.
- Ojo: Para que un punto geométrico pueda considerarse fijo no basta con que su velocidad sea nula, debe permanecer nula.

Ejemplo



- Este caso representa un semidisco que rueda sin deslizar sobre una recta.
- El centro del semiaro O no es un punto fijo
- Debido a que no se conoce la reacción (H, V), resulta tentador tomar momentos en C, ya que las reacciones no dan momento aquí. Además se cumple $\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{0}$.
- Sin embargo C no es fijo $(\boldsymbol{a}_C \neq \boldsymbol{0})$ y no se cumple la ecuación de balance del momento cinético: $\boldsymbol{M}_C \neq \mathrm{d}\boldsymbol{H}_C/\mathrm{d}t$
- Al no existir ningún punto fijo, se debe resolver planteando la ecuación en G, como veremos más adelante

Al igual que en los casos anteriores, para obtener las magnitudes cinéticas del sistema conjunto, sumamos para todas las partículas del mismo:

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}T = \mathrm{d}\left[\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2\right]$$

$$\mathrm{d}W \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i = \underbrace{\sum_i \boldsymbol{F}_i^{(ext)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}_{\mathrm{d}W^{\text{ext}}} + \underbrace{\sum_i \sum_{i \neq j} \boldsymbol{F}_{ij} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}_{\mathrm{d}W^{\text{int}} \neq 0},$$

obteniéndose finalmente:

$$\boxed{\mathrm{d}T = \mathrm{d}W = \mathrm{d}W^{\text{ext}} + \mathrm{d}W^{\text{int}}} \tag{8}$$

Energía

Observaciones sobre la energía interior

$$\boxed{\mathrm{d}T = \mathrm{d}W = \mathrm{d}W^{\mathsf{ext}} + \mathrm{d}W^{\mathsf{int}}}$$

- A diferencia de las magnitudes cinéticas anteriores, en un sistema general no se anula el trabajo de las fuerzas interiores: $\mathrm{d}W^{\mathsf{int}} \neq 0$
- Esta energía interior se desarrolla por la deformación o variación de distancias internas.
- Un ejemplo significativo es la deformación elástica de los sólidos y estructuras, dando lugar a las vibraciones de las mismas cuando se someten a acciones dinámicas.
- Los movimientos de traslación y rotación (de sólido rígido) no producen trabajo de las fuerzas interiores.

Energía

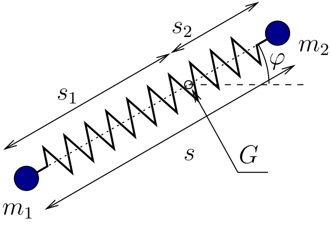
Si todas las fuerzas (tanto externas como internas) provienen de un potencial independiente del tiempo, se verificará:

$$\mathrm{d}W = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i = -\mathrm{d}V\,,$$

deduciéndose entonces el teorema de conservación de la energía:

$$\mathrm{d}T + \mathrm{d}V = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = T + V = \text{cte}\,.} \tag{9}$$

Conviene recalcar que en esta ecuación la energía potencial V corresponde al la Energía Potencial Total, derivándose de ella tanto las fuerzas interiores como las exteriores.

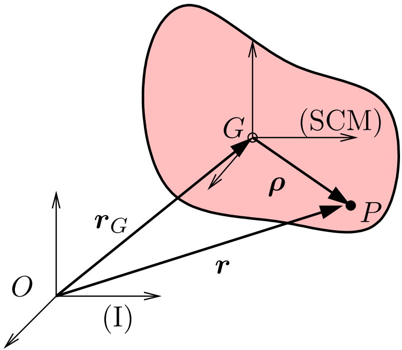


Ejemplo

Sistema formado por dos masas unidas por un resorte elástico

$$\mathrm{d}W^{\text{int}} \neq 0\,; \qquad V = \underbrace{\frac{1}{2}ks^2}_{V^{\text{int}}} + \underbrace{Mgy_G}_{V^{\text{ext}}}$$

Magnitudes y teoremas en el CDM



- Se define El sistema de referencia del centro de masas (SCM), con origen en G y ejes paralelos al sistema inercial (I).
- Las expresiones de posición, velocidad y aceleración relativos al SCM son respectivamente

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_G,$$
$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_G,$$
$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_G\,.$$

Para un observador en el SCM, la cantidad de movimiento $\boldsymbol{P}$ es:

$$\boldsymbol{P}^{SCM} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i \boldsymbol{\nu}_i = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i - \underbrace{\left(\sum_i m_i\right)}_{=M} \boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{0}$$

