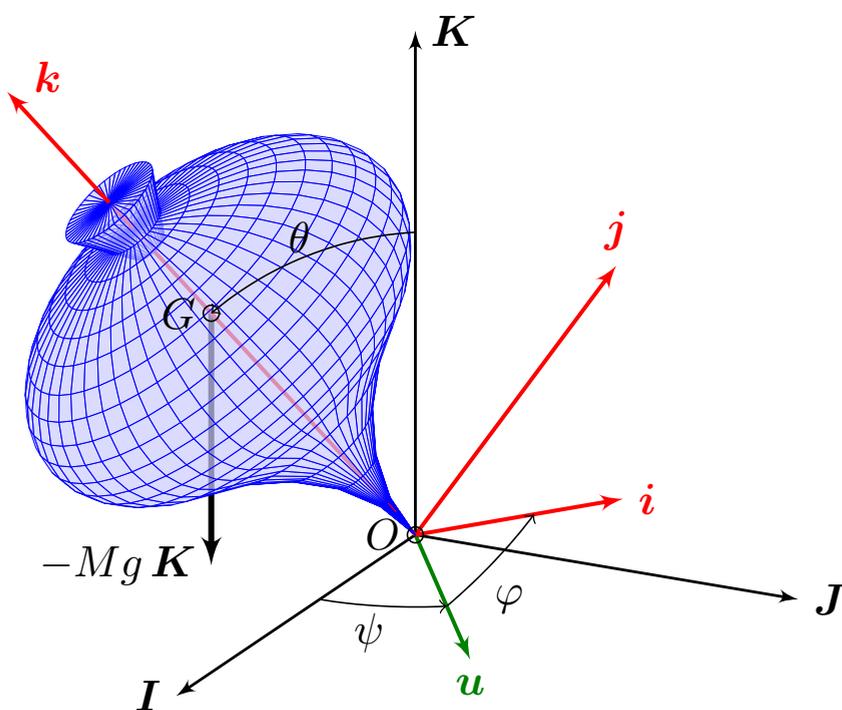


# CURSO BREVE DE DINÁMICA



JOSÉ M.<sup>a</sup> GOICOLEA RUIGÓMEZ, 2021

Primera edición revisada, mayo 2014 – mayo 2021

©2021 por José M.<sup>a</sup> Goicolea Ruigómez, todos los derechos reservados.

Queda prohibida la distribución de versiones de este documento modificadas sustancialmente sin el permiso explícito del propietario del derecho de copia (“copyright”).

La distribución de este trabajo o de derivaciones de este trabajo en cualquier forma de libro estándar (papel) queda prohibida a no ser que se obtenga previamente permiso del propietario del derecho de copia (“copyright”).

ISBN: xx-xxx-xxxx-x (pendiente)

Depósito Legal: M.xxxxx-xxxx (pendiente)

AGRADECIMIENTOS: Pablo Antolín (portada, figuras cap. 8)

---

# Índice general

<b>0. Introducción: Principios de la mecánica</b>	<b>1</b>
0.1. La mecánica como teoría científica . . . . .	1
0.2. Sistemas de referencia; espacio y tiempo . . . . .	5
0.3. Principio de la relatividad de Galileo . . . . .	6
0.4. Las leyes de Newton . . . . .	8
0.5. Conceptos de masa y fuerza . . . . .	11
0.6. La ley de la gravitación universal . . . . .	14
<b>1. Teoremas generales de dinámica de sistemas.</b>	<b>21</b>
1.1. Dinámica de la partícula . . . . .	22
1.2. Descripción de los sistemas mecánicos . . . . .	37
1.3. Principios y teoremas de Newton-Euler . . . . .	43
1.4. El sistema de referencia del centro de masas . . . . .	51
1.5. Principios basados en trabajos virtuales . . . . .	65
1.6. Dinámica en sistemas no inerciales. . . . .	72
<b>2. Dinámica analítica</b>	<b>81</b>
2.1. Coordenadas generalizadas . . . . .	82
2.2. Ecuaciones de Lagrange . . . . .	87
<b>3. Estática Analítica</b>	<b>109</b>
3.1. Consideraciones generales . . . . .	109
3.2. Condiciones analíticas del equilibrio . . . . .	112
3.3. Estabilidad del equilibrio . . . . .	115
3.4. Equilibrio de una partícula . . . . .	119
3.5. Equilibrio de un sistema de partículas . . . . .	124
3.6. Equilibrio del sólido rígido . . . . .	127

<b>4. Oscilaciones lineales con 1 grado de libertad</b>	<b>133</b>
4.1. El oscilador armónico simple . . . . .	134
4.2. Oscilaciones con amortiguamiento . . . . .	139
4.3. Oscilaciones forzadas . . . . .	146
4.4. Amplificación dinámica y resonancia . . . . .	151
<b>5. Oscil. lineales con varios grados de libertad</b>	<b>159</b>
5.1. Ecuaciones del movimiento . . . . .	160
5.2. Oscilaciones libres . . . . .	168
5.3. Oscilaciones forzadas . . . . .	184
5.4. Métodos para la obtención de modos y frecuencias propias . . . . .	188
<b>6. Cinemática del sólido rígido</b>	<b>191</b>
6.1. Velocidades y aceleraciones del sólido rígido . . . . .	191
6.2. Composición de movimientos . . . . .	209
6.3. Rotación finita del sólido . . . . .	218
<b>7. Ecuaciones de la dinámica del sólido rígido</b>	<b>231</b>
7.1. Conceptos generales . . . . .	232
7.2. Expresión de las magnitudes cinéticas . . . . .	237
7.3. El tensor de inercia . . . . .	240
7.4. Ecuaciones de la dinámica . . . . .	258
<b>8. Aplicaciones de la dinámica del sólido</b>	<b>265</b>
8.1. El péndulo esférico . . . . .	265
8.2. Movimiento por inercia . . . . .	269
8.3. La peonza simétrica . . . . .	280
8.4. Efecto giroscópico . . . . .	286
8.5. Dinámica del sólido en sistemas no inerciales . . . . .	291

## Apéndices

<b>A. Resumen de álgebra vectorial y tensorial</b>	<b>295</b>
A.1. Escalares, puntos y vectores . . . . .	296
A.2. Producto escalar y vectorial . . . . .	296
A.3. Bases y coordenadas . . . . .	297
A.4. Tensores de orden dos . . . . .	298
A.5. Cambio de base . . . . .	300
A.6. Operaciones y clases especiales de tensores . . . . .	301
A.7. Cambio de coordenadas de un tensor . . . . .	302

A.8. Coeficientes de permutación . . . . .	302
A.9. Forma cuadrática asociada a un tensor . . . . .	303
A.10. Vector axial asociado a un tensor hemisimétrico . . . . .	303
A.11. Traza y determinante . . . . .	304

**B. Expresiones de velocidad y aceleración en distintas coordenadas** **307**

B.1. Coordenadas cartesianas. . . . .	308
B.2. Coordenadas cilíndricas y polares. . . . .	308
B.3. Coordenadas esféricas. . . . .	310
B.4. Triedro intrínseco . . . . .	311



---

# 0. Introducción: Principios de la mecánica

## 0.1. La mecánica como teoría científica

DEFINICIÓN: *La mecánica es una teoría científica que estudia el movimiento de los cuerpos y sus causas, o bien el equilibrio, es decir, la falta de movimiento.*

Se trata de una *teoría científica* porque pretende interpretar fenómenos físicos que se observan experimentalmente. Para ello la mecánica parte de unos postulados o principios fundamentales, sobre los que se basa una teoría a través de modelos matemáticos, dando así una interpretación coherente a las observaciones experimentales. En la actualidad existen diversas teorías de la mecánica, y a lo largo del tiempo han existido muchas más que han quedado obsoletas bien por no ser prácticas en su aplicación, o bien por no adecuarse sus predicciones a la realidad física observada.

Para juzgar las teorías científicas, y en concreto la mecánica, no tiene sentido emplear criterios de «veracidad absoluta.» A pesar de que la mecánica tenga un elevado contenido de modelos matemáticos, habiendo sido a lo largo de la historia una de las motivaciones principales para el desarrollo de las matemáticas, no es la elegancia ni el rigor formal de estos modelos matemáticos un criterio adecuado para valorar una teoría de la mecánica. Cada teoría (y sus principios subyacentes) es tan buena como la interpretación que realiza de las observaciones experimentales de la realidad física. Si las predicciones teóricas se corresponden adecuadamente con las observaciones experimentales, la teoría será adecuada, independientemente de su «elegancia» matemática. Por el contrario, si los resultados no se corresponden con las observaciones, llegaremos a la conclusión de que se precisa otra teoría distinta para el fenómeno en cuestión.

Así, las tres teorías principales de la mecánica existentes en la actualidad

son:

**La Mecánica Clásica**, cuyo desarrollo moderno se considera generalmente iniciado por Newton (1687: «*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*») y continuado hasta nuestros días por diversos matemáticos y científicos: Juan, Daniel y Jacobo Bernouilli, L. Euler, J. D'Alembert, J.L. Lagrange, W. Hamilton, etc. Los modelos *newtonianos* fueron los primeros que lograron explicar satisfactoriamente al mismo tiempo el movimiento de los cuerpos celestes (observaciones de J. Kepler y otros sobre el movimiento de los planetas) y el de los cuerpos a escala humana (observaciones de G. Galilei sobre la caída de los cuerpos). Es importante tener en cuenta sin embargo las importantes contribuciones de L. Euler posteriores a Newton, incluyendo los principios y ecuaciones que permiten interpretar la dinámica de la rotación de los sólidos (apartado 1.3.2), y que no están incluidos en la obra de Newton. Por este motivo los denominaremos «*principios de Newton-Euler*».

**La Mecánica Relativista**, que suple la inexactitud de la mecánica clásica para velocidades próximas a la de la luz (teoría de la relatividad restringida) o para campos gravitatorios muy intensos (teoría de la relatividad generalizada). Ha sido propuesta por Albert Einstein en el siglo XX, e involucra una complejidad matemática notablemente mayor.

**La Mecánica Cuántica**, que surge de las observaciones de las partículas elementales, en las que intervienen acciones —productos de energía por tiempo— tan pequeñas que son comparables a la constante de Planck ( $Et \sim h$ ). En estos casos se aplica el principio de indeterminación de Heisenberg, que establece la imposibilidad de medir de manera precisa la posición y velocidad de la partícula al mismo tiempo, valores que conocemos tan sólo de manera probabilista. También ha sido propuesta en el siglo XX (Congreso de Solvay de Bruselas en 1927), por un grupo de científicos entre los que destacan L. de Broglie, E. Schrödinger y P. Dirac.

A pesar de las nuevas teorías de la mecánica surgidas recientemente, se puede afirmar que la *mecánica clásica* constituye una teoría coherente, capaz de proporcionar interpretaciones suficientemente precisas para la mayoría de los fenómenos que observamos.

La teoría de la relatividad es de un orden más general que la mecánica clásica. Cuando la velocidad es pequeña en relación con la de la luz y los campos gravitatorios no son muy intensos, sus predicciones corresponden con las de la

mecánica clásica. Sin embargo, es capaz interpretar correctamente otros fenómenos que la mecánica clásica no explica de manera adecuada<sup>1</sup>. Sería posible por tanto estudiar el movimiento de los objetos cotidianos como un automóvil o un balón, por ejemplo, mediante la teoría de la relatividad. Sin embargo, los modelos y los desarrollos matemáticos resultarían de una complejidad extraordinaria, por lo que este método es prácticamente inviable.

La mecánica clásica, a pesar de lo que su nombre parece indicar, no constituye una teoría muerta ni agotada en su desarrollo. En nuestros días se continúa investigando, especialmente en campos como la mecánica de medios continuos, o en los métodos cualitativos para el estudio de sistemas dinámicos complejos (estabilidad de sistemas dinámicos no lineales y movimientos de tipo caótico).

La *Mecánica de Medios Continuos* es un subconjunto especializado de la mecánica clásica. En ella se estudia el movimiento y la deformación de los medios continuos (es decir, aquéllos que no se pueden representar mediante idealizaciones discretas con un número finito de grados de libertad, como el punto material o el sólido rígido). Los modelos más simples de la mecánica de medios continuos son la teoría de la elasticidad lineal y la de los fluidos newtonianos, permitiendo estudiar respectivamente la deformación de los sólidos elásticos y las estructuras en régimen lineal y el flujo de los fluidos. Recientemente, se han propuesto modelos más generales para comportamientos no lineales, así como métodos y algoritmos muy potentes para su resolución numérica mediante el ordenador (método de los elementos finitos). Es necesario también una investigación experimental constante para conocer las propiedades mecánicas de los nuevos materiales (o incluso de los tradicionales, ya que algunos como el hormigón o los suelos son todavía insuficientemente conocidos).

La *Dinámica de sistemas no lineales complejos* permite estudiar el comportamiento de sistemas que no pueden ser caracterizados de manera determinista. La aparente falta absoluta de orden en su respuesta es debida a menudo a una sensibilidad extrema a la variación de las condiciones iniciales u otros parámetros del sistema, lo que conduce a la denominación de «*sistemas caóticos*». Estos sistemas precisan ser analizados mediante métodos cualitativos, propuestos a final del siglo XIX por H. Poincaré y Liapounov, en lugar de los métodos cuantitativos y deterministas habituales. También en este caso el ordenador es una herramienta de gran utilidad.

---

<sup>1</sup>Un ejemplo lo constituye el corrimiento del perihelio (punto de la órbita más cercano al Sol) observado para algunos planetas, especialmente el de Mercurio, el planeta más cercano al Sol y cuya órbita es la más excéntrica (salvo la de Plutón). En efecto, se observa un avance de su perihelio de unos 574 segundos de arco por siglo, y considerando el efecto gravitacional de los restantes planetas, la dinámica clásica sólo predice unos 531 segundos por siglo. Los restantes 43 segundos son obtenidos de manera muy precisa por la teoría de la relatividad, lo que constituye una contundente confirmación de la misma.

Este curso está basado en la *Mecánica Clásica*, desarrollada a partir de los principios y teoremas newtonianos. Esta se aplicará fundamentalmente a sistemas discretos formados por partículas o masas puntuales, sólidos rígidos, resortes, etc., aunque se hará alguna incursión en medios deformables, como por ejemplo los cables. La mecánica de medios continuos se tratará en otras asignaturas de cursos posteriores, como la resistencia de materiales, elasticidad y plasticidad, la geotecnia, el cálculo de estructuras, la hidráulica, etc. Sin embargo los conceptos básicos para todas estas asignaturas son los mismos que se estudian en este curso de mecánica.

Como se ha dicho, en la mecánica juegan un papel importante las matemáticas, ya que se basa en modelos matemáticos que interpreten las observaciones experimentales. El aparato matemático en algunos casos puede resultar de cierta complejidad. Es importante no perder de vista, sin embargo, el sentido físico de los conceptos: Las matemáticas no son un fin en sí, sino un medio para interpretar conceptos y fenómenos físicos. Aunque los modelos matemáticos empleados aquí puedan ser más generales (y más complejos por tanto) que los estudiados en cursos anteriores, no conviene que oscurezcan nunca la interpretación física intuitiva de los conceptos.

Uno de los postulados esenciales de la mecánica es la causalidad determinista, lo que ha permitido superar interpretaciones mágicas o religiosas existentes antaño para algunos fenómenos, como el movimiento de los astros y otros fenómenos del firmamento celeste. Aún en nuestros días existen personas que creen en dicho tipo de interpretaciones (por ejemplo los astrólogos y sus seguidores), fruto por lo general de la ignorancia o del miedo a la verdad científica. Sin embargo, conviene admitir que, en ciertas situaciones, el postulado de la causalidad determinista en sentido estricto es cuestionable, siendo necesario acudir a métodos probabilistas para describir los fenómenos (como en la mecánica estadística, basada en la causalidad probabilista) o a métodos cualitativos de análisis (por ejemplo en los sistemas caóticos, en los que no es posible predecir el movimiento como ecuaciones horarias, ya que cualquier pequeña perturbación inicial lo modifica). En cualquier caso, es conveniente evitar un exceso de celo en la aplicación de los modelos deterministas de la mecánica, ya que no debemos olvidar que nuestra percepción de la «realidad física» es necesariamente subjetiva.

Por otra parte, se postula también la capacidad de definir un conjunto de causas suficientemente reducido para explicar los fenómenos. Las causas muy alejadas en el espacio o en el tiempo no tienen efecto sobre las observaciones de fenómenos presentes. Esto también es cuestionable para interpretaciones muy generales: No es posible prescindir de la estructura del cosmos en el instante posterior a la primera gran explosión (big-bang) para explicar la existencia de

las galaxias, estrellas y planetas actuales; asimismo parece que algunos fenómenos cosmológicos no se pueden interpretar sin recurrir a la materia oscura existente en el universo, de naturaleza aún desconocida (agujeros negros, neutrinos, ...).

## 0.2. Sistemas de referencia; espacio y tiempo

Los fenómenos mecánicos se describen mediante «sistemas de referencia<sup>2</sup>,» basados en los conceptos de espacio y tiempo. Por su importancia conviene enunciar los postulados que asume la mecánica clásica para estos conceptos.

El *espacio*, y por tanto su métrica, tiene las propiedades siguientes.

1. *Independencia* de los objetos: La métrica y demás propiedades del espacio no se ve afectada por los objetos en él inmersos, ni siquiera por los muy masivos.
2. *Constancia*: Las propiedades del espacio son invariantes y no se modifican a lo largo del tiempo
3. *Homogeneidad*: las propiedades del espacio son iguales en todos los puntos, no existiendo puntos privilegiados.
4. *Isotropía*: las propiedades del espacio son iguales en todas las direcciones, no existiendo tampoco direcciones privilegiadas.

El espacio se caracteriza por una métrica Euclídea<sup>3</sup>, lo que lo convierte en un espacio puntual Euclídeo en 3 dimensiones, asimilable a  $\mathbb{R}^3$ .

El *tiempo* se caracteriza a su vez por las siguientes propiedades.

1. *Homogeneidad*: las propiedades del tiempo son iguales a lo largo del mismo y no existen instantes privilegiados.
2. Fluye *constantemente en un sentido*, por lo que no se puede retroceder ni volver al pasado. Asimismo, los fenómenos futuros no pueden condicionar los presentes. No se cumple por tanto la isotropía para el tiempo, existiendo un único sentido en el que puede ocurrir.

---

» <sup>2</sup>No se debe confundir el término *sistema mecánico* (conjunto de partículas o cuerpos cuyo movimiento se desea estudiar) con *sistema de referencia* (triedro de ejes, coordenadas o parámetros que sirven para describir dicho movimiento).

<sup>3</sup>La distancia entre dos puntos definidos por sus coordenadas cartesianas rectangulares  $(x_1, y_1, z_1)$  y  $(x_2, y_2, z_2)$  viene dada por  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

3. *Simultaneidad absoluta*: Los fenómenos considerados simultáneos para dos observadores en sendos sistemas de referencia, lo son asimismo para cualquier otro observador ligado a cualquier otro sistema de referencia.

En mecánica clásica, el tiempo se considera una variable de naturaleza distinta de las variables espaciales, y la métrica euclídea no está influenciada por él.

Algunos de estos postulados básicos no son aceptados por la mecánica relativista. La teoría de la relatividad restringida establece una referencia en cuatro dimensiones espacio-tiempo. La teoría de la relatividad general establece un espacio curvado, con métrica Riemanniana no Euclídea, debido a la presencia de masas que condicionan dicha métrica. De esta forma el espacio no sería independiente de los objetos en él inmersos.

### 0.3. Principio de la relatividad de Galileo

Este principio fue formulado por Galileo como parte de su argumentación a favor del modelo copernicano del giro de la tierra alrededor de su eje, en su obra *Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo*<sup>4</sup>. En síntesis, se puede enunciar de la siguiente forma:

*‘Dos sistemas de referencia en movimiento relativo de traslación rectilínea uniforme son equivalentes desde el punto de vista mecánico; es decir, los experimentos mecánicos se desarrollan de igual manera en ambos, y las leyes de la mecánica son las mismas.’*

En esta obra Galileo propone el conocido ejemplo de una nave moviéndose con velocidad uniforme, en el cual las piedras y las balas de cañón caen según las mismas leyes de la gravedad. Estas observaciones en un camarote cerrado no permiten definir si el barco se mueve o está varado. En ambos casos si la caída parte del reposo (relativo) y despreciando la resistencia del aire se produce un movimiento vertical uniformemente acelerado.

---

<sup>4</sup>Galileo Galilei, *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, tolemaico e copernicano*, 1632; las propuestas anteriores de Aristóteles y Ptolomeo mantenían que la tierra estaba quieta y era la esfera celeste la que realizaba una revolución completa cada veinticuatro horas. La publicación de este libro le valió a Galileo en 1633 la condena por el tribunal de la inquisición a reclusión perpetua para el resto de su vida.

<sup>5</sup>En el apartado 1.4.5 se ofrece una generalización de esta transformación y se discute la relación de las simetrías que expresa (invariancias cuando se produce la transformación) con las constantes del movimiento y los principios de conservación.

**Transformación de Galileo**<sup>5</sup>.— Sea un sistema móvil  $(O'x'y'z')$ , que se traslada respecto a otro fijo  $(Oxyz)$  con velocidad  $\mathbf{v}$ , manteniéndose paralelos los ejes de ambos. Puesto que podemos elegir las direcciones del triedro de refe-

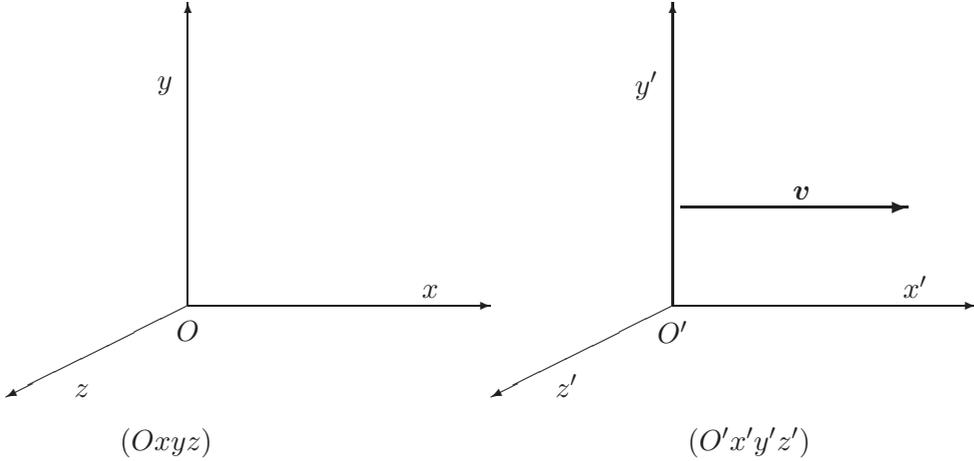


Figura 1: *Sistemas de referencia en movimiento relativo rectilíneo y uniforme, con velocidad  $v$  en la dirección de  $Ox$*

rencia, elegimos la dirección  $Ox$  según la dirección de la velocidad de traslación (recordemos que el espacio es isotrópico, por lo que es lícito elegir una orientación arbitraria para los ejes, sin pérdida de generalidad). Consideraremos también que Inicialmente (para  $t = 0$ )  $O$  y  $O'$  coinciden.

Sean  $(x, y, z)$  las coordenadas de un punto en el sistema fijo,  $(x', y', z')$  en el móvil y  $v$  el módulo de la velocidad. Las ecuaciones de transformación para las coordenadas son:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (1)$$

Derivando sucesivamente<sup>6</sup>, obtenemos las velocidades y aceleraciones en ambos sistemas:

$$\begin{cases} \dot{x}' = \dot{x} - v \\ \dot{y}' = \dot{y} \\ \dot{z}' = \dot{z} \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x}' = \ddot{x} \\ \ddot{y}' = \ddot{y} \\ \ddot{z}' = \ddot{z} \end{cases}$$

Se observa por tanto que las derivadas segundas (aceleraciones) coinciden. Esto nos permite intuir —admitiendo como postulado el principio de la relati-

<sup>6</sup>En lo sucesivo se empleará la notación de uno o dos puntos superpuestos para indicar derivadas (totales) respecto al tiempo:  $\dot{x} \stackrel{\text{def}}{=} dx/dt$ ,  $\ddot{x} \stackrel{\text{def}}{=} d^2x/dt^2$ . También emplearemos la notación mediante negritas para identificar vectores o tensores:  $\mathbf{a} \equiv \{a_i\}$ ,  $\mathbf{I} \equiv [I_{kl}]$ .

vidad galileana— que las leyes de la dinámica están basadas en las derivadas segundas respecto al tiempo, única forma de que las leyes sean invariantes cumpliéndose dicho principio. En efecto, según sabemos, el estado de un sistema formado por un partícula en movimiento según una dirección fija se caracteriza en un instante dado por su posición y su velocidad  $(x, \dot{x})$ . La evolución del movimiento viene gobernada por la ecuación dinámica ( $F = m\ddot{x}$ ).

## 0.4. Las leyes de Newton

Formuladas por Isaac Newton en su obra «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica» (1687), constituyen el primer intento de formular una base axiomática para una teoría científica de la mecánica. Debe aclararse que no fueron formuladas por Newton de forma precisa como se suelen recoger hoy en día en los libros de texto. También debe advertirse que en sentido riguroso no recogen de forma completa toda la axiomática necesaria para la mecánica clásica, siendo necesario incorporar aportaciones adicionales de Euler, Cauchy y otros. A pesar de esto, la publicación de los «principia» constituye un hito monumental de enorme valor, sobre el que se cimienta la mecánica clásica.

Para aclarar el modelo axiomático de Newton citaremos aquí textualmente de los «Principia»<sup>7</sup>. Newton parte en primer lugar de cuatro definiciones:

*‘DEFINICION PRIMERA. La cantidad de materia es la medida de la misma originada de su densidad y volumen conjuntamente.’*

*‘DEFINICION II. La cantidad de movimiento es la medida del mismo obtenida de la velocidad y de la cantidad de materia conjuntamente.’*

*‘DEFINICION III. La fuerza ínsita de la materia es una capacidad de resistir por la que cualquier cuerpo, por cuanto de él depende, perservera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo.’*

*‘DEFINICION IV. La fuerza impresa es la acción ejercida sobre un cuerpo para cambiar su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo.’*

La definición primera (cantidad de materia de un cuerpo) equivale a lo que conocemos por *masa*. La tercera caracteriza las denominadas *fuerzas de inercia*, mientras que la cuarta se refiere a las *fuerzas* propiamente dichas.

---

<sup>7</sup>Las citas han sido extraídas de Isaac Newton, *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural* (2 tomos), traducción española de Eloy Rada, Alianza Editorial, 1987.

Realizadas estas definiciones, Newton enuncia sus conocidas tres leyes o principios fundamentales:

*‘LEY PRIMERA. Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento rectilíneo y uniforme a no ser en tanto que sea obligado por fuerzas impresas a cambiar su estado.’*

Esta ley constituye el llamado principio de la inercia. Admitiendo también el principio de Galileo, nos permite definir los llamados *sistemas inerciales*, como aquellos en los que se cumple dicho principio. Las leyes de la mecánica se formulan en un sistema inercial de referencia. Por el principio de Galileo, admitiendo que existe al menos un tal sistema inercial, existirán infinitos sistemas inerciales en los que se cumplen las mismas leyes mecánicas y en concreto la ley primera de Newton: todos aquellos relacionados entre sí mediante transformaciones de Galileo (1), es decir, que se mueven con velocidad rectilínea y uniforme respecto al primero.

Este principio nos permite también definir, como condiciones iniciales del movimiento, las que caracterizan a un movimiento estacionario o constante: la posición  $\mathbf{r}$  y la velocidad  $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathbf{r}}$ .

Conviene observar también que Newton emplea el término «cuerpo» para referirse en realidad a una partícula, o punto material, caracterizada por la posición y velocidad de un solo punto<sup>8</sup>.

*‘LEY II. El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime.’*

Esta ley indica claramente una relación lineal («proporcional») entre fuerzas y variaciones de la cantidad de movimiento, de tipo vectorial («según la línea recta»). Se denomina en ocasiones *ley fundamental de la dinámica*, permitiendo obtener las ecuaciones básicas de la misma. Expresada como ecuación con la notación actual, equivale a:

$$\Delta m\mathbf{v} = \mathbf{F}\Delta t, \quad (2)$$

donde el lado izquierdo representa el incremento de la cantidad de movimiento y el derecho la impulsión de la fuerza, supuesta constante durante el intervalo  $\Delta t$ .

---

<sup>8</sup>El tratamiento de los sólidos rígidos, así como el de sistemas generales formados por varias partículas, requiere de diversos principios y teoremas adicionales que fueron propuestos por L. Euler. De esto se tratará en los capítulos 1 y 7.

Pasando al límite, para un incremento infinitesimal de tiempo, obtenemos la relación diferencial siguiente:

$$d(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}dt. \quad (3)$$

O bien, llamando a la *cantidad de movimiento*  $\mathbf{p} \stackrel{\text{def}}{=} m\mathbf{v}$ ,

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}. \quad (4)$$

Admitiremos en principio que la masa de un cuerpo se conserva. Así pues,  $\dot{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{a}$ , siendo  $\mathbf{a}$  la aceleración<sup>9</sup>. Se llega a la conocida expresión que define la ley del movimiento de una partícula:

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}}, \quad (5)$$

Cabe realizar en relación con esta fórmula las siguientes

OBSERVACIONES:

- La aceleración, derivada segunda del vector posición, es asimismo un vector. La ecuación (5) tiene por tanto carácter vectorial, lo que identifica a las fuerzas como vectores, e implícitamente supone la aditividad vectorial para las mismas (ley del paralelogramo de fuerzas).
- La expresión (5) da lugar a ecuaciones diferenciales de segundo orden, ya que intervienen derivadas segundas de la incógnita  $\mathbf{r}$  respecto al tiempo.

*‘LEY III. Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria. O sea, las acciones mutuas de los cuerpos siempre son iguales y dirigidas en direcciones opuestas.’*

Se trata del llamado principio de acción y reacción. Todas las fuerzas deben de tener contrapartida, siendo imposible ejercer una fuerza desde el vacío, sin apoyo. Es siempre necesario apoyarse en algún cuerpo o medio material que absorba la reacción (modificando a su vez el movimiento de este otro cuerpo, según la segunda ley).

EJEMPLO 0.1: *Fuerza ejercida desde la superficie de la Tierra.* Todo cuerpo cercano a la tierra, tanto en estado de movimiento (caída libre) o en reposo sobre el suelo, *recibe* una fuerza (denominada peso) ejercida por la tierra, que lo mueve en el primer caso o lo mantiene inmóvil en el segundo. El cuerpo a su vez ejerce sobre la tierra una fuerza igual y contraria, aunque esta última, debido a la gran masa de la tierra, produce un efecto muy pequeño sobre nuestro planeta.

<sup>9</sup>Recordamos que la notación del punto superpuesto significa derivada temporal,  $\dot{\mathbf{p}} = d\mathbf{p}/dt$ ,  $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = d\mathbf{v}/dt$

EJEMPLO 0.2: *Movimiento de un cohete en el vacío.* Una fuerza no se puede ejercer sobre el vacío, necesitando siempre aplicarse sobre otro cuerpo (que a su vez producirá una reacción igual sobre el primero). Para moverse —o más bien acelerar o frenar, es decir, variar el movimiento— en el vacío, un cohete o sonda espacial necesita apoyarse sobre algún medio. Esto se consigue mediante masa expulsada por la tobera, medio en el cual se *apoya* el cohete, a través de la expulsión de los gases del combustible quemado, propulsión iónica, plasma, u otros medios.

## 0.5. Conceptos de masa y fuerza

Las leyes de Newton reposan sobre las definiciones básicas de masa y fuerza. Sin embargo, examinando dichas leyes con espíritu crítico, es fácil ver que las definiciones realizadas por Newton de estos conceptos adolecen de algunas deficiencias.

La definición de fuerza (definición IV, pág. 8) es claramente circular con la primera ley. En efecto, se podría entender ésta como una definición de fuerza, obviando la definición anterior dada por Newton. Aún aceptando esto, tampoco se puede considerar esta ley como una definición precisa de fuerza, ya que no proporciona una manera de medir su valor de forma cuantitativa. En realidad tan sólo se podría deducir de la primera ley cuándo la fuerza es nula o cuándo no lo es. La segunda ley sin embargo sí se puede interpretar como una definición cuantitativa de fuerza, pero ésto la privaría a su vez de su consideración como principio.

En cuanto a la definición de masa (definición I, pág. 8), Newton la refiere a la densidad ( $\rho$ ) y volumen ( $V$ ) que integran un cuerpo ( $M = \rho V$ ). ¿Cuál sería entonces la definición de densidad? Es difícil aceptar que la densidad sea un concepto más fundamental que el de masa.

Un procedimiento aparentemente más riguroso para definir la masa es el debido a E. Mach<sup>10</sup> (1858-1916), que resumimos a continuación.

Sean dos partículas,  $a$  y  $b$ , formando un sistema binario aislado. Expresando la segunda ley de Newton para la partícula  $a$ :

$$m_a \mathbf{a}_a = \mathbf{F}_{ab},$$

donde  $\mathbf{F}_{ab}$  es la fuerza ejercida sobre  $a$  por  $b$ . Análogamente para  $b$ ,

$$m_b \mathbf{a}_b = \mathbf{F}_{ba} = -\mathbf{F}_{ab},$$

---

<sup>10</sup>E. Mach, *The science of mechanics*, traducción al inglés, Open Court, 1902.

por la 3.<sup>a</sup> ley de Newton. Así,

$$m_a \mathbf{a}_a = -m_b \mathbf{a}_b,$$

y empleando los módulos de las aceleraciones  $a_a$  y  $a_b$ ,

$$\frac{m_b}{m_a} = -\frac{a_a}{a_b}.$$

Suponiendo la masa  $m_a$  como valor de referencia o definición de unidad de masa, este procedimiento nos permite medir la masa de cualquier partícula  $b$  a partir de la medición de las aceleraciones  $a_b$  y  $a_a$ .

Aunque aquí, por clarificar la explicación, se ha llegado a esta definición partiendo de las leyes de Newton, sería posible considerarla como definición básica de masa, para comprobar posteriormente que, efectivamente, es consistente con las leyes de Newton.

De esta forma, con el espíritu crítico mencionado, cabría considerar las leyes primera y segunda de Newton como definiciones de fuerza, con lo que la única ley que expresa un postulado básico de la mecánica sería la ley tercera. Según Mach por tanto, es la ley tercera de Newton (principio de acción y reacción) la que reviste mayor importancia en la axiomática de la mecánica clásica.

En relación con esta última ley, puede ser objeto de cierta polémica la consecuencia implícita de existencia de *acciones a distancia*, es decir acciones que se propagan de manera instantánea (con velocidad infinita). En efecto, si se suponen dos cuerpos alejados entre sí con fuerzas de interacción centrales (dirigidas según la recta que las une), y uno de ellos sufre un cambio de posición, la ley de acción y reacción obligaría a que la fuerza de reacción sobre la otra partícula modificase su dirección de manera instantánea<sup>11</sup>.

En la realidad física parece que no existen tales interacciones instantáneas; respondiendo a ello la teoría de la relatividad restringida establece un límite a la velocidad de propagación de las interacciones, que es la velocidad de la luz en el vacío ( $c$ ). Esto origina una cierta inexactitud de la mecánica clásica, error que sin embargo es muy pequeño para las fuerzas gravitatorias o elásticas en objetos «cotidianos.»

Conviene observar también que de la tercera ley se pueden hacer dos enunciados. En su *forma débil*, ciñéndose estrictamente al enunciado Newtoniano,

<sup>11</sup>Históricamente ha existido siempre, antes y después de Newton, una contestación a la posibilidad de tales acciones a distancia. Antigüamente se defendía que todo el espacio estaba lleno de una sustancia invisible, llamada «Éter,» vehículo transmisor de las fuerzas. Este concepto sobrevivió a Newton, alcanzando su mayor predicamento dos siglos después para explicar el campo electromagnético, siendo la Teoría de la Relatividad la que acabó de desterrarlo.

establece que las fuerzas son iguales en magnitud y dirección y de sentido opuesto. Sin embargo, no presupone que tengan la misma dirección que la recta que une a las dos partículas sobre las que actúan. En el caso en que sí se verifique esta última hipótesis más restrictiva, se dice que se cumple el principio de acción y reacción en su *forma fuerte*, siendo las fuerzas centrales. En numerosos casos prácticos se verifican ambos enunciados del principio de acción y reacción, como son las fuerzas gravitatorias, elásticas, o electrostáticas. Sin embargo, existen fenómenos importantes en los que no se verifica en ninguna de sus dos formas. Estos casos corresponden a fuerzas que dependen de la velocidad, ligadas por lo general a campos que se propagan con velocidad finita, como son las fuerzas electrodinámicas debidas a cargas en movimiento.

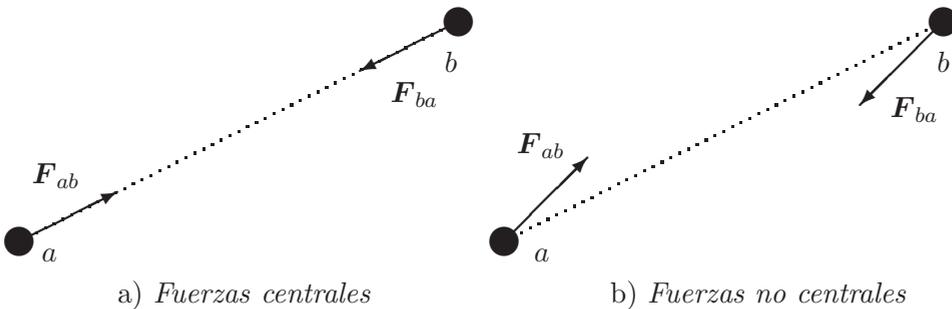


Figura 2: Las fuerzas centrales están dirigidas según la recta que une los cuerpos, mientras que las fuerzas no centrales no verifican esta hipótesis, aún siendo iguales en magnitud y dirección y de sentido opuesto.

En resumen, podemos clasificar las fuerzas citadas esquemáticamente como sigue.

- *Fuerzas centrales*: Están asociadas a campos que suponen una acción a distancia, propagándose por tanto de manera instantánea. Se trata de fuerzas dirigidas hacia las partículas que las originan, cumpliendo la tercera ley de Newton en su *forma fuerte*. En mecánica clásica se admite esta hipótesis como adecuada para algunos de los tipos más usuales de fuerzas:
  - *Fuerzas gravitatorias*. La hipótesis de fuerza central e instantánea se considera adecuada para las mediciones en escalas usuales. Sin embargo, para mediciones a escalas astronómicas o cosmológicas se trata de una hipótesis cuestionable. Sería más correcto interpretarlas mediante ondas de gravedad, que se propagan con la velocidad de la luz.

- *Fuerzas electrostáticas o magnetostáticas*, de atracción o repulsión debidas a cargas eléctricas o magnéticas en reposo. Al igual que en el caso gravitatorio, de forma rigurosa para escalas astronómicas puede ser necesario considerar la transmisión de dichas fuerzas a través de ondas electromagnéticas.
- *Fuerzas elásticas*, ejercidas entre las partículas en contacto de un medio continuo. Por lo general, podría admitirse que son manifestaciones macroscópicas de las fuerzas electrostáticas entre las moléculas.
- *Fuerzas no centrales*: ocurren, por lo general, cuando las interacciones dependen de la velocidad, estando asociadas a campos que se propagan con velocidad finita. Es el caso, por ejemplo, de las *Fuerzas electromagnéticas*, que cuando son debidas a cargas móviles pueden no cumplir tampoco el principio de acción y reacción en su forma débil.

Debe quedar claro que en este curso admitiremos la hipótesis de *fuerzas centrales*, por lo que será válido el principio de acción y reacción en su forma fuerte.

La definición de masa según el procedimiento de Mach arriba descrito no proporciona sin embargo un método viable para medirla. Sería prácticamente imposible aislar completamente un sistema binario y al mismo tiempo realizar mediciones. Una forma más práctica de medir la masa, aunque de forma indirecta, es con una balanza de resorte. En ésta lo que se mide directamente es el peso, o atracción gravitatoria hacia el centro de la Tierra. Basta dividir el peso ( $w$ ) por la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra ( $g$ ) para obtener la masa<sup>12</sup>:

$$w = mg \quad \Rightarrow \quad m = \frac{w}{g}.$$

## 0.6. La ley de la gravitación universal

Newton fue el primero en explicar el movimiento, tanto de los cuerpos celestes —proporcionando la explicación matemática de las leyes observadas por

---

<sup>12</sup>No debe originar confusión la existencia de dos unidades con el mismo nombre para caracterizar magnitudes distintas: el kg de masa, y el kg de fuerza o kilopondio (kp), definido como el peso de 1 kg de masa en la superficie de la tierra, considerando un valor medio constante de la aceleración de la gravedad (1 kg fuerza  $\simeq$  9,81 N). Ello permite hablar —afortunadamente para los tenderos, fruteros, pescaderos y demás gremios poco interesados en la filosofía de la mecánica durante su quehacer cotidiano— simplemente de kg, sin necesitar especificar si se trata de masa o de peso, ya que en la superficie de la tierra ambos son equivalentes, al menos en una primera aproximación en que  $g$  se suponga constante.

Kepler para el de los planetas en órbitas elípticas—, como de los «terrestres» —la famosa caída de la manzana—, a partir de una única ley para las fuerzas: la ley de la gravitación universal. Anteriormente, los estudios y teorías de la mecánica habían buscado explicaciones separadas para ambos fenómenos. Kepler había deducido del análisis minucioso de las observaciones experimentales que los planetas describían elipses con foco en el Sol, así como la constancia de la velocidad areolar y el período de estos movimientos orbitales. A su vez, Galileo había caracterizado el movimiento de caída uniformemente acelerado de los graves, por —según la leyenda— experimentos desde la torre inclinada de Pisa. Todas estas descripciones eran empíricas, sin una justificación basada en modelos matemáticos coherentes.

La ley de la gravitación universal propuesta por Newton establece que entre dos cuerpos<sup>13</sup> cualesquiera se produce una fuerza gravitatoria de atracción, proporcional al producto de las masas respectivas y al inverso del cuadrado de la distancia entre los mismos. La expresión de esta fuerza, en módulo, es

$$F = G \frac{Mm}{r^2},$$

y en forma vectorial

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r}, \quad (6)$$

donde  $\mathbf{F}$  representa la fuerza ejercida por la masa  $M$  sobre  $m$ , y  $\mathbf{r}$  es el vector que las une, con origen en  $M$  y extremo en  $m$ .

En la mecánica clásica, la fuerza gravitatoria es una acción a distancia que, de manera muy aproximada, podemos suponer se transmite de forma instantánea, sin necesitar de ningún medio material para ello. Así, cada masa  $M$  crea un campo de fuerzas gravitatorio, campo vectorial caracterizado en cada punto por una intensidad  $\mathbf{i}$ :

$$\mathbf{i} \stackrel{\text{def}}{=} -G \frac{M}{r^3} \mathbf{r};$$

La fuerza ejercida sobre un cuerpo de masa  $m$  será el producto de ésta por la intensidad del campo,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{i} = -G \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r}.$$

La teoría de la relatividad general elimina las fuerzas gravitatorias; para ello, interpreta el efecto de las masas como una modificación a la métrica

---

<sup>13</sup>Debe entenderse «cuerpo» en el sentido de partícula, tal y como emplea Newton este término (pág. 9).

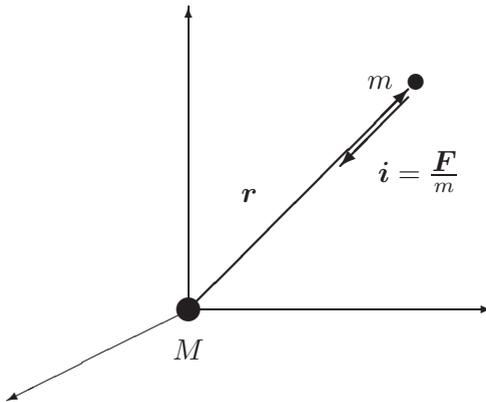


Figura 3: *Atracción gravitatoria entre dos masas  $M$  y  $m$ , situadas a distancia  $r$*

espacio-tiempo, que resulta ser Riemanniana en lugar de Euclídea. Así, en esta nueva métrica, las trayectorias de las partículas corresponden a las geodésicas del espacio-tiempo, que vendrían a ser las ecuaciones horarias del movimiento<sup>14</sup>.

### 0.6.1. Masa gravitatoria y masa inerte.

En principio, el concepto de masa que interviene en la ley de la gravitación no tendría porqué coincidir con la masa empleada para la ley II de Newton; en el primer caso sirve para definir la fuerza gravitatoria, mientras que en el segundo define la fuerza de inercia. Podemos distinguirlas por tanto denominándolas  $m_g$  (masa gravitatoria) y  $m_i$  (masa inerte).

Existe, sin embargo, una observación experimental: en la superficie de la tierra todos los cuerpos caen en el vacío hacia el suelo con la misma aceleración ( $g$ ). Sea un cuerpo cualquiera en la superficie de la tierra; su peso es

$$w = G \frac{M_g m_g}{R^2},$$

donde  $M_g$  y  $m_g$  son las masas respectivas (gravitatorias) de la Tierra y del cuerpo,  $R$  es el radio de la tierra (suponemos el cuerpo a una altura  $h$  pequeña, por lo que  $R + h \approx R$ ), y  $G$  es la constante de la gravitación universal.

<sup>14</sup>En la mecánica clásica la trayectoria seguida por una partícula sometida a la acción gravitatoria de otra es una cónica. Podríamos plantearnos, en la teoría de la relatividad general, qué trayectoria seguiría un cuerpo en un universo homogéneo, pero en cualquier caso no resulta ser una cónica. En un caso sencillo, con una única masa aislada, la métrica de Schwarzschild creada por ésta conduce a órbitas que no se cierran, lo que puede explicar algunos fenómenos bien conocidos como el corrimiento del perihelio de Mercurio.

Empleando la segunda ley de Newton, se puede relacionar el peso con la aceleración que experimenta el cuerpo:

$$w = m_i g,$$

siendo  $m_i$  la masa (inercial) del mismo. Igualando ambas expresiones de  $w$  se obtiene:

$$\frac{m_i}{m_g} = \frac{M_g G}{\underbrace{gR^2}_{\text{constante}}}.$$

Así, el cociente  $m_i/m_g$  permanece constante. Ya que  $G$  es una constante cuyo valor puede ser cualquiera, es posible elegir el mismo de forma que este cociente sea la unidad. De esta forma, ambas masas tendrían siempre igual valor:

$$m_i \equiv m_g.$$

Para ello, el valor de la constante de la gravitación universal ha de ser

$$G = \frac{gR^2}{M}.$$

**Consideraciones sobre el universo.**— Supongamos que el universo tiene un tamaño finito, y que, de forma aproximada, se puede idealizar como una esfera, con una distribución de masa de densidad media  $\rho$ . Sea un cuerpo de masa  $m$ , situado a una distancia  $R$  del centro de dicha esfera; este experimentaría una fuerza atractiva hacia el centro del universo de valor:

$$F = \underbrace{\left(\frac{4}{3}\pi R^3 \rho\right)}_{\text{masa esfera}} \frac{mG}{R^2} = \frac{4}{3}\pi \rho mGR.$$

Así, todos los cuerpos del universo experimentarán una aceleración hacia el centro de aquél de valor creciente proporcionalmente a su distancia  $R$ . Si esto fuese así, desde un punto distinto del centro del universo se observaría un movimiento diferente de las estrellas y galaxias según las distintas direcciones de observación; en la dirección del radio creciente, la aceleración sería mayor, mientras que en la opuesta disminuiría. Sin embargo, esto no parece concordar con las observaciones experimentales medidas desde la Tierra.

¿Cómo se puede explicar esto, admitiendo que el universo es finito? Una posible explicación sería una teoría «antropocéntrica», según la que el planeta Tierra tendría el inmenso privilegio de estar situado justo en el centro del

universo. De esta forma, nuestras observaciones deberían ser iguales en cualquier dirección, ya que todas serían radiales. Sin embargo, fuera de creencias pseudo-religiosas, la teoría antropocéntrica parece poco probable. Más bien, la observación anterior podría explicarse por una de las siguientes dos hipótesis:

1. El universo es homogéneo, isótropo e infinito. Sin embargo, esta suposición es incompatible con la teoría, generalmente aceptada en la actualidad, del «Big-Bang» como origen del universo. Esta primera explosión primigenia ocurrió al parecer hace unos diez mil millones de años, lo que establece un límite para el tamaño del universo.
2. El universo es finito, pero con una métrica no euclídea, en la que todos los puntos pueden considerarse el centro de los demás. Esta última hipótesis es la que parece más plausible, quedando por discutir el tipo de métrica, para lo cual existen a su vez distintas teorías.

E. Mach interpretó la acción gravitatoria del resto del universo como responsable de la inercia de los cuerpos. Así, sería la masa del universo lejano la encargada de mantener un cuerpo con velocidad uniforme y rectilínea o en reposo ante la ausencia de otras fuerzas cercanas. Esto podría ser una bonita teoría, pero Mach lo dejó planteado tan sólo como una especulación, que carece de una justificación rigurosa.

**Tipos de fuerzas en el universo.**— Las fuerzas gravitatorias no son las únicas que existen en el universo físico. De forma esquemática se pueden distinguir cuatro tipos fundamentales de fuerzas, siendo las demás manifestaciones macroscópicas de éstas.