Para calcular el momento cinético relativo al SCM, además de tomar momentos respecto de G, debemos emplear también las velocidades $\boldsymbol{\nu}_i$ relativas al SCM:

$$\boldsymbol{H}_G^{SCM} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_G) \wedge m_i(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_G)$$

$$= \underbrace{\sum_i \boldsymbol{r}_i \wedge m_i \boldsymbol{v}_i}_{\boldsymbol{H_O}} - \underbrace{\sum_i \boldsymbol{r}_i \wedge m_i \boldsymbol{v}_G}_{\boldsymbol{r}_G \wedge M\boldsymbol{v}_G} - \underbrace{\boldsymbol{r}_G \wedge \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i}_{\boldsymbol{r}_G \wedge M\boldsymbol{v}_G} + \boldsymbol{r}_G \wedge M\boldsymbol{v}_G$$

$$\boldsymbol{H}_G^{SCM} = \boldsymbol{H}_O - \boldsymbol{r}_G \wedge M\boldsymbol{v}_G \tag{10}$$

Por otra parte, empleando las velocidades absolutas, aplicando (7) en G:

$$\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{H}_O - \boldsymbol{r}_G \wedge M\boldsymbol{v}_G \tag{11}$$

Se observa que ambos resultados (10) y (11) son iguales: $\boldsymbol{H}_G^{SCM} = \boldsymbol{H}_G$.

Magnitudes y teoremas en el CDM – Mom. cinético

Derivando (11) respecto del tiempo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_G = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_O - \underbrace{\boldsymbol{v}_G \wedge M\boldsymbol{v}_G}_{=\boldsymbol{0}} - \boldsymbol{r}_G \wedge \underbrace{M\boldsymbol{a}_G}_{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{M}_O - \boldsymbol{r}_G \wedge \boldsymbol{F}$$

pero

$$\boldsymbol{M}_G = \sum_i (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_G) \wedge \boldsymbol{F}_i^{\mathsf{ext}} = \boldsymbol{M}_O - \boldsymbol{r}_G \wedge \underbrace{\left(\sum_i \boldsymbol{F}_i^{\mathsf{ext}}\right)}_{\boldsymbol{F}},$$

luego:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{M}_G} \qquad (12)$$

Es decir, se verifica la ecuación del Momento Cinético (6) respecto del origen G del SCM, exactamente igual que si fuese inercial.

Magnitudes y teoremas en el CDM

Balance de momento cinético

- La ecuación del balance del momento cinético se puede expresar de estas dos maneras:
  1. Con momentos en un punto fijo O:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{M}_O}$$

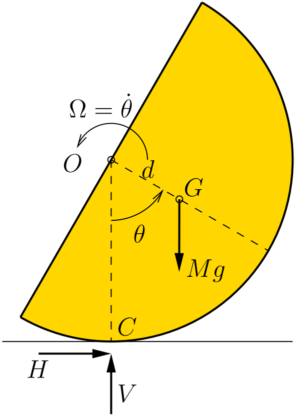
  2. Con momentos en el CDM G:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{M}_G}$$

- No se cumple en un punto cualquiera Q:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_Q \neq \boldsymbol{M}_Q$$

Ejemplo



$$\boxed{M_G = \mathrm{d}H_G/\mathrm{d}t = I_G\ddot{\theta}}$$

$$M_C \neq I_C\ddot{\theta}$$

Magnitudes y teoremas en el CDM

Energía cinética T (absoluta) y T^{SCM} (relativa al SCM):

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{\nu}_i) \cdot (\boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{\nu}_i)$$

$$= \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i \nu_i^2}_{\stackrel{\text{def}}{=} T^{SCM}} + \underbrace{\left(\sum_i m_i \boldsymbol{\nu}_i \right)}_{= \mathbf{0}} \cdot \boldsymbol{v}_G + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_G^2 \,,$$

Teorema de König

$$\boxed{T = \tfrac{1}{2} M v_G^2 + T^{SCM}} \qquad \text{(\textit{Teorema de König})} \qquad (13)$$

La energía cinética del sistema se puede descomponer en la suma de la de una partícula con toda la masa M que se moviera con G (traslación), más la energía cinética relativa al SCM.