1. *Fuerzas gravitatorias.* Aunque en la mecánica clásica se consideran como acciones a distancia, de propagación instantánea, en la realidad parece que se propagan con velocidad finita. Esta propagación se realiza mediante las llamadas ondas gravitatorias. En la interpretación dual onda/corpusculo equivalen a las partículas llamadas Gravitones<sup>15</sup>.
2. *Fuerzas electromagnéticas.* Están gobernadas por las ecuaciones de Maxwell del campo electromagnético. Se propagan mediante las Ondas electromagnéticas, que incluyen la luz, ondas de radio, etc. Las partículas equivalentes son los Fotones.

---

<sup>15</sup>Aunque se han establecido diversos experimentos para detectar las ondas gravitatorias, aún no se han llegado a medir de forma fehaciente, debido a su intensidad extremadamente baja.

3. *Fuerzas nucleares fuertes.* Son las fuerzas que unen a las partículas en el núcleo atómico. Intervienen únicamente en la mecánica cuántica. Están asociadas a las partículas denominadas Gluones.
4. *Fuerzas nucleares débiles.* Son las fuerzas que intervienen en la desintegración nuclear. Asimismo intervienen en la mecánica cuántica, y las partículas asociadas son los Bosones.

La publicación por Newton de los «Principia» con la teoría de la gravitación universal supuso en su tiempo un avance importante para la mecánica y para las matemáticas, al interpretar de forma coherente y unificada dos tipos de fenómenos que antes se consideraban obedecientes a leyes distintas: el movimiento de los objetos terrestres y el de los objetos celestes. De manera similar, se busca hoy en día, por parte de los físicos teóricos y matemáticos, una *teoría unificada* que permita explicar, a partir de una causa común, los cuatro tipos de fuerzas que se observan en el universo. Sin embargo, es de prever que esta teoría, aún en el improbable caso de poderse obtener, sería mucho más compleja y engorrosa de utilizar que la mecánica clásica o los métodos newtonianos. Por ello, aún en la hipótesis de que se logre algún avance importante en esta línea, es improbable que tenga repercusiones prácticas en la mecánica aplicada a la ingeniería, campo que nos ocupa y en el cual la mecánica clásica seguirá teniendo plena vigencia.



# CAPÍTULO 1

---

## Teoremas generales de dinámica de sistemas.

### Índice

---

<b>1.1. Dinámica de la partícula</b> . . . . .	<b>22</b>
1.1.1. Cantidad de movimiento . . . . .	22
1.1.2. Momento cinético . . . . .	23
1.1.3. Energía cinética . . . . .	25
1.1.4. Velocidad y aceleración en sistemas móviles . . . . .	34
<b>1.2. Descripción de los sistemas mecánicos</b> . . . . .	<b>37</b>
1.2.1. Sistema mecánico . . . . .	37
1.2.2. Fuerzas . . . . .	38
1.2.3. Enlaces . . . . .	38
<b>1.3. Principios y teoremas de Newton-Euler</b> . . . . .	<b>43</b>
1.3.1. Cantidad de movimiento . . . . .	43
1.3.2. Momento cinético . . . . .	45
1.3.3. Energía cinética . . . . .	48
<b>1.4. El sistema de referencia del centro de masas</b> . . . . .	<b>51</b>
1.4.1. Cantidad de movimiento . . . . .	52
1.4.2. Momento cinético . . . . .	52
1.4.3. Energía cinética . . . . .	55
1.4.4. Aplicación: sólidos rígidos con movimiento plano . . . . .	56
1.4.5. Constantes del movimiento en sistemas aislados . . . . .	64
<b>1.5. Principios basados en trabajos virtuales</b> . . . . .	<b>65</b>
1.5.1. El principio de los trabajos virtuales . . . . .	67
1.5.2. El principio de D'Alembert . . . . .	68

<b>1.6. Dinámica en sistemas no inerciales.</b> . . . . .	<b>72</b>
1.6.1. Dinámica de la partícula . . . . .	72
1.6.2. Dinámica de sistemas de varias partículas . . . . .	78

Comenzaremos este capítulo incluyendo una recapitulación de los teoremas y resultados básicos para la dinámica de la partícula. Este modelo mecánico es válido para los cuerpos que no tienen rotación, o bien si esta no influye en la dinámica.

Al estudiar los sistemas con varias partículas surgen varios conceptos básicos adicionales, como son los enlaces o ligaduras entre puntos, tanto internos al sistema como externos, y las fuerzas interiores. Uno de los casos más representativos es el de los sistemas rígidos, con enlaces de distancia constante entre partículas.

En principio, la aplicación de las leyes de Newton se hará realizando la suma para todas las partículas, obteniendo así leyes globales en función de las magnitudes cinéticas resultantes o suma para todo el sistema. A la hora de obtener estas resultantes convendrá tener en cuenta las interacciones entre partículas del sistema.

Un caso especial es el principio del momento cinético, que de manera estricta no se deduce de las leyes de Newton, sino que son necesarias hipótesis adicionales. Este principio es debido a Euler.

Adicionalmente, introduciremos los métodos de trabajos virtuales, de gran potencia para plantear las ecuaciones de la estática o de la dinámica directamente para el conjunto del sistema.

## 1.1. Dinámica de la partícula

### 1.1.1. Cantidad de movimiento

Se llama *cantidad de movimiento*<sup>1</sup> de una partícula a

$$\mathbf{p} \stackrel{\text{def}}{=} m\mathbf{v}.$$

<sup>1</sup>También denominado «*momento lineal*», del Inglés «*linear momentum*» o simplemente «*momentum*».

El principio de la cantidad de movimiento se deduce como consecuencia directa de la segunda ley de Newton (aptdo. 0.4):

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \dot{\mathbf{p}}. \quad (1.1)$$

En el caso usual de que la masa de la partícula no varíe<sup>2</sup>, se obtiene la expresión clásica de la ley fundamental de la dinámica (5), *Fuerza = masa × aceleración*:

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{r}}.} \quad (1.2)$$

Conviene recordar que, en esta expresión,  $\mathbf{F}$  representa la resultante de todas las fuerzas aplicadas sobre la partícula. Se deben incluir, mediante suma vectorial, tanto las fuerzas activas como las reacciones de apoyo o reacciones del medio.

Cuando la fuerza total se anula, se obtiene el correspondiente teorema de conservación:

$$\boxed{\text{si } \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{p} = \text{cte.}} \quad (1.3)$$

Por lo tanto, el movimiento de una partícula aislada es tal que se conserva su cantidad de movimiento; es decir, su velocidad se mantiene constante, describiendo un movimiento rectilíneo uniforme.

### 1.1.2. Momento cinético

Sea una partícula  $m$ , dotada de una velocidad  $\mathbf{v}$  y situada en un punto  $P$ . El *momento cinético*<sup>3</sup> respecto a un punto fijo  $O$ ,  $\mathbf{H}_O$ <sup>4</sup>, se define como el momento de la cantidad de movimiento respecto a dicho punto. Tomando  $O$  como origen del sistema de referencia (inercial)  $Oxyz$ ,

$$\mathbf{H}_O \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r} \wedge m\mathbf{v};$$

derivando respecto del tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{H}_O}{dt} &= \dot{\mathbf{r}} \wedge m\mathbf{v} + \mathbf{r} \wedge m\dot{\mathbf{v}} \\ &= \mathbf{0} + \underbrace{\mathbf{r} \wedge \mathbf{F}}_{\mathbf{M}_O} \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Estrictamente hablando, la masa de una partícula es siempre invariable; al hablar de casos en los que  $m$  sea variable, nos referimos a cuerpos que pierdan o ganen partículas de masa.

<sup>3</sup>También denominado «momento angular», del inglés «angular momentum».

<sup>4</sup>Otros autores emplean notaciones distintas para referirse al momento cinético:  $\mathbf{OK}$  (M. Roy, Fernández Palacios),  $\mathbf{L}_O$  (Marion, Goldstein, Griffiths)

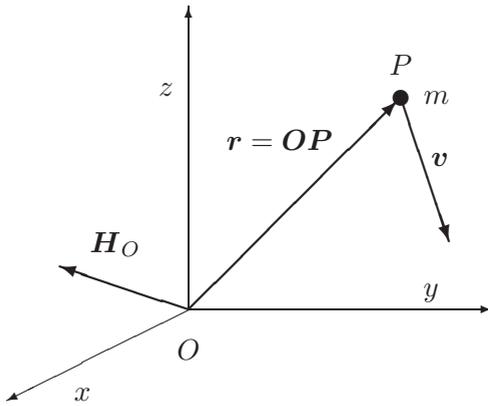


Figura 1.1: *Momento cinético de una partícula respecto al punto O.*

siendo  $\mathbf{M}_O \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}$  el momento de la fuerza  $\mathbf{F}$  respecto a  $O$ . Resulta por tanto la ecuación:

$$\mathbf{M}_O = \frac{d\mathbf{H}_O}{dt}. \quad (1.4)$$

El correspondiente teorema de conservación que se deduce de (1.4) es:

$$\text{si } \mathbf{M}_O = \mathbf{0}, \quad \mathbf{H}_O = \text{cte.} \quad (1.5)$$

Esta conservación se verificará en el caso de la partícula aislada, y también en el caso de fuerzas centrales que se describe más abajo.

### Momento áxico.—

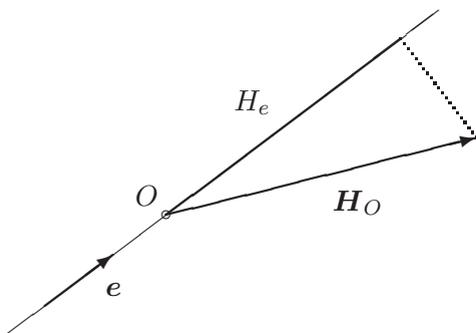


Figura 1.2: *Momento áxico respecto a un eje (O, e)*

Sea un eje de dirección fija  $\mathbf{e}$ , pasando por el punto  $O$ . Se define como momento áxico respecto de este eje la proyección del momento cinético respecto de un punto cualquiera del eje sobre la dirección del mismo. Empleando la notación

$$M_e \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}, \quad H_e \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{H}_O \cdot \mathbf{e},$$

multiplicando escalarmente ambos miembros de (1.4) por  $\mathbf{e}$  se deduce directamente la igualdad:

$$M_e = \frac{dH_e}{dt}.$$

Esta fórmula se puede aplicar entre otros casos al movimiento plano de rotación alrededor de un eje fijo.

**Fuerzas centrales.**—

Se denominan centrales a las fuerzas que pasan constantemente por un punto dado, «centro» de las fuerzas. Es evidente que respecto de este punto el momento de las fuerzas es nulo, por lo que aplicando (1.5) se deduce que el momento cinético se conserva:

$$\mathbf{H}_O = \text{cte.}$$

Se obtienen inmediatamente 2 características importantes del movimiento:

1. La *trayectoria es plana*;  
ya que al ser  $\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \wedge m\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{r}$  es constantemente perpendicular a una dirección  $\mathbf{H}_O$  fija, definiendo por tanto un plano.
2. La *velocidad areolar es constante*;  
puesto que el área barrida por unidad de tiempo (figura 1.3) es:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\frac{1}{2}|\mathbf{r} \wedge d\mathbf{r}|}{dt} = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}| = \frac{1}{2m}|\mathbf{H}_O| \quad \text{cte.}$$

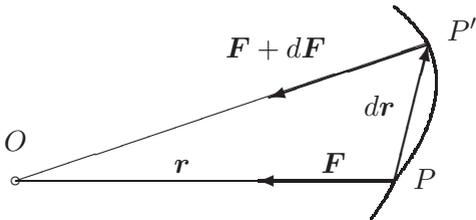


Figura 1.3: *Fuerzas centrales, dirigidas hacia un centro de fuerzas O. El área barrida en el intervalo infinitesimal dt es  $dS = OPP' = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \wedge d\mathbf{r}|$ .*

**1.1.3. Energía cinética**

Sea una partícula de masa  $m$ , que se mueve según una trayectoria  $\Gamma$ , bajo la acción de fuerzas con resultante  $\mathbf{F}$  (recordemos que ésta incluye todas

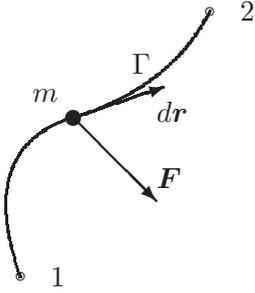


Figura 1.4: Trabajo realizado por  $\mathbf{F}$  al recorrer la curva  $\Gamma$  entre 1 y 2.

las fuerzas, activas y pasivas). El trabajo elemental realizado por  $\mathbf{F}$  en un desplazamiento infinitesimal  $d\mathbf{r}$  se define por el producto escalar siguiente<sup>5</sup>

$$dW \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r};$$

considerando que  $\mathbf{F} = m d\mathbf{v}/dt$  y  $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ ,

$$dW = m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \quad (1.6)$$

El trabajo realizado al recorrer  $\Gamma$  entre los dos puntos extremos 1 y 2 resulta de la integral curvilínea.<sup>6</sup>

$$W_{12} = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}mv^2 \Big|_1^2.$$

Se define como energía cinética  $T$  de la partícula:

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}mv^2;$$

así, la expresión anterior equivale a

$$\boxed{W_{12} = T_2 - T_1} \quad (1.7)$$

Podemos enunciar entonces:

*‘El trabajo realizado por la resultante de las fuerzas sobre una partícula es igual al incremento de su energía cinética.’*

Este resultado se suele llamar también el *teorema de las fuerzas vivas*.

<sup>5</sup>La notación empleada, « $dW$ », no indica aquí una diferencial exacta de una determinada función  $W$ , sino únicamente un incremento infinitesimal de trabajo producido por  $\mathbf{F}$  a lo largo de  $d\mathbf{r}$ . Tan sólo resulta ser una diferencial exacta cuando las fuerzas son conservativas.

<sup>6</sup>Al no ser el trabajo elemental una diferencial exacta, la integral que se evalúa produce un resultado  $W_{12}$  que no es una función ni un campo escalar, sino simplemente el valor acumulado del trabajo realizado en este trayecto. Además, este trabajo  $W_{12}$  dependerá de la trayectoria  $\Gamma$  seguida, salvo en el caso de fuerzas conservativas que se verá más adelante.

**Caso de fuerzas conservativas.—**

Se denomina campo de fuerzas conservativas aquél en el que el trabajo realizado por la fuerza, para recorrer el camino entre dos puntos dados, es independiente de la trayectoria seguida  $\Gamma$  para ir de uno al otro. Así para distintos caminos  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  que tengan en común el origen (1) y el final (2),

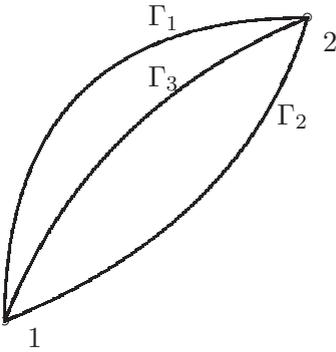


Figura 1.5: *Trayectorias distintas en un campo conservativo para ir de 1 a 2.*

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Es fácil ver que esta condición es equivalente a que el trabajo realizado para recorrer cualquier trayectoria cerrada sea nulo. En efecto, sea una curva cerrada cualquiera  $\Gamma$ , a la que pertenecen los puntos 1 y 2. Ésta puede descomponerse en dos curvas abiertas con extremos en 1 y 2:  $\Gamma = \Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^-$ , teniendo  $\Gamma_1^+$  el sentido de 1 a 2 y  $\Gamma_2^-$  el sentido de 2 a 1. La integral curvilínea sobre  $\Gamma$  es pues

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\Gamma_2^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\Gamma_2^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (1.8)$$

como queríamos demostrar.

No son conservativas las fuerzas debidas a resistencias pasivas, como el rozamiento o las fuerzas de tipo viscoso. En éstas el integrando ( $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ) es siempre negativo, puesto que la fuerza de resistencia ( $\mathbf{F}$ ) se opone al movimiento ( $d\mathbf{r}$ ), por lo que la integral (1.8) no se puede anular nunca. Se produce necesariamente una disipación de energía, no pudiendo recobrase el nivel energético inicial después de un trayecto cerrado.

Un teorema básico del cálculo vectorial establece que la condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial  $\mathbf{F}$  tenga circulación nula para cualquier curva cerrada es que sea el gradiente de un campo escalar que denominaremos  $V(\mathbf{r})$ , función de la posición  $\mathbf{r}$ , tal que:

$$\mathbf{F} = -\text{grad } V = -\frac{dV}{d\mathbf{r}}.$$

Al campo escalar  $V(\mathbf{r})$  se le denomina potencial de las fuerzas, energía potencial, o simplemente *potencial*. Recordemos la definición de gradiente; en un sistema de coordenadas cartesianas ortonormal con vectores unitarios  $\{\mathbf{e}_i\} \equiv \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  la expresión es<sup>7</sup>

$$\mathbf{grad} V \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k}$$

Una tercera forma de caracterizar un campo  $\mathbf{F}$  como conservativo, admitiendo las exigencias adicionales de que  $\mathbf{F}$  tenga derivada continua y que el dominio sea simplemente conexo, es que sea irrotacional. Esta condición es equivalente a su vez a las dos anteriores. Recordemos la definición de rotacional de un campo vectorial<sup>8</sup>:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k \\ &= \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Por lo que la condición para que el campo  $\mathbf{F}$  sea conservativo es

$$\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}. \quad (1.9)$$

En este caso, la función potencial  $V(\mathbf{r})$  de la que proviene  $\mathbf{F}$  debe ser al menos  $C^2$ .

Al expresarse  $\mathbf{F}$  como un gradiente, el trabajo elemental resulta ser una diferencial exacta:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{grad} V \cdot d\mathbf{r} = -dV$$

Si integramos para obtener el trabajo realizado entre dos puntos 1 y 2, y empleando el principio de la energía cinética (1.7):

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = V_1 - V_2 \\ &= T_2 - T_1, \end{aligned}$$

<sup>7</sup>En cuanto a notación, emplearemos indistintamente los índices o los «nombres propios» de vectores ( $\mathbf{i} \equiv \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{j} \equiv \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3$ ) y coordenadas ( $x \equiv x_1$ ,  $y \equiv x_2$ ,  $z \equiv x_3$ ). Asimismo, a veces emplearemos también notaciones alternativas para el gradiente,  $\mathbf{grad} V = dV/d\mathbf{r} = \nabla V$ , empleando el operador  $\nabla = \sum_{i=1}^3 \partial/\partial x_i \mathbf{e}_i = \partial/\partial x \mathbf{i} + \partial/\partial y \mathbf{j} + \partial/\partial z \mathbf{k}$ .

<sup>8</sup>Empleando el operador  $\nabla$ , el rotacional se puede expresar también mediante la notación  $\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \wedge \mathbf{F}$ .

es decir, se conserva la suma de la energía cinética más la potencial:

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2.$$

o bien, definiendo como *energía total*<sup>9</sup> a la suma de energía cinética y potencial,

$$E \stackrel{\text{def}}{=} T + V,$$

se obtiene la siguiente expresión para el teorema de conservación de la energía:

$$\boxed{\text{si } \mathbf{F} = -\text{grad } V \text{ (conservativa), } E = T + V = \text{cte.}} \quad (1.10)$$

En lo anterior se ha supuesto que el potencial  $V(\mathbf{r})$  es constante o estacionario, es decir, que no depende explícitamente del tiempo  $t$ . Puede darse el caso de que  $\mathbf{F}$  provenga de una función potencial no constante, es decir que dependa explícitamente del tiempo,  $V(\mathbf{r}, t)$ :

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}, \quad \text{con} \quad \frac{\partial V}{\partial t} \neq 0.$$

En este caso, no se conservaría la energía total  $E$ , puesto que el trabajo elemental ya no sería una diferencial exacta del potencial:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} + \frac{\partial V}{\partial t} dt,$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \neq -dV.$$

Estaríamos, pues, ante un campo de fuerzas no conservativas a pesar de que provengan de un potencial.

**Integración de la ecuación fundamental de la dinámica.**— Parte de lo expuesto arriba se puede interpretar como distintos procedimientos de integración de la ecuación fundamental de la dinámica (1.2). Señalemos tres procedimientos generales para ello, que permiten obtener los teoremas de conservación (1.3), (1.5) y (1.10) como casos particulares.

---

<sup>9</sup>Se sobreentiende que ésta es únicamente la energía mecánica, excluyendo a otros tipos de energía como la calorífica, química, ...

**a) Integración directa en el tiempo.**— Integrando entre dos instantes  $t_1$  y  $t_2$ ,

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\mathbf{r}} dt = \int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{p} = \mathbf{p}|_1^2$$

se obtiene la ecuación del balance de la cantidad de movimiento,

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \mathbf{p}|_1^2.}$$

Como caso particular de esta ecuación de balance se desprende el teorema de conservación de la cantidad de movimiento (1.3)

**b) Integración directa según la trayectoria.**— Realizando ahora la integral curvilínea entre dos puntos de la trayectoria  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ ,

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 m\ddot{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv^2\Big|_1^2$$

de donde se obtiene la ecuación del balance de la energía,

$$\boxed{\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}mv^2\Big|_1^2.}$$

Análogamente, para el caso de fuerzas conservativas ( $\mathbf{F} = -\mathbf{grad}V$ ), se desprende el teorema de conservación (1.10).

**c) Integración del momento en el tiempo.**— Integrando el momento de  $\mathbf{F}$  entre dos instantes  $t_1$  y  $t_2$ ,

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{r} \wedge m\ddot{\mathbf{r}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \underbrace{(\mathbf{r} \wedge m\dot{\mathbf{r}})}_{\mathbf{H}_O} dt = \mathbf{H}_O\Big|_1^2$$

se obtiene la ecuación del balance del momento cinético,

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} dt = \mathbf{H}_O\Big|_1^2.}$$

Si las fuerzas son centrales o se trata de una partícula aislada, análogamente a los dos casos anteriores se desprende el teorema de conservación (1.5).

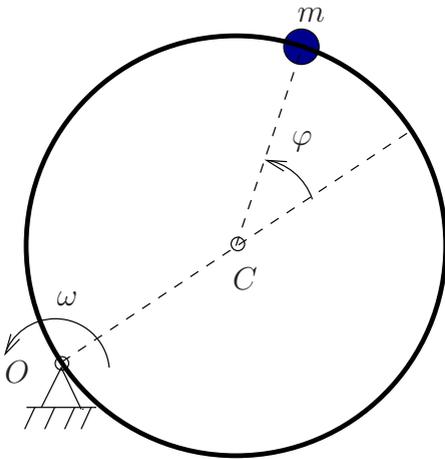


Figura 1.6: *Ejemplo 1.1 - partícula que se mueve sobre una circunferencia lisa, con un punto ( $O$ ) fijo de su perímetro y velocidad de rotación impuesta  $\omega$ .*

EJEMPLO 1.1: Una partícula de masa  $m$  está ligada a una circunferencia lisa de radio  $R$  sobre la que puede deslizarse libremente. A su vez la circunferencia se mueve en un plano horizontal, girando con velocidad de rotación uniforme (impuesta)  $\omega$ , alrededor de un punto  $O$  de su perímetro. Se pide:

- Empleando como parámetro el ángulo  $\varphi$  (figura 1.1), determinar la aceleración (absoluta) de la partícula en un instante genérico.
- Obtener la ecuación diferencial del movimiento.
- Obtener la expresión de la reacción de la circunferencia sobre la partícula.
- ¿Se conserva la energía total ( $T + V$ )? (responder razonadamente).
- Obtener una integral primera del sistema (constante del movimiento, igual a una expresión función de las derivadas primeras, en este caso  $\dot{\varphi}$ ). Tomar como condiciones iniciales  $\varphi_0 = 0$ ,  $\dot{\varphi}_0 = \omega$ .

*Solución.*

a.— El procedimiento más directo es emplear coordenadas cartesianas para la posición de la partícula (figura 1.7):

$$\begin{aligned} x &= R \cos(\omega t) + R \cos(\varphi + \omega t); \\ y &= R \operatorname{sen}(\omega t) + R \operatorname{sen}(\varphi + \omega t). \end{aligned} \quad (1.11)$$

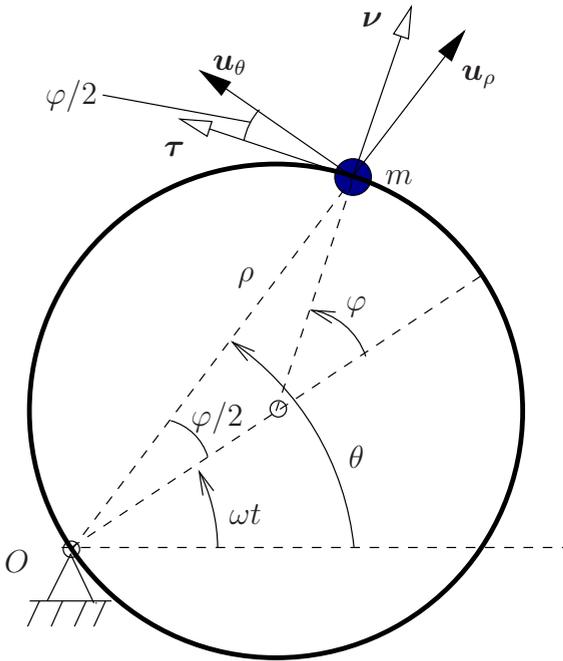


Figura 1.7: Coordenadas y vectores básicos para el ejemplo 1.1;  $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu})$  son los versores tangente y normal respectivamente a la circunferencia móvil, mientras que  $(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\theta)$  son los versores de las coordenadas polares. La velocidad de la partícula se puede interpretar como suma de una componente de arrastre  $\rho\dot{\omega}$  debida al movimiento del aro, según  $\mathbf{u}_\theta$ , y otra componente  $R\dot{\varphi}$  relativa al aro, según  $\boldsymbol{\tau}$ .

A partir de aquí, derivando:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -R\omega \operatorname{sen}(\omega t) - R(\dot{\varphi} + \omega) \operatorname{sen}(\omega t + \varphi); \\ \dot{y} &= R\omega \operatorname{cos}(\omega t) + R(\dot{\varphi} + \omega) \operatorname{cos}(\omega t + \varphi); \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -R\omega^2 \operatorname{cos}(\omega t) - R\ddot{\varphi} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) - R(\dot{\varphi} + \omega)^2 \operatorname{cos}(\omega t + \varphi); \\ \ddot{y} &= -R\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t) + R\ddot{\varphi} \operatorname{cos}(\omega t + \varphi) - R(\dot{\varphi} + \omega)^2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Las direcciones en que interesa proyectar la aceleración son (lógicamente) la tangente y la normal a la circunferencia. Las direcciones correspondientes quedan definidas por los vectores unitarios

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= -\operatorname{sen}(\varphi + \omega t)\mathbf{i} + \operatorname{cos}(\varphi + \omega t)\mathbf{j} \\ \boldsymbol{\nu} &= \operatorname{cos}(\varphi + \omega t)\mathbf{i} + \operatorname{sen}(\varphi + \omega t)\mathbf{j} \end{aligned}$$

Resultando:

$$\begin{aligned} a_\tau &= -\ddot{x} \operatorname{sen}(\varphi + \omega t) + \ddot{y} \operatorname{cos}(\varphi + \omega t) = R\omega^2 \operatorname{sen} \varphi + R\ddot{\varphi}; \\ a_\nu &= \ddot{x} \operatorname{cos}(\varphi + \omega t) + \ddot{y} \operatorname{sen}(\varphi + \omega t) = -R\omega^2 \operatorname{cos} \varphi - R(\dot{\varphi} + \omega)^2. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Otra manera de calcular sería utilizando las coordenadas polares  $(\rho, \theta)$  (figura 1.7):

$$\theta = \omega t + \frac{\varphi}{2}; \quad \rho = 2R \operatorname{cos} \frac{\varphi}{2}; \quad (1.15)$$

Las componentes de la aceleración  $\mathbf{a} \equiv (a_\rho, a_\theta)$  son, empleando las expresiones en coordenadas polares definidas en (B.3) :

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2; \quad a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta},$$

con lo que:

$$\begin{aligned} a_\rho &= -R\ddot{\varphi} \sin \frac{\varphi}{2} - R\frac{\dot{\varphi}^2}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - 2R \cos \frac{\varphi}{2} (\omega + \frac{\dot{\varphi}}{2})^2, \\ a_\theta &= -2R\dot{\varphi} \sin \frac{\varphi}{2} (\omega + \frac{\dot{\varphi}}{2}) + R \cos \frac{\varphi}{2} \ddot{\varphi}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Finalmente, proyectando sobre tangente y normal al aro:

$$\begin{aligned} a_\tau &= -a_\rho \sin \frac{\varphi}{2} + a_\theta \cos \frac{\varphi}{2} = R\omega^2 \sin \varphi + R\ddot{\varphi}; \\ a_\nu &= a_\rho \cos \frac{\varphi}{2} + a_\theta \sin \frac{\varphi}{2} = -R\omega^2 \cos \varphi - R(\dot{\varphi} + \omega)^2. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Se obtienen los mismos valores que antes (1.14), como era de esperar<sup>10</sup>.

b.— La única fuerza sobre la partícula es la reacción de la circunferencia, que lleva la dirección de  $\nu$ . La componente de la aceleración según  $\tau$  será por tanto nula, lo que proporciona la ecuación del movimiento buscada. A partir de (1.14)<sub>1</sub>:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0 \quad (1.18)$$

Por similitud con la ecuación del péndulo simple ( $l\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0$ ), esta ecuación indica que se produce un movimiento pendular alrededor del punto diametralmente opuesto al punto  $O$ , con longitud de péndulo equivalente  $l_{\text{equiv}} = g/\omega^2$ .

c.— Sea la reacción  $\mathbf{N} = N\nu$ . Obtenemos el valor de  $N$  mediante la aceleración  $a_\nu$ , ecuación (1.14)<sub>2</sub>, expresando la ecuación dinámica según esta dirección:

$$N = ma_\nu = -mR [(\omega + \dot{\varphi})^2 + \omega^2 \cos \varphi]. \quad (1.19)$$

<sup>10</sup>Un tercer procedimiento recomendable para este caso sería la descomposición del movimiento en el arrastre del aro y el de la partícula relativo al aro, originando la descomposición del campo de aceleraciones  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{arr}} + \mathbf{a}_{\text{cor}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}$ , como se verá en el apartado 1.1.4, ecuación (1.29).

d.— *No se conserva la energía*, ya que se trata de una curva móvil, en la que la fuerza de reacción desarrolla un trabajo. Es necesario aplicar un momento al sistema para conseguir la rotación uniforme  $\omega$ , momento que no es una fuerza conservativa.

Aunque a primera vista pudiera parecer que la reacción de la circunferencia, al ser lisa la ligadura, no desarrolla trabajo alguno, ésto no es así, ya que la reacción es normal a la circunferencia pero no a la trayectoria (absoluta) de la partícula.

e.— Ya que no resulta posible aplicar directamente un teorema de conservación, integraremos directamente la ecuación de la dinámica (1.18). Para ello, multiplicamos primero por  $\dot{\varphi}$ :

$$\ddot{\varphi}\dot{\varphi} + \omega^2\dot{\varphi}\sin\varphi = 0; \quad (1.20)$$

esta ecuación tiene integral inmediata:

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \omega^2\cos\varphi = C \quad (1.21)$$

Aplicando las condiciones iniciales, resulta  $C = -\omega^2/2$ . La integral primera es por tanto:

$$\dot{\varphi}^2 + \omega^2(1 - 2\cos\varphi) = 0 \quad (1.22)$$

Puede comprobarse que la expresión de la energía total del sistema es:

$$T + V = \frac{1}{2}mR^2 [\dot{\varphi}^2 + 2(1 + \cos\varphi)(\omega^2 + \omega\dot{\varphi})] \quad (1.23)$$

por lo que, comparándola con (1.22), se deduce que la energía total no puede ser constante, ya que ambas expresiones no coinciden.  $\square$

#### 1.1.4. Velocidad y aceleración en sistemas móviles

En numerosas ocasiones la descripción del movimiento se hace de manera relativa a un sistema móvil, que a su vez tiene un determinado movimiento respecto al sistema que pudiéramos considerar fijo o inercial. Es conveniente establecer las expresiones generales que permiten obtener para la velocidad y aceleración inerciales, que serán las que deban emplearse en las leyes de la dinámica.

Supongamos un sistema de referencia fijo  $S$ , y otro móvil respecto de él  $S'$ . El vector posición de un punto cualquiera respecto de  $S$  es  $\mathbf{r}$ , y respecto de  $S'$  lo denominamos  $\boldsymbol{\rho}$ . La relación entre los vectores posición (figura 1.8) es

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}, \quad (1.24)$$

donde  $\mathbf{r}_O$  define la posición del origen  $O$  de  $S'$ . Derivando esta igualdad, y teniendo en cuenta la regla de derivación en sistemas móviles<sup>11</sup>:

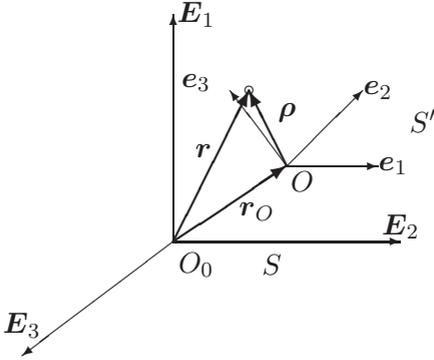


Figura 1.8: Vectores posición ( $\mathbf{r}$ ,  $\boldsymbol{\rho}$ ) en las referencias fija  $S \equiv \{O_0, \mathbf{E}_i\}$  y móvil  $S' \equiv \{O, \mathbf{e}_i\}$  respectivamente.

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_O + \left( \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} \right)_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}, \tag{1.25}$$

donde el primer término ( $\dot{\mathbf{r}}_O$ ) es la derivada (absoluta) del vector posición de  $O$ , y corresponde a una velocidad de traslación; el segundo es la derivada relativa de  $\boldsymbol{\rho}$ , que denominaremos velocidad relativa,  $\mathbf{v}_{\text{rel}} \stackrel{\text{def}}{=} (d\boldsymbol{\rho}/dt)_{\text{rel}}$ ; y el tercero es el término complementario de derivación de  $\boldsymbol{\rho}$  debido a la rotación de  $S'$ . Así, la expresión general de la velocidad es:

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}_{\text{rel}}.} \tag{1.26}$$

Se llama *velocidad de arrastre* a la suma de los dos primeros términos,

$$\mathbf{v}_{\text{arr}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}, \tag{1.27}$$

correspondiente a la velocidad que tendría un punto si estuviera fijo respecto al sistema móvil. Es decir, se trata de la velocidad con la que se ve «arrastrado» un punto, si estuviera rígidamente unido al sistema móvil. De esta manera podemos expresar de forma resumida la velocidad como suma de la velocidad de arrastre (debida al movimiento de  $S'$ ) y la velocidad relativa a  $S'$ :

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{arr}} + \mathbf{v}_{\text{rel}}.} \tag{1.28}$$

Derivando de nuevo la expresión (1.26) conforme a la misma regla de derivación en sistemas móviles, se obtiene la expresión de la aceleración:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}) + \mathbf{a}_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{\text{rel}};$$

<sup>11</sup>Véase *Curso de Mecánica*, J.M. Goicolea (2010), capítulo 4. En este curso breve esta regla será estudiada más adelante con la cinemática de los sistemas rígidos, ecuación (6.17)

y agrupando términos,

$$\mathbf{a} = \underbrace{\mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho})}_{\mathbf{a}_{\text{arr}}} + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{\text{rel}}}_{\mathbf{a}_{\text{cor}}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}. \quad (1.29)$$

En esta expresión distinguimos las siguientes componentes de la aceleración:

- *Aceleración de arrastre,*

$$\mathbf{a}_{\text{arr}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}),$$

es la aceleración que tendría un punto fijo al sistema móvil ( $S'$ ), es decir «arrastrado» por el movimiento de ( $S'$ );

- *Aceleración de Coriolis o complementaria,*

$$\mathbf{a}_{\text{cor}} \stackrel{\text{def}}{=} 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{\text{rel}};$$

- *Aceleración relativa,  $\mathbf{a}_{\text{rel}}$ .*

Así, podemos expresar (1.29) en forma resumida:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{arr}} + \mathbf{a}_{\text{cor}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}. \quad (1.30)$$

Como se ve, en la expresión de la aceleración aparece un término adicional a los de arrastre y relativo, que depende de la velocidad relativa, al contrario de lo que sucedía en el campo de velocidades. Esto complica el análisis de aceleraciones respecto del de velocidades.

**EJEMPLO 1.2:** Desarrollar la velocidad y aceleración de la partícula del ejemplo 1.1 (pág 31) a través del movimiento de arrastre del aro y del movimiento de la partícula relativo al aro.

*Solución.* El movimiento se compone de un arrastre del aro, con velocidad de rotación (constante)  $\omega$ , y de un movimiento de la partícula relativo al aro que es una rotación alrededor de su centro con ángulo  $\varphi$ . Haciendo referencia a los vectores básicos definidos en la figura 1.7, las componentes de la velocidad son:

$$\mathbf{v}_{\text{arr}} = \rho\omega \mathbf{u}_\theta = 2R\omega \cos \frac{\varphi}{2} \mathbf{u}_\theta;$$

$$\mathbf{v}_{\text{rel}} = R\dot{\varphi} \boldsymbol{\tau}.$$

La aceleración se descompone como  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{arr}} + \mathbf{a}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{cor}}$ , siendo las componentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\text{arr}} &= -\rho\omega^2 \mathbf{u}_\rho = -2R\omega^2 \cos \frac{\varphi}{2} \mathbf{u}_\rho; \\ \mathbf{a}_{\text{rel}} &= -R\dot{\varphi}^2 \boldsymbol{\nu} + R\ddot{\varphi} \boldsymbol{\tau}; \\ \mathbf{a}_{\text{cor}} &= 2\omega \mathbf{k} \wedge R\dot{\varphi} \boldsymbol{\tau} = -2R\omega\dot{\varphi} \boldsymbol{\nu}. \end{aligned}$$

Proyectando esta aceleración sobre las direcciones tangencial y normal al aro  $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu})$  resulta:

$$\begin{aligned} a_\tau &= \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau} = R\ddot{\varphi} + R\omega^2 \sin \varphi; \\ a_\nu &= \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = -R(\omega + \dot{\varphi})^2 - R\omega^2 \cos \varphi. \end{aligned}$$

Este resultado es idéntico al obtenido por otros métodos en el ejemplo 1.1.  $\square$

## 1.2. Descripción de los sistemas mecánicos

Antes de desarrollar los principios y teoremas fundamentales, es conveniente definir primero algunos conceptos y elementos básicos que se emplearán en el estudio de los sistemas de varias partículas.

### 1.2.1. Sistema mecánico

Se llama así a un conjunto de varias partículas, de número finito o infinito, de las cuales queremos estudiar su movimiento. En el estudio de un sistema mecánico se prescinde pues de otras características físicas como la carga eléctrica, color, temperatura, ...

Los cuerpos que observamos a simple vista están formados por un gran número de partículas, macroscópicas, atómicas o subatómicas. Sólo en ciertos casos es válida la simplificación que supone el modelo de la masa puntual. En otros casos, por el contrario, será necesario considerar el sistema como formado por varias partículas.

Se llama configuración de un sistema a la posición de cada una de sus partículas en un instante dado. Para definir la configuración se necesita un determinado número de parámetros, según el sistema de que se trate. Por ejemplo, una partícula libre precisa tres parámetros: las coordenadas cartesianas,  $(x, y, z)$ . Un sistema de  $n$  partículas libres queda definido por  $3n$  parámetros. Sin embargo, si existen ligaduras que restrinjan el movimiento, el número de parámetros preciso para definir la configuración será menor. Se denominan *grados de libertad* de un sistema al conjunto mínimo de parámetros necesario para definir unívocamente la configuración del mismo, y que puedan variarse de manera independiente (es decir, sin ecuaciones de ligadura).

### 1.2.2. Fuerzas

Las fuerzas ejercidas sobre las partículas de un sistema son las causantes de la variación del movimiento de las mismas. Podemos clasificarlas atendiendo a varios criterios:

- *Exteriores*, si son ejercidas por agentes externos al sistema, o *interiores* en caso contrario. En este último caso, tanto la acción como la reacción se producen sobre partículas del propio sistema.
- *Activas* o *Reactivas*, según que actúen «*motu proprio*», o bien como respuesta a un movimiento determinado que intentan impedir, en cuyo caso sólo se dan cuando existe la tendencia a este movimiento. Estas últimas se llaman también fuerzas de enlace.

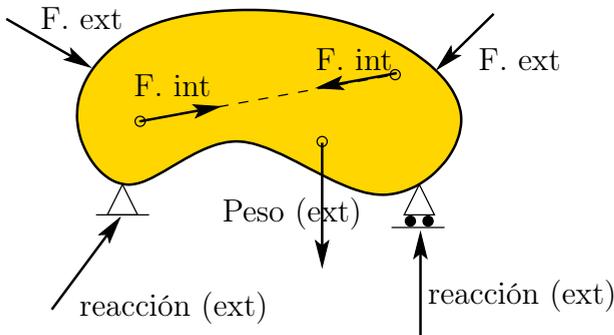


Figura 1.9: Tipos de fuerzas en un sistema

### 1.2.3. Enlaces

La existencia de enlaces o ligaduras impone restricciones al movimiento de las partículas, reduciendo el número de grados de libertad con respecto al caso en que todas las partículas fuesen libres. El número de grados de libertad se verá reducido, respecto del caso sin ligaduras, por el número de ecuaciones de enlace independientes.

Los enlaces se pueden clasificar, según diversos criterios, en:

- *Exteriores*, para las ligaduras con puntos externos, e *interiores*, para las ligaduras entre puntos del mismo sistema.
- *Lisos* (no disipativos) y *rugosos* (disipativos), atendiendo a que las fuerzas de enlace disipen o no energía para los movimientos permitidos por los mismos (figura 1.10). Se entiende que para que tenga sentido hablar de enlace liso o rugoso, éste debe permitir algún movimiento, pues en caso de restricción total no cabe esta clasificación.

- *Holónomos y Anholónomos.* Se consideran holónomos cuando es posible expresar la condición de ligadura mediante una relación entre las posiciones de las partículas y el tiempo exclusivamente:

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0. \quad (1.31)$$

A su vez, los enlaces holónomos se denominan *esclerónomos* si no dependen del tiempo, y *reónomos* en caso contrario (figura 1.11).

Los enlaces anholónomos son en general todos aquellos que no son holónomos, no pudiendo expresarse mediante ecuaciones del tipo (1.31). El caso más usual de enlace anholónomo es aquél que depende también de la velocidad, mediante relaciones del tipo:

$$\Phi(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, t) = 0, . \quad (1.32)$$

El caso más sencillo es el de expresiones lineales en  $\dot{\mathbf{r}}_i$ , del tipo:

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + b = 0$$

pudiendo ser  $\mathbf{a}_i$  y  $b$  funciones de la posición ( $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i(\mathbf{r}_i)$ ,  $b = b(\mathbf{r}_i)$ )

- *Unilaterales y bilaterales.* Los unilaterales se definen mediante desigualdades, por ejemplo (figura 1.12):

$$z \geq 0,$$

implicando restricción en un sentido tan sólo. Por el contrario, los bilaterales implican restricción en ambos sentidos.

**EJEMPLO 1.3:** Establecer los enlaces internos de un sólido rígido (considerado como un medio continuo), obteniendo el número de grados de libertad del mismo.

*Solución.* La hipótesis de medio continuo implica que es infinitamente subdivisible, constando de un conjunto infinito de partículas. En principio, esto conllevaría asimismo infinitos grados de libertad. Sin embargo, las ligaduras internas del sólido obligan a que se mantenga constante la distancia entre dos partículas cualesquiera; a su vez, esto da lugar a infinitas coacciones. El número de grados de libertad no se puede obtener pues directamente, ya que resultaría indeterminado ( $\infty - \infty$ ).

Para determinar el número de grados de libertad del sólido podemos basarnos en la descripción que sigue de su movimiento.

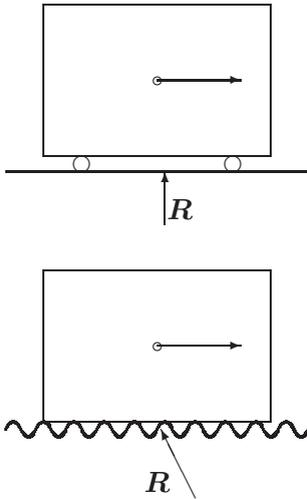


Figura 1.10: Enlaces liso y rugoso; para el movimiento permitido por el enlace (deslizamiento horizontal) la reacción lisa no realiza trabajo, mientras que en el caso rugoso sí.

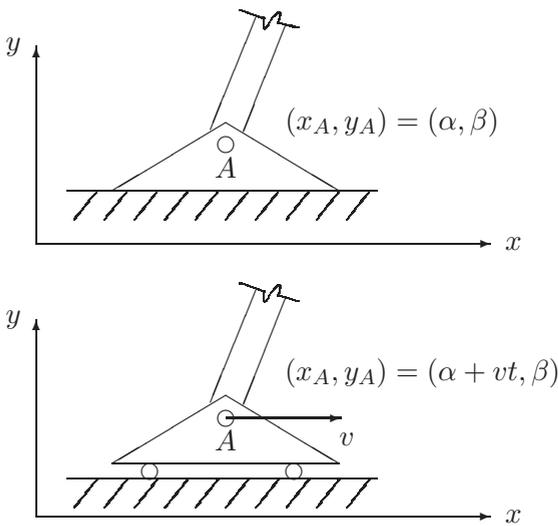


Figura 1.11: Enlaces holónomos; a) esclerónomo (no depende del tiempo), b) reónomo (dependiente del tiempo o enlace móvil).

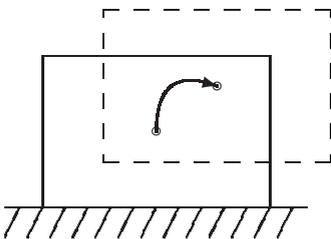


Figura 1.12: Enlace unilateral, que permite el movimiento vertical en un sólo sentido.

- Elegimos una partícula  $A$  cualquiera (figura 1.13); su posición estará definida por tres parámetros: sus tres coordenadas cartesianas,  $(x_A, y_A, z_A)$ .
- Una segunda partícula  $B$ , al estar obligada a mantener la distancia  $\overline{AB}$ , vendrá definida por dos parámetros adicionales (por ejemplo dos ángulos en esféricas respecto de  $A$ :  $\varphi_B, \lambda_B$ ).
- Definida la posición de las dos partículas  $A$  y  $B$ , una tercera partícula  $C$  precisa de un único parámetro más para definir su posición, por ejemplo, el ángulo de giro alrededor del eje  $AB$ ,  $\theta_C$ .

Cualquier otra partícula del sólido tiene ya definida su posición al estar definidas  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Por tanto no aportan grados de libertad adicionales.

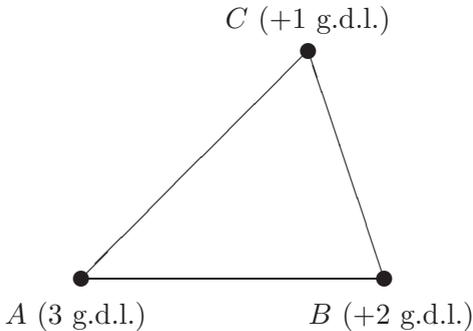


Figura 1.13: Grados de libertad del sólido rígido. Su movimiento queda determinado por el del triángulo rígido  $ABC$ , con  $3 + 2 + 1 = 6$  g.d.l.

Así, el número de grados de libertad de un sólido rígido es  $3 + 2 + 1 = 6$ . Existen múltiples maneras de elegir estos 6 g.d.l., aunque la descomposición usual es tomar las tres coordenadas de su centro de masas, y tres ángulos o parámetros que definan la orientación del sólido, como los ángulos de Euler (se verán en el capítulo 7). Es posible también escoger otros conjuntos de parámetros, según convenga en cada caso.  $\square$

**EJEMPLO 1.4:** Expresar los enlaces de un disco vertical de radio  $a$  que rueda sin deslizar sobre un plano horizontal, de forma que el disco se mantiene vertical en todo instante, aunque este plano vertical no es fijo y puede rotar libremente (pivotamiento).

*Solución.* Sea el plano horizontal  $Oxy$  (figura 1.14). Denominamos  $(x, y, z)$  a las coordenadas del centro del disco,  $\psi$  al ángulo que forma el eje del disco (perpendicular al mismo por su centro) con la horizontal,  $\theta$  al ángulo que forma este mismo eje con la dirección  $Ox$  del plano horizontal, y  $\varphi$  al ángulo girado por el disco alrededor de su propio eje.