En el SCM se cumple: $\boxed{\mathrm{d}T^{SCM} = \mathrm{d}W^{SCM}}$

- Cantidad de movimiento

$$\boxed{P_x = M\dot{x}_G\,; \quad P_y = M\dot{y}_G} \tag{14}$$

- Momento cinético
  - Punto fijo

$$\boxed{H_O = I_O\Omega} \tag{15}$$

  - Caso general

$$\boxed{H_G = H_G^{SCM} = I_G\Omega} \tag{16}$$

- Energía cinética
  - Punto fijo

$$\boxed{T = \tfrac{1}{2}I_O\Omega^2} \tag{17}$$

  - Caso general

$$\boxed{T = \tfrac{1}{2}Mv_G^2 + \tfrac{1}{2}I_G\Omega^2} \tag{18}$$

Sólidos en movimiento plano – Ecuaciones dinámicas

- Cantidad de movimiento

$$\boxed{F_x = M\ddot{x}_G\,; \quad F_y = M\ddot{y}_G} \tag{19}$$

- Momento cinético
  - Punto fijo

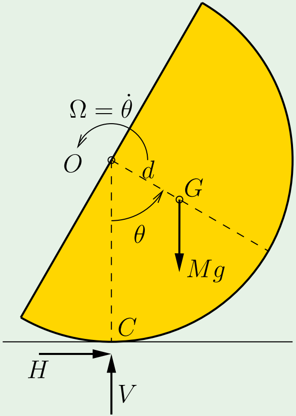
$$\boxed{M_O = I_O\dot{\Omega}} \tag{20}$$

  - Caso general

$$\boxed{M_G = I_G\dot{\Omega}} \tag{21}$$

Sistema del centro de masas – Ejemplo

Ejercicio.—



Un semidisco homogéneo de masa M y radio R se mueve en un plano vertical fijo, rodando sin deslizar sobre una recta horizontal. El semidisco se encuentra en una posición definida por θ y con velocidad de rotación $\Omega = \dot{\theta}$. Se pide:

1. Obtener los grados de libertad del sistema y discutir y obtener en su caso las integrales primeras
2. Obtener la aceleración angular $\dot{\Omega}$ y la reacción de la recta en el punto de contacto.

Solución

§1. Se trata de un sistema rígido y plano, que se puede resolver de forma general mediante las ecuaciones cardinales de la dinámica, que en este caso son tres (dos del balance de cantidad de movimiento y una del momento cinético en G). La condición de rodadura restringe dos grados de libertad, por lo que el movimiento tiene un sólo grado de libertad, aunque además debemos considerar las incógnitas de las componentes de la reacción en la recta (H, V).
En primer lugar, aplicando el teorema de Guldin calculamos la posición del centro de masas:

$$2\pi d\left(\frac{1}{2}\pi R^2\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \Rightarrow \quad d = \overline{OG} = \frac{4R}{3\pi}\,.$$

Solución

Las ecuaciones de la dinámica las aplicaremos tomando momentos en G, por lo que calculamos el momento de inercia en este punto. (Obsérvese que el punto de rodadura C no es un punto fijo, por lo que en general no es válido tomar momentos en él, aunque la tentación es fuerte ya que las reacciones incógnita no dan momentos en este punto.)

$$I_O = \frac{1}{2}MR^2; \quad I_G = I_O - Md^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)MR^2$$

Las fuerzas aplicadas son todas conservativas (peso) o bien no desarrollan trabajo (reacción sobre el semidisco, ya que no desliza). Por tanto se conserva la energía total, resultando una integral primera del movimiento:

$$\begin{aligned} E = T + V &= \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 - Mgd\cos\theta \\ &= \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2 - M\frac{4R^2}{3\pi}\dot{\theta}^2\cos\theta - Mg\frac{4R}{3\pi}\cos\theta = \text{cte.} \end{aligned}$$

Solución

§2. Las componentes de la aceleración de G son:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_G &= -R\ddot{\theta} - \frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta + \frac{4R}{3\pi}\ddot{\theta}\cos\theta \\
\ddot{y}_G &= \frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2 \cos\theta + \frac{4R}{3\pi}\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta
\end{aligned} \tag{1}$$

Las ecuaciones cardinales de la dinámica, tomando momentos en G, resultan:

$$\begin{aligned}
H &= M\left(-R\ddot{\theta} - \frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta + \frac{4R}{3\pi}\ddot{\theta}\cos\theta\right) \\
V - Mg &= M\left(\frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2 \cos\theta + \frac{4R}{3\pi}\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta\right) \\
H\left(R - \frac{4R}{3\pi}\cos\theta\right) - V\frac{4R}{3\pi}\operatorname{sen}\theta &= \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)MR^2\ddot{\theta}
\end{aligned} \tag{2}$$

Solución

Operando podemos despejar de estas tres ecuaciones los resultados buscados:

$$
\begin{aligned}
\ddot{\theta} &= -8\frac{(g/R+\dot{\theta}^2)\,\mathrm{sen}\,\theta}{9\pi - 16\cos\theta} \\
H &= \frac{4}{3}M\frac{(6g\pi - 3R\dot{\theta}^2\pi + 8R\dot{\theta}^2\cos\theta - 8g\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta}{\pi(9\pi - 16\cos\theta)} \\
V &= Mg + \frac{1}{3}M\,\frac{-32g\,\mathrm{sen}^2\theta + 36\pi R\dot{\theta}^2\cos\theta - 32R\dot{\theta}^2(1+\cos^2\theta)}{\pi(9\pi - 16\cos\theta)}
\end{aligned} \tag{3}
$$