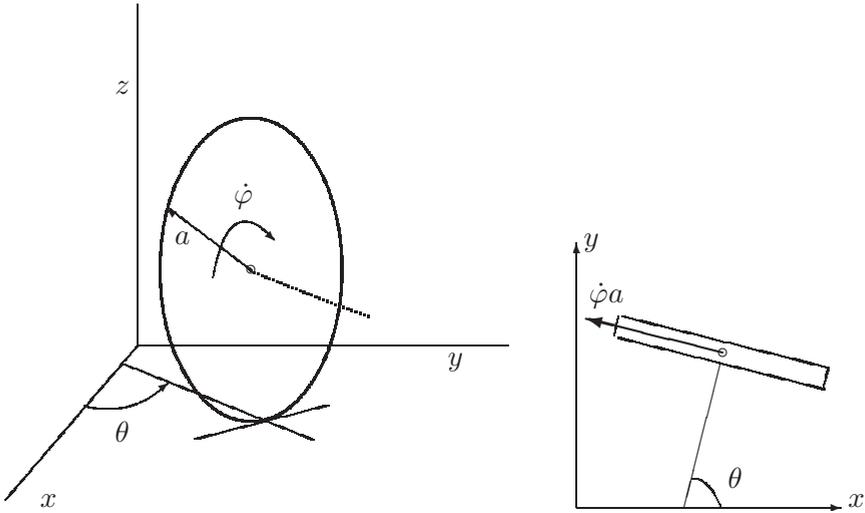


Figura 1.14: *Movimiento de un disco vertical rodando sin deslizar sobre un plano. La velocidad del centro del disco vertical tiene las componentes  $(-\dot{\varphi}a \sin \theta, \dot{\varphi}a \cos \theta)$  sobre las direcciones horizontales  $x$  e  $y$ .*

Los enlaces son cuatro: dos holónomos,

$$\begin{aligned} z &= a && \text{(altura constante del centro del disco),} \\ \psi &= 0 && \text{(disco vertical),} \end{aligned}$$

y dos no holónomos,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\dot{\varphi}a \sin \theta \\ \dot{y} &= \dot{\varphi}a \cos \theta. \end{aligned}$$

En un caso general en que  $\theta(t)$  no sea constante, éstas últimas relaciones no se pueden integrar, siendo por tanto enlaces anholónomos. El sistema queda definido por cuatro parámetros  $(x, y, \theta, \varphi)$  y dos ecuaciones de ligadura independientes, es decir, tiene  $6 - 4 = 2$  grados de libertad.

En el caso particular en que fuese  $\theta = \text{cte.}$ , el disco rodaría apoyado sobre una línea recta, dentro de un plano vertical fijo. Tomando el eje  $Ox$  según la dirección  $\theta = 0$ , resulta  $\dot{\varphi}a = -\dot{x} \Rightarrow x = -\varphi a$ . La ecuación es integrable y el enlace sería anholónimo sólo en apariencia.  $\square$

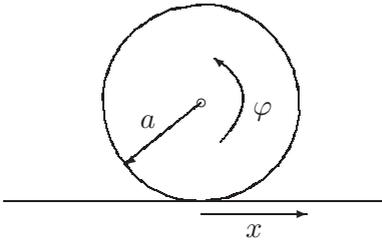


Figura 1.15: Disco rodando con  $\theta = cte$ ; el movimiento equivale al movimiento plano de rodadura sobre una recta, con la ligadura holónoma  $x = -\varphi a$ .

### 1.3. Principios y teoremas de Newton-Euler

#### 1.3.1. Cantidad de movimiento

Consideramos un sistema formado por un número finito de partículas,  $\{m_i, i = 1, \dots, N\}$ .

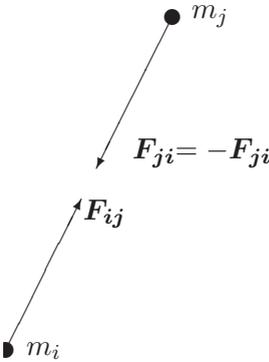


Figura 1.16: Fuerzas internas centrales entre dos partículas  $m_i$  y  $m_j$  del sistema.

Aplicando el principio de la cantidad de movimiento (2.<sup>a</sup> ley de Newton) a cada partícula  $m_i$  del sistema, siendo  $\mathbf{F}_i$  la resultante de todas las fuerzas sobre dicha partícula,

$$\mathbf{F}_i = \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i). \tag{1.33}$$

Descompondremos las fuerzas en internas y externas al sistema:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{ext} + \mathbf{F}_i^{int};$$

las fuerzas internas sobre la partícula  $i$ ,  $\mathbf{F}_i^{int}$ , son el resultado de las acciones del resto de las partículas  $j \neq i$ :

$$\mathbf{F}_i^{int} = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij},$$

donde la nomenclatura  $\mathbf{F}_{ij}$  indica la acción de  $m_j$  sobre  $m_i$ . Por la ley de acción y reacción ó 3.<sup>a</sup> ley de Newton,  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$  (figura 1.16). Así, al sumar

las ecuaciones (1.33) para todas las partículas del sistema, las fuerzas internas se anulan dos a dos, resultando:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{ext} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij}}_{=0} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{d}{dt} m_i \mathbf{v}_i \right).$$

Llamando  $\mathbf{F} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{ext} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i$  (resultante de fuerzas externas sobre el sistema), y  $\mathbf{P} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i$  (cantidad de movimiento del sistema), resulta la expresión:

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \mathbf{P}.} \quad (1.34)$$

Expresión que se puede considerar como principio básico de la dinámica de sistemas, enunciándose como sigue:

*«La derivada respecto del tiempo de la cantidad de movimiento del sistema es igual a la resultante de las fuerzas exteriores.»*

Podemos obtener otra expresión equivalente para esta ecuación a partir del movimiento del centro de masas  $G$ . Se define éste como:

$$\mathbf{r}_G \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{M}, \quad (1.35)$$

Siendo  $M \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i$ , masa total del sistema.

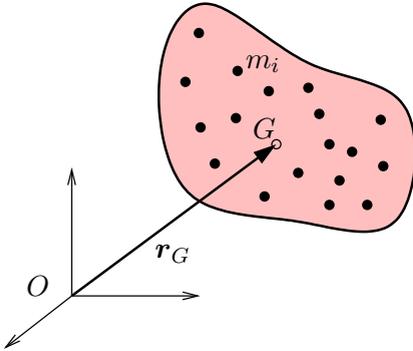


Figura 1.17: Centro de masas  $G$  de un sistema de varias partículas.

Derivando (1.35) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \right] &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{P} \\ &= M \mathbf{v}_G, \end{aligned} \quad (1.36)$$

donde  $\mathbf{v}_G \stackrel{\text{def}}{=} d\mathbf{r}_G/dt$  es la velocidad del centro de masas. Sustituyendo en (1.34), y llamando  $\mathbf{a}_G \stackrel{\text{def}}{=} d^2\mathbf{r}_G/dt^2$  a la aceleración del mismo, se llega a:

$$\boxed{\mathbf{F} = M\mathbf{a}_G} \quad (1.37)$$

Este resultado se denomina «teorema del movimiento del centro de masa», constituyendo una expresión alternativa para la ecuación (1.34). Se lee de la siguiente manera:

*«Se puede estudiar el movimiento del Centro de Masas  $G$  de un sistema como si fuera una partícula, concentrando toda la masa del sistema, sometida a la resultante de fuerzas exteriores sobre el sistema.»*

Como corolario se puede deducir el teorema de conservación correspondiente:

$$\text{si } \mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = M\mathbf{v}_G = \text{cte} \quad (1.38)$$

*«Si la resultante de las fuerzas exteriores sobre el sistema es nula, la cantidad de movimiento del sistema se conserva, por lo que el centro de masas sigue un movimiento rectilíneo y uniforme.»*

La condición de conservación se cumple obviamente para un sistema aislado, o en cualquier otro que aún sin estar aislado esté sometido a un conjunto de fuerzas con resultante nula.

### 1.3.2. Momento cinético

La ecuación de balance del momento cinético (1.4) aplicada a una partícula  $m_i$  del sistema se expresa como:

$$\mathbf{M}_O^i = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_O^i, \quad (1.39)$$

donde  $\mathbf{M}_O^i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i$ , y  $\mathbf{H}_O^i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i$  ( $i$  no sumado). Si sumamos (1.39) para todo el sistema, realizando la descomposición habitual entre fuerzas internas y externas:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{M}_O^i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \wedge \overbrace{\left( \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij} \right)}^{\mathbf{F}_i^{\text{int}}} \quad (1.40)$$

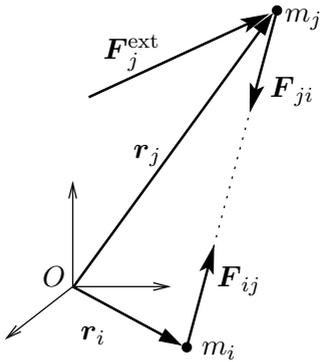


Figura 1.18: Fuerzas internas y externas sobre dos partículas cualesquiera del sistema.

Admitiremos que se cumple la ley de acción y reacción con su enunciado más fuerte: no sólo son  $\mathbf{F}_{ij}$  y  $\mathbf{F}_{ji}$  iguales y opuestas, sino que supondremos que son *fuerzas centrales*, siguiendo la misma recta de acción que une a  $m_i$  con  $m_j$ :

$$\mathbf{F}_{ij} = F_{ij}(r_{ij}) \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{r_{ij}} \quad (r_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|). \quad (1.41)$$

Entonces, para dos partículas cualesquiera:

$$\mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \wedge (-\mathbf{F}_{ij}) = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \wedge \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0} \quad (i, j \text{ no sumados})$$

De esta forma, la suma de los momentos de las fuerzas interiores en (1.40) se anula, al cancelarse dos a dos los sumandos. Definiendo el momento cinético del sistema respecto a  $O$ :

$$\mathbf{H}_O \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mathbf{H}_O^i = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i$$

y el momento de las fuerzas exteriores respecto de  $O$ :

$$\mathbf{M}_O \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mathbf{M}_O^i = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{\text{ext}}$$

se obtiene finalmente:

$$\boxed{\mathbf{M}_O = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_O} \quad (1.42)$$

Esta expresión, que llamaremos también «ecuación de balance del momento cinético», se puede considerar como principio básico de la dinámica de sistemas, con el siguiente enunciado:

«El momento de las fuerzas exteriores de un sistema respecto de un punto  $O$  fijo es igual a la derivada respecto del tiempo del momento cinético del sistema respecto del mismo punto.»

Como corolario, cuando  $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ , se obtiene el teorema de conservación correspondiente:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}_O = \text{cte.} \quad (1.43)$$

La constancia de  $\mathbf{H}_O$  puede ocurrir en los casos siguientes:

- Sistema aislado, sobre el que no actúa ninguna fuerza exterior. El momento cinético del sistema respecto de cualquier punto se conserva.
- Fuerzas centrales (todas dirigidas hacia un mismo punto fijo), en cuyo caso se conserva el momento cinético respecto del centro de fuerzas, aunque no necesariamente respecto de otros puntos distintos.

En lo anterior se ha admitido que las fuerzas internas son todas centrales (1.41). Las interacciones de tipo gravitatorio o electrostático cumplen muy aproximadamente esta condición, pero otro tipo de fuerzas como las electrodinámicas no la cumplen necesariamente. De hecho, en sistemas con cargas eléctricas móviles, se puede violar la ley de acción y reacción, tanto en su enunciado fuerte (fuerzas centrales) como en su enunciado más débil. En el caso de un sólido las interacciones entre partículas se deben a fuerzas de contacto, de naturaleza compleja, que tampoco resulta evidente que deban ser centrales. Sin embargo, en los casos en los que existan fuerzas internas del tipo mencionado, generalmente se puede encontrar una generalización de  $\mathbf{P}$  ó de  $\mathbf{H}_O$  que verifica los teoremas de conservación enunciados. Por lo tanto, en lo que sigue supondremos que, independientemente de la naturaleza de las fuerzas internas, se verifica el principio del momento cinético expresado por (1.42). Puesto que esta afirmación se postula como base de partida, es más apropiado referirse a ella como «principio» que como «teorema».

Conviene realizar una aclaración importante, previniendo del grave error que resultaría de confundir en (1.42) la resultante de los momentos,  $\mathbf{M}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{ext}$ , con el momento de la resultante, que si suponemos a ésta aplicada en  $G$ , sería  $\mathbf{r}_G \wedge (\sum_i \mathbf{F}_i^{ext}) \neq \mathbf{M}_O$ . De caer en esta confusión, se llegaría a contradicciones tan graves como que un sistema sometido a un par de fuerzas (que tiene resultante nula) no se movería.

### 1.3.3. Energía cinética

La ecuación de la energía cinética (1.6) aplicada a cada partícula  $m_i$  expresa:

$$dW_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = d\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right) \quad (i \text{ no sumado})$$

Al igual que en los casos anteriores, para obtener las magnitudes cinéticas del sistema conjunto, sumamos para todas las partículas del mismo:

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 \quad \Rightarrow \quad dT = d\left[\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2\right]$$

$$dW \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \underbrace{\sum_i \mathbf{F}_i^{(ext)} \cdot d\mathbf{r}_i}_{dW^{ext}} + \underbrace{\sum_i \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i}_{dW^{int}},$$

obteniéndose finalmente:

$$dT = dW$$

En las ecuaciones de la cantidad de movimiento (1.34) y del momento cinético (1.42), el efecto de las fuerzas interiores desaparecería al sumar para todo el sistema. Sin embargo, en un caso general el trabajo debido a las fuerzas interiores no se anula:

$$dW^{int} \neq 0.$$

Merece la pena analizar de forma detallada el trabajo de las fuerzas interiores para comprender mejor el significado de la observación anterior. Sean dos partículas cualesquiera del sistema,  $m_i$  y  $m_j$ , situadas inicialmente en  $A$  y  $B$  (figura 1.19). Suponemos que al cabo de un movimiento elemental arbitrario están situadas en dos puntos cualesquiera  $A'$  y  $B'$ . Podemos descomponer el movimiento elemental total en:

1. Traslación ( $T$ ) pasando  $A$  a  $A'$  y  $B$  a  $B''$ :

$$d\mathbf{r}_i^T = d\mathbf{r}_j^T$$

$$dW^T = \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i^T + (-\mathbf{F}_{ij}) \cdot d\mathbf{r}_i^T = 0$$

2. Rotación ( $R$ ) alrededor de  $A'$ , en el plano definido por  $A'B''B'$ , quedando fijo  $m_i$  y pasando  $m_j$  a  $B'''$ :

$$d\mathbf{r}_j^R = dt\boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i); \quad d\mathbf{r}_i^R = \mathbf{0}$$

$$dW^R = \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_j^R = \mathbf{F}_{ji} \cdot [dt\boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)] = 0$$

donde se ha supuesto que  $\mathbf{F}_{ij}$  lleva la dirección de  $(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$ , es decir, se trata de fuerzas centrales.

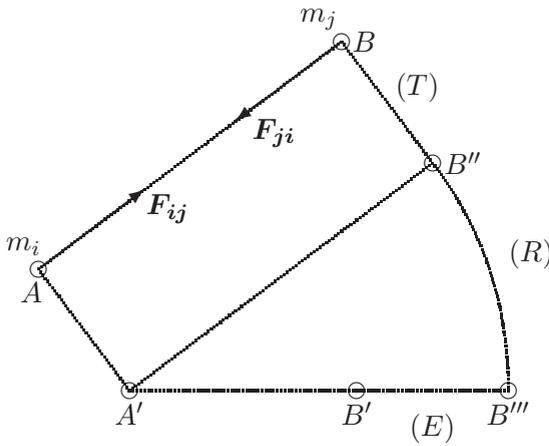


Figura 1.19: *Descomposición de un movimiento elemental general en traslación, rotación y estiramiento.*

3. Estiramiento (E), quedando fija  $m_i$  y pasando finalmente  $m_j$  a  $B'$ :

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}_j^E; \quad d\mathbf{r}_i^E = \mathbf{0}, \\ dW^E = \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_j^E \neq 0. \end{aligned}$$

En resumen, los movimientos de traslación y rotación son movimientos de sólido rígido y no producen trabajo de las fuerzas interiores. Por el contrario, las deformaciones internas (distorsiones o estiramientos), que no corresponden a movimientos de sólido rígido, sí producen un trabajo neto de las fuerzas interiores.

En definitiva, se puede escribir:

$$\boxed{dT = dW = dW^{int} + dW^{ext}} \tag{1.44}$$

*«La variación de la energía cinética conjunta de un sistema es igual al trabajo realizado por las fuerzas, tanto internas como externas.»*

La consideración del trabajo de las fuerzas interiores es imprescindible para el cálculo de estructuras y la mecánica de los medios continuos deformables, en los que la deformación viene gobernada por la energía interna de deformación acumulada. Los métodos y teoremas energéticos proporcionan algunos de los procedimientos más potentes de cálculo en este caso.

Si todas las fuerzas (tanto externas como internas) provienen de un potencial independiente del tiempo, se verificará:

$$dW = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = -dV,$$

deduciéndose entonces de (1.44) el teorema de conservación de la energía:

$$dT + dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = T + V = \text{cte.}} \quad (1.45)$$

Conviene recalcar que en esta ecuación la energía potencial  $V$  corresponde a la *Energía Potencial Total*, derivándose de ella tanto las fuerzas interiores como las exteriores. Como ejemplo, en el caso de las estructuras o de los medios elásticos deformables,  $V$  debe incluir tanto el potencial de las cargas externas aplicadas como la energía de deformación debida a las fuerzas interiores.

Si las fuerzas internas en el sistema son centrales en el sentido de (1.41), necesariamente provienen de un potencial:

$$V_{ij}(r_{ij}) = - \int F_{ij}(\rho) d\rho;$$

$$\mathbf{F}_{ij} = - \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i}. \quad (1.46)$$

Es posible demostrar en este caso que el potencial conjunto de las fuerzas interiores es

$$V^{\text{int}} = \sum_i \sum_{j>i} V_{ij}. \quad (1.47)$$

(La limitación  $j > i$  sirve para no sumar dos veces el potencial de interacción entre cada dos partículas.) De esta forma la ecuación (1.44) se convierte en

$$d(T + V^{\text{int}}) = dW^{\text{ext}}.$$

En este caso, si se trata de un *sistema aislado* se verificaría

$$\boxed{E = T + V^{\text{int}} = \text{cte.}} \quad (1.48)$$

**EJEMPLO 1.5:** Potencial de fuerzas internas de un sistema de partículas discretas, con atracción lineal en función de la distancia entre cada dos partículas.

*Solución.* Se trata de fuerzas análogas a resortes lineales ideales interpuestos entre cada dos partículas, siguiendo el esquema de fuerzas centrales. Suponiendo en primer lugar que la constante de todos estos resortes es la misma, el potencial de uno de ellos es

$$V_{ij} = \frac{1}{2} k r_{ij}^2,$$

siendo  $r_{ij}$  la distancia entre la pareja de puntos  $(i, j)$ . Teniendo en cuenta que  $\partial r_{ij} / \partial \mathbf{r}_i = -\mathbf{r}_{ij} / r_{ij}$ , la fuerza ejercida sobre  $i$  por  $j$  se obtiene siguiendo (1.46):

$$\mathbf{F}_{ij} = - \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} = k \mathbf{r}_{ij}.$$

La energía potencial total para todo el sistema, según (1.47), es

$$V^{\text{int}} = \sum_i \sum_{j>i} \frac{1}{2} k r_{ij}^2.$$

Un caso particular sería aquél en que las constantes de atracción entre cada dos partículas son proporcionales al producto de las masas,

$$\mathbf{F}_{ij} = \alpha m_i m_j \mathbf{r}_{ij}.$$

Sumando todas las fuerzas internas sobre una partícula dada,

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \alpha m_i m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = \alpha m_i M (\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_i)$$

siendo  $M = \sum_k m_k$  la masa total. Se obtiene por tanto una fuerza de atracción de cada partícula hacia el centro de masas del conjunto. El movimiento de cada partícula relativo a dicho centro de masas sería una órbita elíptica con centro en él. Es trivial comprobar que la suma de todas las fuerzas interiores dadas por la anterior expresión se anula.  $\square$

## 1.4. El sistema de referencia del centro de masas

El sistema del centro de masas (SCM) se define como un sistema de referencia cuyo origen está en el centro de masas  $G$  y que no experimenta rotación. Si se caracteriza mediante un triedro de coordenadas cartesianas, las direcciones de las mismas serán fijas y paralelas al sistema inercial de partida (figura 1.20).

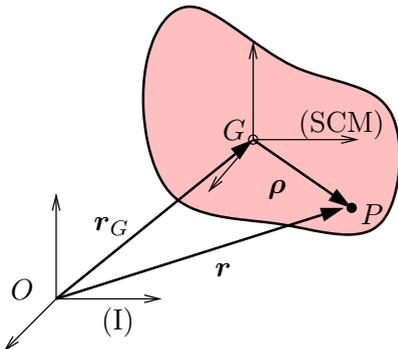


Figura 1.20: El sistema de referencia del centro de masas (SCM), con origen en  $G$  y ejes paralelos al sistema inercial (I).

Las expresiones de posición, velocidad y aceleración relativos al SCM son respectivamente

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho} &= \mathbf{r} - \mathbf{r}_G, \\ \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{v} - \mathbf{v}_G, \\ \boldsymbol{\alpha} &= \mathbf{a} - \mathbf{a}_G.\end{aligned}$$

Para obtener  $\boldsymbol{\nu}$  y  $\boldsymbol{\alpha}$  en estas expresiones, se ha derivado directamente de manera sucesiva la expresión de  $\boldsymbol{\rho}$ , sin resultar necesario emplear el término complementario de derivación  $\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}$  establecido en la ecuación (1.25). Esto se debe a que por su definición el SCM no gira ( $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$ ) anulándose entonces dicho término.

Sin embargo, debe quedar claro que, aunque el SCM no gire, en un caso general puede tener aceleración de traslación ( $\mathbf{a}_G \neq \mathbf{0}$ ), y que por lo tanto, *no se trata de un sistema inercial*<sup>12</sup>. A pesar de esto, su uso posee ventajas notables, ya que como veremos a continuación, se siguen cumpliendo los principios del momento cinético y de la energía cinética, exactamente como si se tratase de un sistema inercial. El principio de la cantidad de movimiento queda reducido a una igualdad trivial.

#### 1.4.1. Cantidad de movimiento

En el SCM, la expresión de la cantidad de movimiento  $\mathbf{P}$  es:

$$\mathbf{P}^{SCM} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i \boldsymbol{\nu}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i - \underbrace{\left( \sum_i m_i \right)}_{\stackrel{\text{def}}{=} M} \mathbf{v}_G = \mathbf{0},$$

donde se ha empleado (1.36). Así, resulta la expresión trivial:

$$\boxed{\mathbf{P}^{SCM} = \mathbf{0}}$$

#### 1.4.2. Momento cinético

El momento cinético en un punto cualquiera  $Q$  viene dado por la expresión

$$\mathbf{H}_Q = \mathbf{H}_O + \mathbf{P} \wedge \mathbf{r}_Q = \mathbf{H}_O - \mathbf{r}_Q \wedge (M\mathbf{v}_G). \quad (1.49)$$

---

<sup>12</sup>Una excepción a esto sería el caso de un sistema aislado, en el que  $G$  se mueve con velocidad rectilínea y uniforme, ver ecuación (1.38).

Aplicando esta ecuación al centro de masas  $G$ :

$$\mathbf{H}_G = \mathbf{H}_O - \mathbf{r}_G \wedge M\mathbf{v}_G. \quad (1.50)$$

Conviene resaltar que en esta expresión del momento cinético se emplean velocidades absolutas.

Sin embargo, para calcular el momento cinético relativo al SCM, además de tomar momentos respecto de  $G$ , debemos emplear también las velocidades  $\mathbf{v}_i$  relativas al SCM:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_G^{SCM} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \wedge m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_G) \\ &= \underbrace{\sum_i \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i}_{\mathbf{H}_O} - \underbrace{\sum_i \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_G}_{\mathbf{r}_G \wedge M\mathbf{v}_G} - \underbrace{\mathbf{r}_G \wedge \sum_i m_i \mathbf{v}_i}_{\mathbf{r}_G \wedge M\mathbf{v}_G} + \mathbf{r}_G \wedge M\mathbf{v}_G \\ &= \mathbf{H}_O - \mathbf{r}_G \wedge M\mathbf{v}_G. \end{aligned}$$

Observamos pues que ambas expresiones resultan ser idénticas:  $\mathbf{H}_G^{SCM} = \mathbf{H}_G$ . Por tanto, a la hora de tomar momentos en  $G$ , no nos preocuparemos de este aspecto y escribiremos simplemente  $\mathbf{H}_G$ . Conviene advertir que esto no sucede en otros puntos distintos de  $G$ .

Derivando (1.50) respecto del tiempo:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{H}_G = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_O - \underbrace{\mathbf{v}_G \wedge M\mathbf{v}_G}_{=0} - \mathbf{r}_G \wedge \underbrace{M\mathbf{a}_G}_{\mathbf{F}} = M\mathbf{O} - \mathbf{r}_G \wedge \mathbf{F}$$

pero

$$\mathbf{M}_G = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \wedge \mathbf{F}_i^{ext} = M\mathbf{O} - \mathbf{r}_G \wedge \underbrace{\left( \sum_i \mathbf{F}_i^{ext} \right)}_{\mathbf{F}},$$

luego:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \mathbf{H}_G = \mathbf{M}_G} \quad (1.51)$$

Es decir, se verifica la ecuación del Momento Cinético (1.42) respecto del origen  $G$  del SCM, exactamente igual que si fuese inercial.

Por lo tanto, continuando con la discusión realizada al final del apartado 1.3.2, para aplicar la ecuación de balance del momento cinético (1.42), se debe tomar momentos bien respecto de un punto fijo  $O$ , o bien respecto del centro de masas  $G$  del sistema; En este último caso, las velocidades pueden ser las

absolutas respecto de un sistema inercial, o las relativas al SCM, ya que según hemos visto ambas dan idéntico resultado.

Por el contrario, si empleamos un punto  $Q$  cualquiera, que no coincida necesariamente con  $G$  ni sea fijo, derivando la fórmula (1.49) resulta:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{H}_Q = \frac{d}{dt}(\mathbf{H}_O - \mathbf{r}_Q \wedge M\mathbf{v}_G) = \underbrace{\mathbf{M}_O - \mathbf{r}_Q \wedge M\mathbf{a}_G}_{\mathbf{M}_Q} - \mathbf{v}_Q \wedge M\mathbf{v}_G$$

Es decir:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{H}_Q = \mathbf{M}_Q - \mathbf{v}_Q \wedge M\mathbf{v}_G. \quad (1.52)$$

Es necesario pues añadir un término complementario  $\mathbf{v}_Q \wedge M\mathbf{v}_G$  respecto de las ecuaciones (1.42) ó (1.51). Por tanto, si se toman momentos respecto de otro punto  $Q$ , sólo se verificará la ecuación de balance del momento cinético (1.42) cuando se cumpla una de las condiciones siguientes:

- si el punto  $Q$  tiene velocidad nula,  $\mathbf{v}_Q = \mathbf{0}$ ;
- si el punto  $Q$  coincide con  $G$ , o por lo menos, su velocidad es paralela a la de  $G$ :  $\mathbf{v}_Q \parallel \mathbf{v}_G$ .

Como resultado de la discusión anterior se extrae una recomendación importante a efectos prácticos:

*no conviene nunca aplicar la ecuación del momento cinético (1.42) en puntos que no sean bien fijos, bien el centro de masas.*

La razón es que los términos correctores que habría que manejar en otro caso no tienen una interpretación física clara, siendo muy fácil que den lugar a confusiones.

A estos efectos es importante destacar que no es lo mismo un punto fijo que un punto que tenga velocidad nula en un instante (en este último caso el punto puede tener aceleración no nula en cuyo caso no es válido para aplicar la ecuación del momento cinético). Otra posible fuente de error es confundir la velocidad de un punto definido por un criterio geométrico (velocidad de «sucesión»), con la velocidad del punto del sólido que coincide con él en un instante dado<sup>13</sup>.

<sup>13</sup>Esto último ocurre a menudo cuando se toman momentos respecto del punto de contacto de dos sólidos, como en la rodadura de un disco sobre una recta. El punto de contacto entre ambos se traslada sobre la recta al rodar el disco, por lo que su velocidad no es nula; sin embargo, es el centro instantáneo de rotación en cada instante, por lo que la velocidad del punto del disco situado sobre él en cada instante sí será nula. Por ejemplo, para un sólido

### 1.4.3. Energía cinética

Calculamos primero la relación entre las medidas de la energía cinética  $T$  (absoluta) y  $T^{SCM}$  (relativa al SCM):

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\nu}_i) \cdot (\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\nu}_i) \\ &= \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2}_{\stackrel{\text{def}}{=} T^{SCM}} + \underbrace{\left( \sum_i m_i \boldsymbol{\nu}_i \right)}_{=0} \cdot \mathbf{v}_G + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_G^2, \end{aligned}$$

es decir:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M v_G^2 + T^{SCM}} \quad (\text{Teorema de König}) \quad (1.53)$$

La energía cinética del sistema se puede descomponer por tanto en la suma de la de una partícula con toda la masa  $M$  que se moviera con  $G$ , más la energía cinética relativa al SCM. El primer sumando se puede interpretar como el debido al movimiento de traslación del sistema, mientras que el segundo corresponde al movimiento relativo al centro de masa.

Si se calculase lo mismo respecto a otro sistema basado en otro punto distinto del CDM  $Q \neq G$ , la expresión anterior no sería válida, siendo necesarios términos adicionales<sup>14</sup>. Volvemos a advertir al igual que ya se hizo para el momento cinético, para evitar posibles errores en la aplicación del teorema de König, de la inconveniencia de aplicar esta última reducción a un punto  $Q$  distinto de  $G$ .

Tomando una variación elemental (diferencial) de  $T^{SCM}$ ,

$$dT^{SCM} = \sum_i m_i (\boldsymbol{\alpha}_i dt) \cdot \boldsymbol{\nu}_i = \sum_i m_i \boldsymbol{\alpha}_i \cdot d\boldsymbol{\rho}_i$$

Pero:

$$\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i = m_i (\boldsymbol{\alpha}_i + \mathbf{a}_G) \quad \Rightarrow \quad m_i \boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_G,$$

luego

$$dT^{SCM} = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\boldsymbol{\rho}_i - \underbrace{\left( \sum_i m_i d\boldsymbol{\rho}_i \right)}_{=0} \cdot \mathbf{a}_G = \underbrace{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\boldsymbol{\rho}_i}_{\stackrel{\text{def}}{=} dW^{SCM}}.$$

---

plano que rueda sin deslizar sobre una recta, el momento cinético relativo al punto del sólido que está sobre el centro de rodadura es  $H_Q = I_Q \Omega$ , siendo  $I_Q$  el momento de inercia. No se cumple, salvo en algunos casos particulares, la ecuación  $M_Q = (d/dt)H_Q = I_Q \dot{\Omega}$ , por ser  $Q$  un punto cuya velocidad es instantáneamente nula pero que tiene aceleración no nula

<sup>14</sup>Véase *Curso de Mecánica*, J.M. Goicolea 2010, apartado 6.3.3.

Por lo tanto

$$\boxed{dT^{SCM} = dW^{SCM}},$$

es decir, se cumple también la ecuación de la energía cinética (1.44) en el sistema del centro de masa, a pesar de que no sea inercial.

#### 1.4.4. Aplicación: sólidos rígidos con movimiento plano

Como aplicación de los teoremas generales expuestos arriba, resumimos a continuación los resultados principales para el caso concreto de sólidos rígidos con movimiento plano. No se pretende una exposición rigurosa ni detallada de este tema, que se considera ya conocido a partir de cursos anteriores.

Se entiende por sólido rígido un sistema en el que la configuración relativa de todas sus partículas no sufre variación, no se producen distorsiones ni cambio de distancia entre las partículas del mismo. La condición de movimiento plano indica que las velocidades de todos los puntos pertenecen a un plano dado  $\Pi$ , es decir son perpendiculares a una determinada dirección  $\mathbf{k}$  fija (la normal a  $\Pi$ ). El plano del movimiento se puede caracterizar por las coordenadas cartesianas  $(x, y)$ , o bien los versores de la base  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  (que forman un triedro a derechas con  $\mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$ ).

Además el sólido estará constituido en el caso más general por una masa distribuida a lo largo de un cierto dominio  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ , con densidad másica  $\rho$  por unidad de volumen. Considerando la sección  $\tilde{\mathcal{B}}$  de  $\mathcal{B}$  por el plano del movimiento, es posible también definir una densidad másica por unidad de área, que llamaremos  $\tilde{\rho}$  para diferenciarla de la volumétrica:

$$dm = \rho dV = \tilde{\rho} dA.$$

Así, la masa del sólido será

$$M = \int_{\tilde{\mathcal{B}}} \tilde{\rho} dA. \quad (1.54)$$

El centro de masas se obtiene mediante

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{M} \int_{\tilde{\mathcal{B}}} \mathbf{r} \tilde{\rho} dA. \quad (1.55)$$

#### Magnitudes cinéticas

**Cantidad de movimiento.**— Se expresa de la misma manera que un sistema general:

$$\mathbf{P} = \int_{\tilde{\mathcal{B}}} \mathbf{v} \tilde{\rho} dA = M \mathbf{v}_G \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} P_x = M \dot{x}_G \\ P_y = M \dot{y}_G \end{array}} \quad (1.56)$$

**Momento cinético.**— Para expresar el momento cinético debemos introducir una nueva magnitud definida por la geometría de masas del sólido, el *momento de inercia* respecto de un punto<sup>15</sup>  $O$ :

$$I_O = \int_{\tilde{B}} r^2 \tilde{\rho} dA, \quad (1.57)$$

donde las distancias  $r$  están medidas respecto al punto  $O$  en el que se toman momentos. Dada la constancia de la geometría de masas de un sólido rígido, el momento de inercia respecto a un punto dado del mismo es una constante. El teorema de Steiner permite relacionar el momento de inercia respecto a un punto cualquiera con el que corresponde al centro de masas:

$$I_O = I_G + M\overline{OG}^2. \quad (1.58)$$

Consideramos en primer lugar el momento cinético respecto de un punto con velocidad nula, que se toma como origen de coordenadas. La expresión es

$$\mathbf{H}_O = \int_{\tilde{B}} \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} \tilde{\rho} dA. \quad (1.59)$$

Teniendo en cuenta que  $\mathbf{v} = \Omega \mathbf{k} \wedge \mathbf{r}$ , la integral resulta

$$\mathbf{H}_O = \left( \int_{\tilde{B}} r^2 \tilde{\rho} dA \right) \Omega \mathbf{k}. \quad (1.60)$$

Puesto que tanto el vector momento cinético como la velocidad angular necesariamente llevan la dirección del versor  $\mathbf{k}$  normal al plano, se puede prescindir del mismo en las expresiones. Empleando la definición del momento de inercia (1.57) resulta

$$\boxed{H_O = I_O \Omega.} \quad (1.61)$$

Tomando ahora para un caso general el momento respecto a  $G$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_G &= \int_{\tilde{B}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_G) \wedge \mathbf{v} \tilde{\rho} dA = \int_{\tilde{B}} \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} \tilde{\rho} dA - \int_{\tilde{B}} \mathbf{r}_G \wedge \mathbf{v} \tilde{\rho} dA \\ &= \mathbf{H}_O - \mathbf{r}_G \wedge M\mathbf{v}_G = I_O \Omega \mathbf{k} - \mathbf{r}_G \wedge M(\Omega \mathbf{k} \wedge \mathbf{r}_G) \\ &= (I_O - M\mathbf{r}_G^2) \Omega \mathbf{k}; \end{aligned} \quad (1.62)$$

y teniendo en cuenta el teorema de Steiner (1.58),

$$\boxed{H_G = H_G^{SCM} = I_G \Omega.} \quad (1.63)$$

---

<sup>15</sup>Estrictamente hablando, sería el momento de inercia respecto de un eje perpendicular al plano que pasa por el punto dado.

**Energía cinética.**— Consideramos en primer lugar el caso en que el origen  $O$  tenga velocidad nula:

$$T = \int_{\tilde{B}} \frac{1}{2} v^2 \tilde{\rho} dA = \int_{\tilde{B}} \frac{1}{2} (\Omega r)^2 \tilde{\rho} dA \Rightarrow T = \frac{1}{2} I_O \Omega^2. \quad (1.64)$$

En el caso general, haciendo uso del teorema de König (1.53), y teniendo en cuenta que  $T^{SCM} = \frac{1}{2} I_G \Omega^2$ ,

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \Omega^2. \quad (1.65)$$

### Ecuaciones de la dinámica

**Balance de cantidad de movimiento.**— Las ecuaciones son las mismas que en el caso general:

$$\mathbf{F} = M \mathbf{a}_G \Leftrightarrow \begin{cases} F_x = M \ddot{x}_G \\ F_y = M \ddot{y}_G \end{cases} \quad (1.66)$$

**Balance de momento cinético.**— En el caso en que  $O$  sea un punto fijo<sup>16</sup> las ecuaciones de balance resultan directamente de derivar 1.61,

$$M_O = I_O \dot{\Omega}. \quad (1.67)$$

En un caso general se puede derivar el momento cinético respecto a  $G$  (1.63):

$$M_G = I_G \dot{\Omega}. \quad (1.68)$$

Esta última expresión es de validez general, siendo posible emplearla en cualquier caso, con independencia de que exista o no un punto fijo.

Las tres ecuaciones (1.66)<sub>1</sub>, (1.66)<sub>2</sub> y (1.68) se denominan *ecuaciones cardinales de la dinámica*, siendo necesarias y suficientes para determinar en un caso general la dinámica de los tres grados de libertad del sólido en movimiento plano  $(x_G, y_G, \theta)$ .

<sup>16</sup>Es importante remarcar la condición de punto fijo en  $O$ , no bastando con que la velocidad instantánea sea nula. Por ejemplo, en un punto de rodadura no es posible tomar momentos en un caso general, ya que el punto  $O$  de rodadura varía con el movimiento, el momento de inercia  $I_O$  no correspondería a lo largo del tiempo al mismo punto material y por tanto, salvo casos particulares, tendrá derivada no nula.

EJEMPLO 1.6: Un semidisco homogéneo de masa  $M$  y radio  $R$  se mueve en un plano vertical fijo, rodando sin deslizar sobre una recta horizontal. Se pide:

- Si el semidisco está en un instante determinado con su diámetro de borde vertical y con velocidad de rotación  $\Omega$  (figura 1.21), obtener la aceleración angular  $\dot{\Omega}$  y la reacción de la recta en el punto de contacto.
- Mismas cuestiones, pero ahora para el semidisco en una posición genérica definida por el ángulo  $\theta$  (figura 1.21).

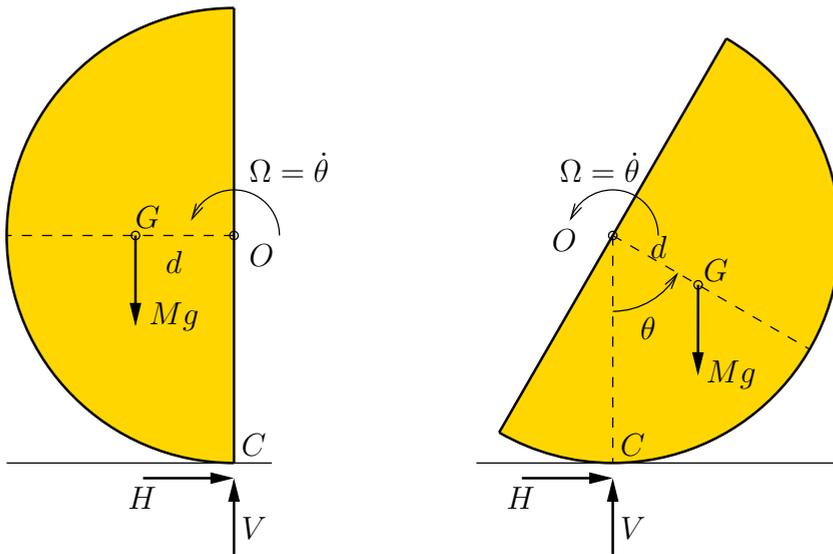


Figura 1.21: Ejemplo 1.6. Configuración con diámetro de borde vertical y configuración genérica, definida por el ángulo  $\theta$ .

Solución.

a.— Se trata de un sistema rígido y plano, que se puede resolver de forma general mediante las ecuaciones cardinales de la dinámica, que en este caso son tres (dos del balance de cantidad de movimiento y una del momento cinético en  $G$ ). La condición de rodadura restringe dos grados de libertad, por lo que el movimiento tiene un sólo grado de libertad, aunque además debemos considerar las incógnitas de las componentes de la reacción en la recta ( $H, V$ ).

En primer lugar, aplicando el teorema de Guldin calculamos la posición del centro de masas:

$$2\pi d \left( \frac{1}{2} \pi R^2 \right) = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad \Rightarrow \quad d = \overline{OG} = \frac{4R}{3\pi}.$$

Las ecuaciones de la dinámica las aplicaremos tomando momentos en  $G$ , por lo que calculamos el momento de inercia en este punto. (Obsérvese que el punto de rodadura  $C$  no es un punto fijo, por lo que en general no es válido tomar momentos en él, aunque la tentación es fuerte ya que las reacciones incógnita no dan momentos en este punto.)

$$I_O = \frac{1}{2}MR^2; \quad I_G = I_O - Md^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)MR^2$$

Mediante un análisis elemental del campo de aceleraciones resulta:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_O &= -R\ddot{\theta}; & \ddot{y}_O &= 0; \\ \ddot{x}_G &= -R\ddot{\theta} + \frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2; & \ddot{y}_G &:= -\frac{4R}{3\pi}\ddot{\theta} \end{aligned}$$

Ya podemos escribir las ecuaciones cardinales de la dinámica. En primer lugar, las de balance de cantidad de movimiento:

$$H = M\ddot{x}_G = M\left(-R\ddot{\theta} + \frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2\right); \quad (1.69)$$

$$V - Mg = M\ddot{y}_G = -M\frac{4R}{3\pi}\ddot{\theta}. \quad (1.70)$$

La ecuación del momento cinético es:

$$HR + V\frac{4R}{3\pi} = I_G\ddot{\theta} = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)MR^2\ddot{\theta}. \quad (1.71)$$

Entre las tres ecuaciones (1.69), (1.70) y (1.71) se despeja para obtener el resultado pedido:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{8}{9\pi}\left(\frac{g}{R} + \dot{\theta}^2\right); \\ H &= -\frac{4}{9\pi}M(2g - R\dot{\theta}^2); \\ V &= Mg - \frac{32}{27\pi^2}M(g + R\dot{\theta}^2) \end{aligned} \quad (1.72)$$

Puede comprobarse que, de haber tomado momentos en el punto de rodadura  $C$ , los resultados habrían sido distintos (e incorrectos).

b.— En este caso (figura 1.21), las componentes de la aceleración de  $G$  son:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_G &= -R\ddot{\theta} - \frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2 \cos \theta + \frac{4R}{3\pi}\ddot{\theta} \sin \theta \\ \ddot{y}_G &= \frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2 \sin \theta + \frac{4R}{3\pi}\ddot{\theta} \cos \theta \end{aligned} \quad (1.73)$$

Las ecuaciones cardinales de la dinámica, tomando momentos en  $G$ , resultan:

$$\begin{aligned} H &= M \left( -R\ddot{\theta} - \frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2 \operatorname{sen} \theta + \frac{4R}{3\pi}\ddot{\theta} \cos \theta \right) \\ V - Mg &= M \left( \frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2 \cos \theta + \frac{4R}{3\pi}\ddot{\theta} \operatorname{sen} \theta \right) \\ H \left( R - \frac{4R}{3\pi} \cos \theta \right) - V \frac{4R}{3\pi} \operatorname{sen} \theta &= \left( \frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right) MR^2\ddot{\theta} \end{aligned} \quad (1.74)$$

Con algo más de trabajo podemos despejar de estas tres ecuaciones los resultados buscados:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -8 \frac{(g/R + \dot{\theta}^2) \operatorname{sen} \theta}{9\pi - 16 \cos \theta} \\ H &= \frac{4}{3} M \frac{(6g\pi - 3R\dot{\theta}^2\pi + 8R\dot{\theta}^2 \cos \theta - 8g \cos \theta) \operatorname{sen} \theta}{\pi(9\pi - 16 \cos \theta)} \\ V &= Mg + \frac{1}{3} M \frac{-32g \operatorname{sen}^2 \theta + 36\pi R\dot{\theta}^2 \cos \theta - 32R\dot{\theta}^2(1 + \cos^2 \theta)}{\pi(9\pi - 16 \cos \theta)} \end{aligned} \quad (1.75)$$

Como comprobación, podemos ver que al particularizar  $\theta = -\pi/2$  en estas expresiones se obtienen las mismas del caso anterior (1.72).  $\square$

EJEMPLO 1.7: Sea un sistema binario constituido por dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  que se atraen con una fuerza central proporcional a su distancia  $s$ , es decir,  $F = -ks$ . Además, el conjunto se halla sujeto al campo gravitatorio simplificado terrestre. Se pide:

- Obtener la expresión de la energía (potencial más cinética) del conjunto en función exclusivamente de las coordenadas de su C.D.M. ( $x_G, y_G$ ), su distancia ( $s$ ), y el ángulo ( $\varphi$ ) que forma el segmento  $m_1 m_2$  con una dirección fija.
- Misma cuestión con la cantidad de movimiento y el momento cinético.
- Obtener las integrales primeras del movimiento para las coordenadas anteriores.
- Obtener la ecuación diferencial de 2.º orden del movimiento en función exclusivamente de la coordenada  $s$ .
- Tomando ahora como coordenadas las cartesianas absolutas de la partícula  $m_1$  que llamaremos  $(r_x, r_y)$  y las relativas de  $m_2$  que denominaremos  $(s_x, s_y)$ , obtener las ecuaciones de la dinámica y comprobar que las trayectorias relativas de cada partícula respecto de la otra son elipses.

*Solución.*

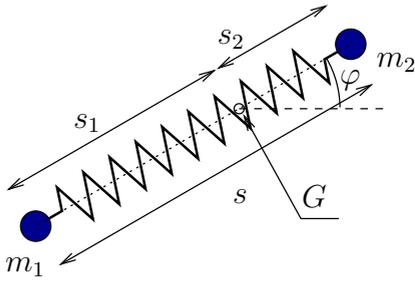


Figura 1.22: Ejemplo 1.7;

a.— Al tratarse de fuerzas centrales el movimiento es plano y sólo se necesita estudiar la configuración dentro de un plano  $xy$  fijo, con los parámetros indicados en el enunciado  $(x_G, y_G, s, \varphi)$ .

Establecemos unos parámetros auxiliares  $(s_1, s_2)$  que definen las distancias de las partículas respecto al centro de masas  $G$  (figura 1.22). Aplicando la definición de centro de masas se tienen las relaciones

$$s_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} s, ; \quad s_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} s. \quad (1.76)$$

Aplicando el teorema de König (1.53), la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}m_1(\dot{s}_1^2 + s_1^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{s}_2^2 + s_2^2\dot{\varphi}^2);$$

teniendo en cuenta las expresiones (1.76), y llamando

$$\begin{aligned} M &= (m_1 + m_2) && \text{(masa total);} \\ \mu &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} && \text{(masa equivalente),} \end{aligned}$$

se llega a:

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}\mu(\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2). \quad (1.77)$$

Por otra parte, la energía potencial es

$$V = \frac{1}{2}ks^2 + Mgy_G.$$

Por lo tanto la energía total resulta

$$E = T + V = \frac{1}{2}M(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}\mu(\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}ks^2 + Mgy_G. \quad (1.78)$$

b.— La cantidad de movimiento resulta trivialmente

$$\mathbf{P} \equiv (M\dot{x}_G, M\dot{y}_G). \quad (1.79)$$

El movimiento es plano, por lo que el momento cinético puede caracterizarse por el valor escalar  $H_G$ :

$$H_G = m_1 s_1^2 \dot{\varphi} + m_2 s_2^2 \dot{\varphi},$$

y aplicando las expresiones (1.76) se llega a

$$H_G = \mu s^2 \dot{\varphi}. \quad (1.80)$$

c.— Las fuerzas aplicadas son o bien centrales (atracción elástica) o paralelas (gravedad simplificada), por lo que el momento de las mismas en  $G$  se anula, de donde se deduce la constancia del momento cinético:

$$M_G = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 \dot{\varphi} = C \quad (\text{cte.}) \quad (1.81)$$

Por otra parte, todas las fuerzas son conservativas, por lo que se conserva la energía total, dada por la ecuación (1.78). Dentro de esta ecuación podemos dividir la energía en dos componentes, una correspondiente al movimiento del C.D.M. y otra al movimiento relativo:

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}M(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + Mgy_G}_{E_1} + \underbrace{\frac{1}{2}\mu(\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}ks^2}_{E_2}. \quad (\text{cte.}) \quad (1.82)$$

La energía  $E_1$  del C.D.M. corresponde a un movimiento parabólico y es constante:

$$\frac{d}{dt}E_1 = \frac{1}{2}M(2\dot{x}_G \underbrace{\ddot{x}_G}_{=0} + 2\dot{y}_G \underbrace{\ddot{y}_G}_{=-g}) + Mgy_G = 0;$$

por tanto podemos establecer como integral primera la constancia de la energía  $E_2$  del movimiento relativo:

$$E_2 = E - E_1 = \frac{1}{2}\mu(\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}ks^2 \quad (\text{cte.}) \quad (1.83)$$

Empleando la otra integral primera (1.81) se puede eliminar  $\dot{\varphi}$  para obtener finalmente

$$E_2 = \frac{1}{2}\mu \left( \dot{s}^2 + \frac{C^2}{s^2} \right) + \frac{1}{2}ks^2 \quad (\text{cte.}) \quad (1.84)$$

d.— La aceleración radial en coordenadas polares, expresada en función de la constante de áreas (1.81), vale:

$$a_s = \ddot{s} - s\dot{\varphi}^2 = \ddot{s} - \frac{C^2}{s^3} \quad (1.85)$$

Podemos obtener una ecuación diferencial de 2.º orden a partir de la ecuación de la dinámica radial:

$$F(r) = \mu a_s \quad \Rightarrow \quad \mu \left( \ddot{s} - \frac{C^2}{s^3} \right) = -ks. \quad (1.86)$$

Esta misma expresión se puede obtener derivando la ecuación que expresa la constante de la energía (1.84).

e.— Con los parámetros dados  $(r_x, r_y, s_x, s_y)$  se pueden plantear las ecuaciones fundamentales de la dinámica para cada masa y cada dirección:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{r}_x &= ks_x; \\ m_1 \ddot{r}_y &= -m_1 g + ks_y; \\ m_2 (\ddot{r}_x + \ddot{s}_x) &= -ks_x; \\ m_2 (\ddot{r}_y + \ddot{s}_y) &= -m_2 g - ks_y. \end{aligned} \quad (1.87)$$

Mediante las ecuaciones (1.87)<sub>1</sub> y (1.87)<sub>3</sub> se puede eliminar  $\ddot{r}_x$ . Análogamente, mediante (1.87)<sub>2</sub> y (1.87)<sub>4</sub> se elimina  $\ddot{r}_y$ . De esta manera se obtienen las dos ecuaciones reducidas siguientes:

$$\mu \ddot{s}_x + ks_x = 0; \quad \mu \ddot{s}_y + ks_y = 0. \quad (1.88)$$

Las soluciones generales de las ecuaciones anteriores son

$$s_x(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi_x); \quad s_y(t) = B \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi_y),$$

siendo  $\omega_0 = \sqrt{k/\mu}$  y  $A, B, \phi_x, \phi_y$  constantes que dependerán de las condiciones iniciales. Estas ecuaciones definen paramétricamente una elipse. Por tanto, las trayectorias relativas de cada masa respecto de la otra son *elipses*.  $\square$

### 1.4.5. Constantes del movimiento en sistemas aislados

En un sistema aislado, todas las fuerzas exteriores desaparecen. Resumiendo los diferentes resultados presentados en apartados anteriores (veáanse las ecuaciones (1.38), (1.37), (1.48), (1.53), (1.51)), es posible establecer 10 integrales o constantes del movimiento:

$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_G = \text{cte.}$	Conserv. cantidad de movimiento
$\mathbf{r}_G(t) - \frac{\mathbf{P}}{M}t = \mathbf{r}_G(0)$	Th. movimiento del C.M.
$E = T + V^{int} = \frac{1}{2}Mv_G^2 + T^{SCM} + V^{int}$	Conserv. energía
$\mathbf{H}_O = \mathbf{H}_G + \mathbf{r}_G \wedge \mathbf{P}$	Conserv. momento cinético

(1.89)

Las magnitudes  $\{\mathbf{P}, \mathbf{r}_G(0), E, \mathbf{H}_O\}$  constituyen las diez constantes clásicas del movimiento del sistema de  $N$  partículas aislado.

Es posible demostrar<sup>17</sup> que estas diez constantes provienen de la invariancia de las leyes de la mecánica ante las transformaciones más generales que convierten un sistema inercial en otro inercial, es decir, que mantienen invariantes las leyes de la mecánica:

- *Rotación  $\mathbf{R}$*  :  $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}' = \mathbf{R}\mathbf{r}$ , asociada a la conservación de  $\mathbf{H}_O$ . Al ser  $\mathbf{R}$  ortogonal<sup>18</sup> ( $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ ), este tensor de rotación depende sólo de tres parámetros.
- *Traslación  $\mathbf{a}$*  :  $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$ , asociada a la conservación de  $\mathbf{P}$ .
- *Transformación de Galileo<sup>19</sup>  $\mathbf{w}$*  :  $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{w}t$ , asociada al Th. del movimiento del centro de masa.
- *Traslación de tiempo  $s$*  :  $t \mapsto t' = t + s$ , asociada a la conservación de la energía  $E$ .

Un planteamiento similar se puede realizar a partir de la función Lagrangiana en dinámica analítica (capítulo refcap:DA).

## 1.5. Principios basados en trabajos virtuales

Los principios y teoremas generales expuestos en los apartados 1.3 y 1.4 provienen directamente de las leyes de Newton, aunque deben reconocerse también algunas contribuciones clave debidas a Euler, como el principio del momento cinético. Por este motivo los métodos asociados se suelen denominar de «Newton-Euler».

<sup>17</sup>Ver p. ej. F. Scheck: *Mechanics—from Newton's Laws to Deterministic Chaos*, (2.<sup>a</sup> ed.), Springer-Verlag, Berlin (1990); apartados 1.12 y 1.13

<sup>18</sup>En el apartado 6.3.3 se discuten las rotaciones rígidas y se analiza la propiedad de ortogonalidad para las mismas.

<sup>19</sup>Una versión más simplificada de esta transformación se presentó en el apartado 0.3.

En este apartado se presentan los principios y métodos basados en desplazamientos o trabajos virtuales. Sería posible postular estos principios básicos de manera independiente a los principios de Newton-Euler, pudiendo servir de base para construir sobre ellos toda la mecánica. A diferencia de las leyes de Newton, formulan directamente las ecuaciones para la estática o la dinámica de manera conjunta para todo un sistema, y no partícula a partícula, por lo que revisten un especial interés para el estudio de sistemas de varias partículas.

Comenzaremos por definir el concepto de *Desplazamientos virtuales*. En un sistema de  $N$  partículas, se denomina así a un conjunto de desplazamientos infinitesimales arbitrarios de cada partícula del sistema,  $\{\delta\mathbf{r}_i (i = 1, \dots, N)\}$ . En contraposición a los *desplazamientos infinitesimales reales*,  $\{d\mathbf{r}_i (i = 1, \dots, N)\}$ , los desplazamientos virtuales son una entelequia, que nos servirá para formular el principio de los trabajos virtuales; se trata de desplazamientos ficticios, inventados, que tienen lugar en un instante dado («congelado») de tiempo. Por el contrario, los desplazamientos infinitesimales reales  $\{d\mathbf{r}_i\}$  se producen en el movimiento real, durante un intervalo  $dt$ , y se pueden expresar como diferencial de las funciones que definen el movimiento,  $\{\mathbf{r}_i\}$ .

Aunque en principio  $\{\delta\mathbf{r}_i\}$  son completamente arbitrarios (pudiendo violar incluso los enlaces del sistema), en la práctica emplearemos desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces en la mayoría de los casos.

Imaginemos en primer lugar un sistema en equilibrio, condición que queda expresada por  $\dot{\mathbf{r}}_i = \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{0}$ , ( $i = 1, \dots, N$ ). Al ser la aceleración nula, la fuerza total sobre cada partícula debe ser nula; descomponiendo ésta como suma de las fuerzas activas ( $\mathbf{f}_i$ ) y reactivas ( $\mathbf{R}_i$ ),

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{f}_i + \mathbf{R}_i = \mathbf{0} \quad \forall i = i, \dots, N. \quad (1.90)$$

El trabajo virtual realizado por las fuerzas  $\mathbf{F}_i$  para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales  $\{\delta\mathbf{r}_i\}$  es, por tanto, también nulo:

$$\delta W \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \quad \forall \{\delta\mathbf{r}_i\}. \quad (1.91)$$

La equivalencia entre estas dos expresiones funciona también en sentido inverso: si se verifica la igualdad (1.91), se ha de verificar a su vez (1.90). Para demostrar esto bastaría ir tomando sucesivos conjuntos de desplazamientos virtuales, con una única componente no nula; la igualdad (1.91) obligaría a la nulidad de la componente de la fuerza correspondiente; al verificarse esta ecuación  $\forall \{\delta\mathbf{r}_i\}$ , se deduce que todas las componentes de las fuerzas han de ser nulas.

Por tanto, la ecuación (1.91), enunciada para  $\{\delta\mathbf{r}_i\}$  arbitrarios, es *condición necesaria y suficiente para el equilibrio*.

Aunque se podría tomar este enunciado, con  $\{\delta\mathbf{r}_i\}$  arbitrarios, como expresión del Principio de los Trabajos Virtuales, no se suele hacer así por la escasa utilidad que tiene un planteamiento tan general. Es preferible formularlo en función de desplazamientos virtuales compatibles, como se describe a continuación.

### 1.5.1. El principio de los trabajos virtuales

Sea un sistema con enlaces lisos (recordamos la definición realizada en el apartado 1.2 como aquellos en que las fuerzas de enlace no realizan trabajo para los desplazamientos permitidos por los enlaces), y un conjunto de desplazamientos virtuales  $\{\delta\mathbf{r}_i\}$ , *compatible* con los enlaces. Al expresar el trabajo virtual, el término de las fuerzas de enlace se anula:

$$\delta W = \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i + \underbrace{\sum_i \mathbf{R}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i}_{=0} = 0, \quad \forall\{\delta\mathbf{r}_i\} \text{ comp.}$$

Por tanto el trabajo virtual  $\delta W$  se puede calcular a partir únicamente de las fuerzas activas ( $\mathbf{f}_i$ ), eliminando las fuerzas reactivas del cómputo del mismo. El principio de los trabajos virtuales reza entonces:

*“En un sistema material sometido a enlaces lisos, es condición necesaria y suficiente para el equilibrio que el trabajo de las fuerzas aplicadas para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces sea nulo:*

$$\boxed{\delta W = \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0, \quad \forall\{\delta\mathbf{r}_i\} \text{ comp.}"} \quad (1.92)$$

OBSERVACIONES:

- Es inmediato comprobar que (1.92) se cumple necesariamente si se verifica (1.90), es decir, se trata de una condición necesaria para el equilibrio en el sentido de Newton. Sin embargo, la suficiencia para garantizar el equilibrio no se puede deducir directamente, como ocurría en el caso de  $\{\delta\mathbf{r}_i\}$  arbitrarias (1.91).
- Para una fuerza total  $\mathbf{F}_i$  sobre un punto dado, se verifica que  $\mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$ ,  $\forall i$  (no sumado); sin embargo, para la fuerza activa correspondiente  $\mathbf{f}_i$  en general es  $\mathbf{f}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i \neq 0$ . Es decir, los términos individuales del trabajo virtual de las fuerzas activas no tienen porqué anularse, aunque la suma sí es siempre nula ( $\sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$ ).

- Las fuerzas activas  $\mathbf{f}_i$  deben incluir tanto las externas como las internas, que en un caso general sí realizan trabajo virtual. Por el contrario,  $\mathbf{f}_i$  excluyen a las fuerzas de reacción, que no desarrollan trabajo virtual.

Estas observaciones justifican la consideración del enunciado anterior (1.92) como «principio», que se postula sin necesidad de demostración. A pesar de esto conviene mencionar que es posible encontrar algunas demostraciones<sup>20</sup> que inciden en la equivalencia del principio de los trabajos virtuales con la estática.

Por último, conviene notar que la ventaja del principio de los trabajos virtuales es que plantea las condiciones para el equilibrio global del sistema, *sin emplear las reacciones de los enlaces lisos*, que no hace falta calcular en ningún momento.

También pueden tratarse problemas con enlaces no lisos, agregando a la expresión (1.92) el trabajo virtual correspondiente a las reacciones de los enlaces no lisos, como si se tratase de fuerzas activas. Dicho de otra forma, las únicas fuerzas de reacción que se eliminan de la expresión general del trabajo virtual son las de los enlaces lisos.

### 1.5.2. El principio de D'Alembert

Este principio extiende el de los trabajos virtuales a la dinámica. Partimos para ello de la segunda ley de Newton para una partícula cualquiera del sistema:

$$\mathbf{F}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Pasando las «fuerzas de inercia» ( $-m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$ ) al lado izquierdo del signo igual, resulta una expresión del «equilibrio dinámico», análoga a (1.90):

$$\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{0} \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (1.93)$$

Aplicamos ahora el principio de los trabajos virtuales al sistema de fuerzas nulo  $\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$ , anulándose, al igual que antes, el trabajo de las fuerzas de reacción, bajo la hipótesis de enlaces lisos. Resulta entonces el enunciado siguiente del Principio de D'Alembert:

*“En un sistema material sometido a enlaces lisos, la evolución dinámica del sistema está determinada, como condición necesaria y suficiente, por la anulación en todo instante del trabajo de las fuerzas aplicadas más el trabajo de las fuerzas de inercia para cualquier*

<sup>20</sup>por ejemplo, Appell y Dautheville, en «*Précis de Mécanique Rationnelle*»

conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces:

$$\boxed{\underbrace{\sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i}_{\delta W} - \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad \forall \{\delta \mathbf{r}_i\} \text{ comp.}} \quad (1.94)$$

OBSERVACIONES:

- Es inmediato comprobar que la condición enunciada (1.94) es necesaria, a partir de (1.93). Sin embargo, no es sencillo demostrar la suficiencia con carácter general.
- Para una partícula dada será en general  $(\mathbf{f}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i \neq 0$ , es decir que el sumando individual del trabajo virtual no se anula necesariamente, aunque la suma extendida a todo el sistema sí se anula siempre.
- Aplica la misma observación realizada arriba para el P.T.V. sobre la naturaleza de las fuerzas  $\mathbf{f}_i$ .

En consecuencia, el principio de D'Alembert (1.94) debe considerarse como un principio básico de la dinámica, alternativo a las leyes de Newton y a los principios de Newton-Euler para dinámica de sistemas. Como caso particular, el Principio de D'Alembert da lugar al Principio de los Trabajos Virtuales.

Al igual que en el principio de los trabajos virtuales, el principio de D'Alembert permite expresar la dinámica global del sistema en forma compacta, eliminando las fuerzas de reacción de los enlaces lisos.

Cuando lo que se busca es precisamente calcular el valor de alguna reacción, es posible realizarlo mediante trabajos virtuales empleando un truco. Para ello, se considera este vínculo «liberado» y la fuerza de reacción como una fuerza activa normal, que tendría el efecto precisamente del vínculo. esto nos permite tomar  $\delta \mathbf{r}_i$  vulnerando el vínculo. De esta manera, la reacción correspondiente sí realiza trabajo virtual, y la expresión de los trabajos virtuales (1.92) ó (1.94) permite calcular al final dicha reacción.

La importancia de los métodos basados en los trabajos virtuales radica en que permiten obtener formulaciones prácticas muy generales para la estática o la dinámica de sistemas con varias partículas (ecuaciones de Lagrange, apartado 2.2). Asimismo son la base de métodos numéricos, muy extendidos en la práctica, para la resolución de problemas con numerosos grados de libertad, como el *método de los elementos finitos*. Estos métodos son de una gran importancia en la mecánica computacional y en el cálculo de las estructuras.

EJEMPLO 1.8: El sistema de la figura consta de dos poleas, una  $A$  fija, de la que cuelga una masa  $m_3$  y por el otro lado otra polea  $B$ . A su vez de esta segunda polea cuelgan dos masas  $m_2$  y  $m_3$ . Los hilos son inextensibles y las poleas lisas y sin inercia. Obtener las ecuaciones de la dinámica aplicando el principio de D'Alembert y las aceleraciones de cada una de las masas. (Problema de Poggendorf.)

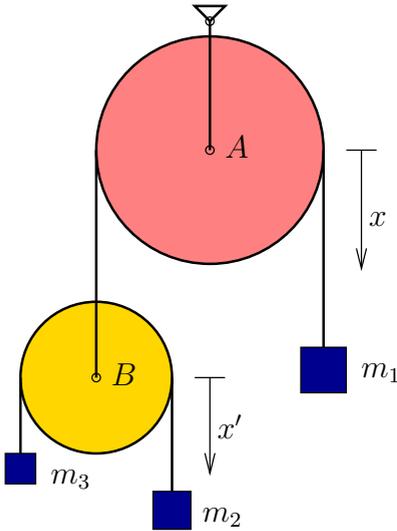


Figura 1.23: *Ejemplo 1.8; Problema de Poggendorf.*

*Solución.* Para definir el sistema se puede emplear la coordenada (absoluta)  $x$ , medida en sentido descendente y a partir de una posición dada de cada uno de los elementos:  $(x_1, x_2, x_3, x_B)$ . Así en principio el sistema tiene cuatro parámetros, aunque estos se encuentran ligados por dos ecuaciones de ligadura, por lo que el número de grados de libertad es de dos.

Empleando también la coordenada relativa  $x'$ , medida a partir de la posición del centro de la polea  $B$ , las ecuaciones de ligadura son:

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_B; \\ x'_2 &= -x'_3. \end{aligned} \quad (1.95)$$

Teniendo en cuenta la definición de las coordenadas relativas:

$$x'_2 = x_2 - x_B; \quad x'_3 = x_3 - x_B, \quad (1.96)$$

las ecuaciones (1.95) se convierten en la ecuación de ligadura siguiente en términos de  $(x_1, x_2, x_3)$ :

$$x_1 = -\frac{1}{2}(x_2 + x_3). \quad (1.97)$$

Esta ecuación de ligadura nos permitirá escribir las ecuaciones en función de las dos coordenadas libres  $(x_1, x_2)$ .

La expresión del principio de D'Alembert es:

$$\begin{aligned}\delta W &= m_1 g \delta x_1 + m_2 g \delta x_2 + m_3 g \delta x_3 \\ &= m_1 \ddot{x}_1 \delta x_1 + m_2 \ddot{x}_2 \delta x_2 + m_3 \ddot{x}_3 \delta x_3, \\ &\quad \forall (\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3) \text{ compatibles.} \quad (1.98)\end{aligned}$$

A partir de la ecuación de ligadura (1.97) se deducen las siguientes dos expresiones inmediatas:

$$\delta x_3 = -2\delta x_1 - \delta x_2; \quad \ddot{x}_3 = -2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2. \quad (1.99)$$

Empleando estas ecuaciones en (1.98) y agrupando términos, se obtiene:

$$\begin{aligned}(m_1 g - 2m_3 g) \delta x_1 + (m_2 g - m_3 g) \delta x_2 \\ = [m_1 \ddot{x}_1 - 2m_3 (-2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)] \delta x_1 + [m_2 \ddot{x}_2 - m_3 (-2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)] \delta x_2, \\ \quad \forall (\delta x_1, \delta x_2). \quad (1.100)\end{aligned}$$

Nótese que, al ser libres, no hace falta exigir en la expresión anterior ninguna condición de «compatibilidad con los enlaces» a  $(\delta x_1, \delta x_2)$ . Particularizando para los valores  $(\delta x_1 = 1, \delta x_2 = 0)$  y  $(\delta x_1 = 0, \delta x_2 = 1)$  se obtienen las dos ecuaciones de la dinámica:

$$\begin{aligned}m_1 g - 2m_3 g &= m_1 \ddot{x}_1 - 2m_3 (-2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2); \\ m_2 g - m_3 g &= m_2 \ddot{x}_2 - m_3 (-2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)\end{aligned} \quad (1.101)$$

Despejando de estas ecuaciones el valor de las aceleraciones:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= g \frac{m_1 m_2 + m_1 m_3 - 4m_3 m_2}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_3 m_2} \\ \ddot{x}_2 &= g \frac{-3m_1 m_3 + m_1 m_2 + 4m_3 m_2}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_3 m_2}\end{aligned} \quad (1.102)$$

Por último, empleando la expresión (1.99)<sub>2</sub> se obtiene la aceleración de  $m_3$ :

$$\ddot{x}_3 = g \frac{-3m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_3 m_2}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_3 m_2}. \quad (1.103)$$

□

## 1.6. Dinámica en sistemas no inerciales.

Las leyes de Newton son válidas en los sistemas de referencia denominados *inerciales*. Se postula, al formularlas, la existencia al menos de un tal sistema inercial; por el principio de relatividad de Galileo (apartado 0.3), sabemos que cualquier otro sistema de referencia que tenga un movimiento uniforme y rectilíneo respecto del primero también será inercial. En ocasiones llamamos al sistema inercial «fijo», aunque este adjetivo no se emplea con su significado estricto, sino como contraposición al carácter general de un sistema «móvil», no inercial.

Los sistemas de referencia que posean, bien aceleración lineal de su origen ( $\mathbf{a}_O \neq \mathbf{0}$ ), bien rotación ( $\boldsymbol{\Omega} \neq \mathbf{0}$ ), no serán inerciales. En ellos no se cumplen las leyes de Newton, por lo que no será posible, por ejemplo, aplicar a cada partícula la ecuación  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , si la medición de la aceleración la realiza un observador ligado al sistema móvil. Sin embargo, es posible estudiar la dinámica de estos sistemas aplicando ciertos términos correctores, lo que puede tener interés práctico en algunos casos. De este tema tratamos a continuación.

### 1.6.1. Dinámica de la partícula

Sea una partícula observada desde dos sistemas de referencia distintos:  $(S) \equiv (Qxyz)$ , inercial, y  $(S') \equiv (Ox'y'z')$ , no inercial:

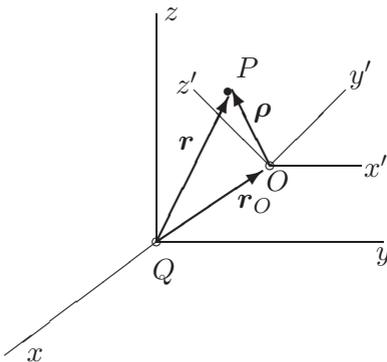


Figura 1.24: Coordenadas de la partícula en sistemas de referencia inercial  $(Qxyz)$  y no inercial  $(Ox'y'z')$ .

Recordemos las relaciones entre posición (1.24), velocidad (1.26) y accelera-

ción (1.29) en ambos sistemas:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}, \\ \mathbf{v} &= \underbrace{\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}}_{\mathbf{v}_{\text{arr}}} + \mathbf{v}_{\text{rel}}, \\ \mathbf{a} &= \underbrace{\mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho})}_{\mathbf{a}_{\text{arr}}} + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{\text{rel}}}_{\mathbf{a}_{\text{cor}}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}, \end{aligned}$$

donde  $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{a})$  son medidas que denominaremos «absolutas» (más precisamente, relativas a  $(S)$ ), mientras que  $(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v}_{\text{rel}}, \mathbf{a}_{\text{rel}})$  son relativas a  $(S')$ .

El término de arrastre es el que corresponde al movimiento del sólido rígido, es decir, el que tendría la partícula sin movimiento relativo a  $(S')$ . En el campo de velocidades es el único término complementario que aparece. En cambio, para las aceleraciones aparece otro término adicional denominado aceleración de Coriolis. Expresando el principio de la cantidad de movimiento (con aceleraciones absolutas, por supuesto):

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m(\mathbf{a}_{\text{arr}} + \mathbf{a}_{\text{cor}} + \mathbf{a}_{\text{rel}});$$

para expresarlo en función de las observaciones relativas a  $(S')$  es necesario pasar los términos complementarios a la izquierda:

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a}_{\text{arr}} - m\mathbf{a}_{\text{cor}} = m\mathbf{a}_{\text{rel}}. \quad (1.104)$$

Por tanto, para aplicar la ecuación de balance del principio, es necesario añadir a las fuerzas realmente actuantes  $\mathbf{F}$  unas *fuerzas de inercia ficticias*  $(-m\mathbf{a}_{\text{arr}})$  y  $(-m\mathbf{a}_{\text{cor}})$ , denominadas fuerzas de arrastre y de Coriolis respectivamente.

Desarrollando su expresión, comprobamos que la fuerza de arrastre es una función de punto, es decir, depende de  $\boldsymbol{\rho}$  además de otros parámetros que puedan definir el movimiento del sistema móvil  $(\mathbf{a}_O, \boldsymbol{\Omega}, \dot{\boldsymbol{\Omega}})$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{arr}} &\stackrel{\text{def}}{=} -m[\mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho})] \\ &= -m\mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{a}_O, \boldsymbol{\Omega}, \dot{\boldsymbol{\Omega}}). \end{aligned}$$

Bajo ciertas condiciones, la fuerza de arrastre se puede expresar como el gradiente de un determinado campo escalar y, por tanto, resulta una fuerza conservativa. Por ejemplo, si se verifica que  $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{0}$ ,

$$\mathbf{F}_{\text{arr}} = -m[\mathbf{a}_O - \Omega^2 \boldsymbol{\rho} + (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\Omega}];$$

multiplicando escalarmente por  $d\boldsymbol{\rho}$  obtenemos el trabajo elemental de esta fuerza; si suponemos además que  $\mathbf{a}_O$  es constante, comprobamos que es una

diferencial exacta:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{arr}} \cdot d\boldsymbol{\rho} &= -m\mathbf{a}_O \cdot d\boldsymbol{\rho} + m\Omega^2 \boldsymbol{\rho} \cdot d\boldsymbol{\rho} - m(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\rho})(\boldsymbol{\Omega} \cdot d\boldsymbol{\rho}) \\ &= d[-m\mathbf{a}_O \cdot \boldsymbol{\rho} + \frac{m}{2}\Omega^2 \rho^2 - \frac{m}{2}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\rho})^2]; \end{aligned}$$

la función potencial de la que deriva es un campo escalar constante,  $-V(\boldsymbol{\rho})$ , por lo que la fuerza es conservativa:

$$\mathbf{F}_{\text{arr}} \cdot d\boldsymbol{\rho} = -dV,$$

siendo

$$V(\boldsymbol{\rho}) \stackrel{\text{def}}{=} m\mathbf{a}_O \cdot \boldsymbol{\rho} - \frac{m}{2}\Omega^2 \rho^2 + \frac{m}{2}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\rho})^2.$$

Por el contrario, la fuerza de Coriolis no tiene una interpretación clara, al depender, no sólo de la posición  $\boldsymbol{\rho}$ , sino también de la velocidad relativa  $\mathbf{v}_{\text{rel}}$ .

**EJEMPLO 1.9:** El sistema natural para la observación a escala humana es uno ligado a la superficie de la tierra. Sin embargo, debido tanto al movimiento orbital de la tierra como a su rotación este sistema no es inercial. Se desea obtener la desviación de la plomada en relación con la vertical geométrica dirigida hacia el centro de la esfera terrestre.

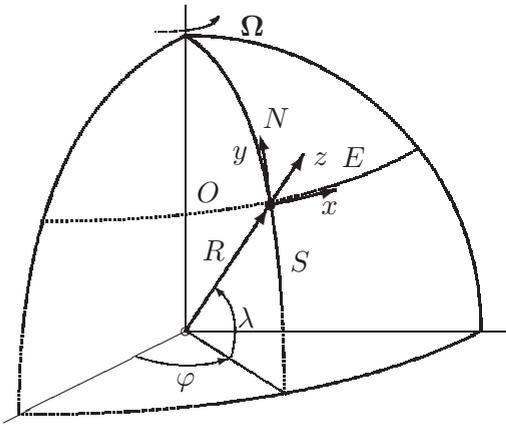


Figura 1.25: *Triedro ligado a la superficie de la tierra, en un punto O. La tierra se supone esférica, con la dirección x hacia el este, la y hacia el norte, y z según la vertical ascendente.*

*Solución.* Un sistema muy aproximadamente inercial sería uno con origen en el centro del Sol y direcciones de los ejes fijas según las galaxias más lejanas. Este sistema es adecuado para observaciones astronómicas. Es posible considerar también un sistema con origen en el centro de la Tierra y orientación fija en relación con las galaxias lejanas. Cometeríamos, respecto al caso anterior, el error debido a la aceleración del centro de la Tierra en su movimiento casi

circular alrededor del Sol, es decir, la aceleración centrípeta. El error cometido por este término se ve muy aproximadamente compensado por la atracción gravitatoria del Sol:

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{sol} = m\mathbf{a}_O + m\mathbf{a}_{rel},$$

donde  $\mathbf{a}_O$  es la aceleración del centro de la tierra.  $\mathbf{F}_{sol} \approx m\mathbf{a}_O$ , por lo que eliminando estos dos términos queda:

$$\mathbf{F} \approx m\mathbf{a}_{rel}.$$

Es decir, si prescindimos de considerar la atracción gravitatoria del sol, este sistema resulta muy aproximadamente inercial.

Sin embargo, para describir movimientos «normales» a escala humana y en la superficie terrestre, los sistemas anteriores poseen una complejidad a todas luces excesiva. Es conveniente a menudo considerar un sistema de ejes ligados a la superficie de la Tierra, que giran con la misma, además de acompañarla en su movimiento de traslación alrededor del Sol.

Sea una partícula estacionaria en relación con la superficie de la tierra,  $\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{0}$ . La única fuerza no inercial es la de arrastre, pues la fuerza de Coriolis se anula. El vector  $\mathbf{\Omega}$  de rotación de la Tierra, en función de los ejes que hemos definido es (figura 1.26):

$$\mathbf{\Omega} = \Omega(\cos \lambda \mathbf{j} + \sin \lambda \mathbf{k})$$

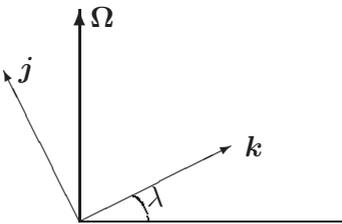


Figura 1.26: *Proyecciones de la velocidad de rotación  $\mathbf{\Omega}$  sobre las direcciones  $Oz$  y  $Oy$  situadas en el plano del meridiano.*

El vector posición (medido desde el centro de la Tierra) es

$$\mathbf{r} = R\mathbf{k} + \boldsymbol{\rho} \approx R\mathbf{k},$$

restringiéndonos a puntos próximos a la superficie de la Tierra. Ésta tiene una velocidad de rotación constante en módulo y dirección (en una primera aproximación), siendo  $\Omega = 2\pi/86\,164 \text{ rad/s}$ <sup>21</sup>. Teniendo en cuenta que la aceleración

<sup>21</sup>La tierra efectúa una vuelta completa ( $2\pi$ ) en un día sidéreo (86 164 s). En un día solar (86 400 s) la rotación efectuada es algo mayor que  $2\pi$ , siendo ésto necesario para volver a enfrentarse al sol al desplazarse la tierra en su órbita.

del origen del triedro móvil (punto situado en la superficie de la Tierra) es  $\mathbf{a}_O = \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge R\mathbf{k})$ :

$$\begin{aligned} -m\mathbf{a}_{arr} &= -m[\mathbf{a}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho})] \\ &= -m[\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge (R\mathbf{k} + \boldsymbol{\rho}))] \approx -m[\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge R\mathbf{k})] \\ &= -m[(\boldsymbol{\Omega} \cdot R\mathbf{k})\boldsymbol{\Omega} - \Omega^2 R\mathbf{k}] \\ &= -m\Omega^2 \underbrace{R \cos \lambda}_{\text{dist. al eje}} \underbrace{(\text{sen } \lambda \mathbf{j} - \text{cos } \lambda \mathbf{k})}_{\text{versor perp. eje}} \end{aligned}$$

Por tanto la plomada seguirá la dirección de una gravedad aparente  $\mathbf{g}'$  (figura 1.27) definida como:

$$\mathbf{g}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g} - \Omega^2 R \cos \lambda (\text{sen } \lambda \mathbf{j} - \text{cos } \lambda \mathbf{k}).$$

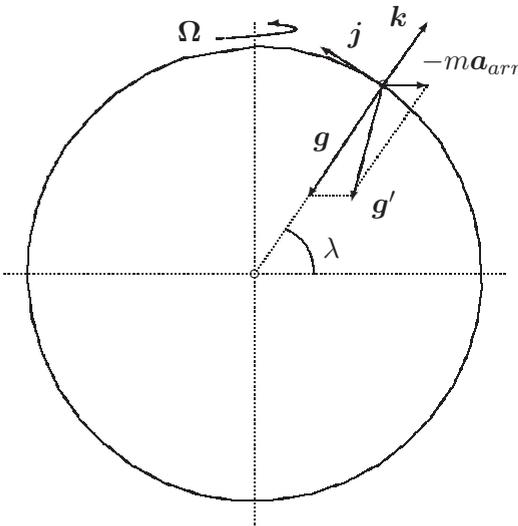


Figura 1.27: Desviación de la plomada por efecto de la fuerza de arrastre ( $-m\mathbf{a}_{arr}$ ), obteniéndose la «gravedad aparente»  $\mathbf{g}'$ .

El efecto de modificación aparente de  $\mathbf{g}$ , en módulo, es máximo en el Ecuador. Allí, la disminución de  $g$  vale:

$$\Omega^2 R = \left( \frac{2\pi}{86\,164} \right)^2 \left( \frac{4 \times 10^7}{2\pi} \right) = 0,03367 \text{ m/s}^2$$

Lo que representa alrededor de un 0,3% del valor medio de  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Fuera del Ecuador, se ve también alterada la dirección de  $\mathbf{g}$ , no estando dirigida exactamente hacia el centro de la Tierra, aunque la modificación en módulo es progresivamente menor.  $\square$

EJEMPLO 1.10: Se desea obtener las ecuaciones de la dinámica debido a los efectos no inerciales de un sistema de referencia ligado a la superficie de la tierra.

*Solución.* La desviación principal se produce por efecto de la aceleración de coriolis. Si el cuerpo está en movimiento respecto de la superficie terrestre ( $\mathbf{v}_{\text{rel}} \neq \mathbf{0}$ ) es necesario además considerar la fuerza de Coriolis. Hemos visto antes el efecto de modificación de la gravedad aparente ( $\mathbf{g}'$ ) por virtud de la fuerza de arrastre. La ecuación de la dinámica se puede expresar como:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{F}}{m} + \mathbf{g}' - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{\text{rel}}$$

En el desarrollo que se realiza a continuación, admitiremos que el desplazamiento sobre la tierra es pequeño, por lo que se mantiene aproximadamente constante la latitud ( $\lambda$ ) así como la dirección de  $\mathbf{g}'$ , que como hemos visto antes sufre una desviación muy pequeña respecto a  $\mathbf{g}$ , dependiendo de la latitud. Tomamos los ejes de forma que  $\mathbf{k}$  coincida con esta vertical aparente, definida por  $\mathbf{g}'$ :

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{\text{rel}} &= 2\Omega \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \cos \lambda & \text{sen } \lambda \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \\ &= 2\Omega[(v_z \cos \lambda - v_y \text{sen } \lambda)\mathbf{i} + v_x \text{sen } \lambda \mathbf{j} - v_x \cos \lambda \mathbf{k}]; \end{aligned} \quad (1.105)$$

si llamamos a las fuerzas aplicadas por unidad de masa  $\mathbf{F}/m = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ , resultan tres ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= X - 2\Omega(\dot{z} \cos \lambda - \dot{y} \text{sen } \lambda) \\ \ddot{y} &= Y - 2\Omega\dot{x} \text{sen } \lambda \\ \ddot{z} &= Z - g + 2\Omega\dot{x} \cos \lambda \end{aligned} \quad (1.106)$$

Estas ecuaciones son de aplicación general para el caso de proyectiles o cuerpos móviles de corto alcance, en que son válidas las hipótesis realizadas arriba. En caso contrario sería necesario considerar la variación de  $\lambda$  en el movimiento.  $\square$

EJEMPLO 1.11: Deducir las fuerzas inerciales que se producen por el movimiento de masas de aire y la circulación atmosférica en zonas de bajas presiones.

*Solución.* En una zona de baja presión (lo que los meteorólogos llaman borrasca) las partículas de aire tienden a desplazarse hacia el punto de presión

mínima, por efecto del gradiente de presión. La velocidad generada por este movimiento da lugar a una fuerza de inercia de Coriolis, según la ecuación (1.105):

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\text{cor}} &= -2m\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{\text{rel}} \\ &= 2m\Omega v[\text{sen } \lambda \text{ sen } \alpha \mathbf{i} - \text{sen } \lambda \text{ cos } \alpha \mathbf{j} + \text{cos } \lambda \text{ cos } \alpha \mathbf{k}]\end{aligned}\quad (1.107)$$

Las componentes horizontales de esta fuerza originan una desviación consistente hacia la derecha en el sentido del movimiento, siempre que sea  $\text{sen } \lambda > 0$ , es decir, en el hemisferio Norte (figura 1.28). Eventualmente, se produce una

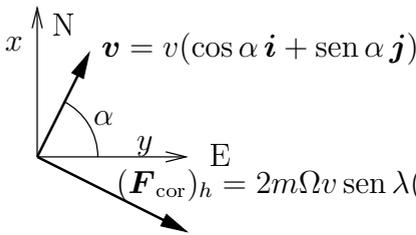


Figura 1.28: Fuerza de Coriolis horizontal debida a la velocidad en la superficie de la tierra (hemisferio Norte).

circulación estacionaria alrededor del centro de bajas presiones, a modo de remolino, cuando el gradiente de presiones es contrarrestado por la fuerza de Coriolis y por la propia fuerza centrífuga del movimiento circular. Este efecto produce una circulación en sentido antihorario (figura 1.29) en el hemisferio Norte. En el Sur es  $\text{sen } \lambda < 0$ , por lo que la circulación de las borrascas será en sentido horario.  $\square$

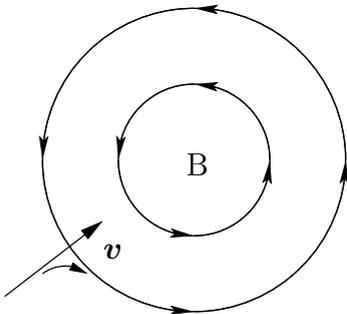


Figura 1.29: Líneas isobaras y circulación del aire en una borrasca por efecto de la aceleración de Coriolis (hemisferio Norte).

### 1.6.2. Dinámica de sistemas de varias partículas

Para un sistema formado por un conjunto de partículas, el estudio en una referencia no inercial deberá hacerse aplicando las fuerzas ficticias (1.104) descritas en el apartado anterior a cada una de sus partículas. Al ser las expresiones de estas fuerzas lineales en  $\boldsymbol{\rho}$  y  $\mathbf{v}_{\text{rel}}$ , parece lógico esperar que su resultante

tenga también una expresión sencilla, en función del movimiento del centro de masas  $G$ .

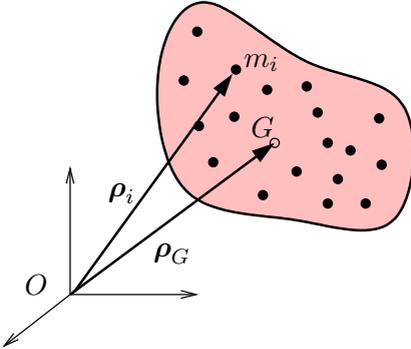


Figura 1.30: Sistema de varias partículas en una referencia no inercial; la posición de cada partícula es  $\rho_i$ .

Supongamos un sistema de  $N$  partículas  $\{m_i\}$ , siendo:

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i$$

$$M \rho_G \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i \rho_i$$

La resultante de las fuerzas de arrastre es:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{arr}} &\stackrel{\text{def}}{=} - \sum_i m_i (\mathbf{a}_{\text{arr}})_i = - [M \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \sum_i m_i \rho_i + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \sum_i m_i \rho_i)] \\ &= - [M \mathbf{a}_O + M \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \rho_G + M \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \rho_G)], \end{aligned}$$

y la resultante de las fuerzas de Coriolis:

$$\mathbf{F}_{\text{cor}} \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_i m_i [2\boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{v}_{\text{rel}})_i] = - [M 2\boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{v}_G)_{\text{rel}}]$$

Expresiones que resultan de utilidad para aplicar la ecuación de la cantidad de movimiento y determinar la posición del centro de masa. Sin embargo, las expresiones de la ecuación del momento cinético no son lineales en  $\rho$  y, por tanto, no resultan tan útiles. Volveremos esto más adelante para el caso del sólido rígido (capítulo 8).



## Dinámica analítica

### Índice

---

<b>2.1. Coordenadas generalizadas</b> . . . . .	<b>82</b>
<b>2.2. Ecuaciones de Lagrange</b> . . . . .	<b>87</b>
2.2.1. El principio de D'Alembert en coordenadas generalizadas . . . . .	87
2.2.2. Forma básica de las ecuaciones de Lagrange . . . . .	89
2.2.3. Caso en que las fuerzas provienen de un potencial. Función Lagrangiana . . . . .	91
2.2.4. Desarrollo explícito de las ecuaciones del movimiento . . . . .	97
2.2.5. Integrales primeras . . . . .	99
2.2.6. Sistemas naturales . . . . .	104
2.2.7. Sistemas con ligaduras . . . . .	107

---

La dinámica analítica comprende una serie de métodos cuya característica principal es el tratamiento puramente abstracto, analítico, de los sistemas mecánicos. De esta forma, se separan al máximo las consideraciones físicas y geométricas necesarias para definir el movimiento, de las puramente matemáticas para plantear y solucionar las ecuaciones. Las primeras son necesarias para formular las coordenadas, enlaces y magnitudes cinéticas de un sistema dado; una vez realizada definición de un sistema mediante la adecuada selección de las magnitudes anteriores, los métodos de la mecánica analítica permiten obtener las ecuaciones de la dinámica (o las condiciones de la estática en su caso) de forma casi automática.

El iniciador de estas técnicas fue Joseph Louis Lagrange, a partir de la publicación de su obra *Mécanique Analytique*<sup>1</sup> en 1788. Lagrange introdujo numerosos conceptos empleados hoy día en la mecánica y en las matemáticas: formuló las ecuaciones que llevan su nombre para la dinámica; colocó sobre bases sólidas el cálculo de variaciones; fue el inventor de las palabras derivada y potencial; etc.

Otra figura clave en la mecánica analítica fue William Rowan Hamilton<sup>2</sup>, ya en el siglo XIX (1805-1865). En su obra buscó una gran generalidad, desarrollando una teoría por la que el movimiento se puede reducir a la «búsqueda y diferenciación de una sola función» (la integral de la acción  $S$ ). El punto de vista de Hamilton resultó muy fértil, resultando básico para otros campos como la mecánica cuántica, desarrollada posteriormente en el siglo XX.

## 2.1. Coordenadas generalizadas

Un planteamiento básico de la mecánica analítica es la descripción de los sistemas mediante «coordenadas generalizadas».

DEFINICIÓN: *Se denominan coordenadas generalizadas a un conjunto cualquiera de parámetros  $\{q_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ , que sirven para determinar de manera unívoca la configuración del sistema.*

Estos parámetros en principio pueden ser cualesquiera, sin necesitar ser homogéneos en cuanto a dimensiones. Por ejemplo, se pueden mezclar longitudes, ángulos, etc. Una idea clave, subyacente en la elección de coordenadas generalizadas, es que éstas pueden englobar en su propia elección los enlaces del sistema (todos o al menos una parte de ellos). De esta forma se consigue una doble ventaja: por una parte, el número de parámetros es menor que el correspondiente directamente a las coordenadas de todas las partículas. Por otra, el número de ecuaciones de enlace se ve igualmente reducido.

Un conjunto de coordenadas  $\{q_i\}$  se denomina «libre» cuando se pueden variar de forma independiente entre sí; es decir, si las variaciones de las mismas,  $\{\delta q_i\}$ , se pueden escoger de forma arbitraria. Caso de que no sea así, será porque existe alguna ligadura que relacione dichas coordenadas, bien de tipo holónomo o no holónomo.

Cuando las coordenadas generalizadas no sean libres, se deberá a que subsisten condiciones de enlace formuladas de manera explícita. Estas se tradu-

<sup>1</sup>En ella, Lagrange se vanagloriaba de que no había ninguna figura, como botón de muestra de que los métodos propuestos estaban libres de casuística geométrica o topológica.

<sup>2</sup>Los métodos de la dinámica hamiltoniana no se tratan en este curso breve, pudiéndose consultar de forma resumida en *Curso de Mecánica*, J.M. Goicolea (2010), capítulo 12.

circunvalarán en relaciones entre las  $q_i$  (y también sus derivadas  $\dot{q}_i$  para enlaces no holónomos). Debido a estas ligaduras el número de grados de libertad es en realidad menor que  $n$ . Por el contrario, si las coordenadas son libres, su número es precisamente el número de grados de libertad del sistema.

Por ejemplo, en el sistema plano rígido de la figura 2.1, al tener una articulación, basta con una única coordenada angular ( $n = 1$ ;  $q_1 \equiv \theta$ ). En esta elección ya quedan englobados implícitamente los enlaces, tanto los internos (ligaduras de sólido rígido) como los externos (articulación). El sistema tiene un grado de libertad.

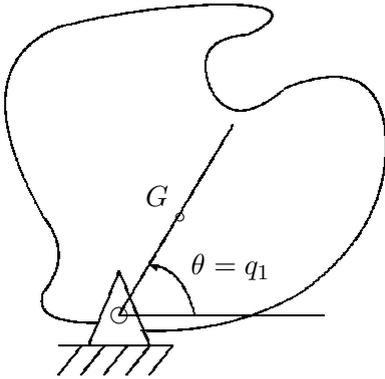


Figura 2.1: El movimiento del sólido articulado de la figura queda descrito por una única coordenada generalizada, el ángulo  $\theta$ . De esta forma se engloban todos los enlaces, tanto internos (ligaduras de sólido rígido) como externos (rótula cilíndrica en  $O$ ).

Supongamos ahora el caso general de un sistema con un número finito de partículas ( $N$ ), sujeto a  $m$  ligaduras holónomas y  $k$  anholónomas. Será posible su descripción mediante un conjunto más reducido de  $n = 3N - m$  parámetros o coordenadas generalizadas. Esquemáticamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{m_i, \mathbf{r}_i, i = 1, \dots, N\} \\ + \\ m \text{ enlaces holónomos} \\ + \\ k \text{ enlaces anholónomos} \end{array} \right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{m_i, i = 1, \dots, N\}, \{q_j, j = 1, \dots, n\}. \\ + \\ k \text{ enlaces anholónomos} \end{array} \right.$$

Esta reducción en el número de coordenadas se efectúa gracias a la eliminación de los  $m$  enlaces holónomos, que quedarán implícitos en la elección de las coordenadas generalizadas. Por el contrario, los  $k$  enlaces anholónomos no es posible eliminarlos, debiendo quedar planteados de forma expresa.

Un caso extremo de reducción en el número de coordenadas es el del sólido rígido. Considerado como un medio continuo, es infinitamente subdivisible, teniendo por tanto un número infinito de partículas y por tanto de coordenadas. Sin embargo, recordemos (apartado 1.2) que los enlaces internos del sólido (distancia constante entre dos partículas cualesquiera) permiten reducir el número de coordenadas generalizadas del sólido a 6.

En general, existirán unas relaciones entre los vectores de posición de cada partícula y las coordenadas generalizadas del tipo:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_j, t) \quad (i = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, n) \quad (2.1)$$

A los vectores de posición de cada partícula  $\{\mathbf{r}_i\}$  los denominaremos, por extensión, «coordenadas vectoriales». Está claro que éstas son equivalentes a definir las  $3N$  coordenadas cartesianas correspondientes. Por otra parte, éstas sólo serán libres para un sistema sin ligadura ninguna; en cualquier otro caso, no formarán un conjunto libre.

Podrá existir dependencia del tiempo en la definición de las coordenadas generalizadas (2.1) cuando se hayan tomado sistemas de coordenadas móviles, o bien cuando haya enlaces móviles.

A partir de las relaciones (2.1), las velocidades se obtienen derivando:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}, \quad (2.2)$$

llamándose por extensión «velocidades generalizadas» a los términos  $\dot{q}_j = dq_j/dt$ .

**EJEMPLO 2.1:** Se considera un sistema formado por dos masas puntuales  $(m_1, m_2)$  unidas entre sí por un hilo sin masa de longitud  $\ell$ , estando  $m_1$  a su vez unida a un punto fijo  $O$  por un hilo de igual longitud (*péndulo doble*). El conjunto se mueve en un plano vertical. Obtener los grados de libertad y las las coordenadas libres del sistema así como la expresión de las coordenadas cartesianas en función de ellas.

*Solución.* El sistema tiene dos partículas en un plano, cuya configuración en principio estará fijada por sus coordenadas  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ . Existen dos enlaces holónomos que definen la distancia fija  $\ell$  entre  $m_1$  y  $O$  y entre  $m_2$  y  $m_1$ :

$$\begin{aligned} \ell^2 &= x_1^2 + y_1^2; \\ \ell^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \end{aligned}$$

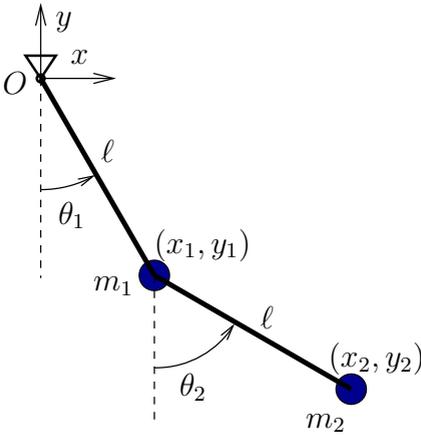


Figura 2.2: Definición de coordenadas y grados de libertad en un péndulo doble

Por tanto el sistema tiene dos grados de libertad. Al tratarse de un sistema con enlaces holónomos es posible encontrar un conjunto de 2 coordenadas generalizadas libres. En efecto, podemos considerar para ello los ángulos  $(\theta_1, \theta_2)$ . En función de ellos las coordenadas cartesianas se expresan como:

$$\begin{aligned} x_1 &= l \operatorname{sen} \theta_1, & y_1 &= -l \operatorname{cos} \theta_1; \\ x_2 &= l \operatorname{sen} \theta_1 + l \operatorname{sen} \theta_2, & y_2 &= -l \operatorname{cos} \theta_1 - l \operatorname{cos} \theta_2. \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 2.2: Se considera ahora dos masas  $m_0$  y  $m_1$  unidas por un hilo sin masa de longitud constante  $l$ . La masa  $m_0$  se mueve según una recta horizontal con velocidad impuesta  $v$ , mientras que  $m_1$  permanece en el mismo plano vertical. Obtener los grados de libertad y las las coordenadas libres del sistema así como la expresión de las coordenadas cartesianas en función de ellas.

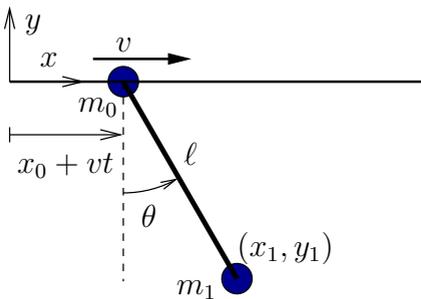


Figura 2.3: Definición de coordenadas y grados de libertad en un péndulo cuya base tiene un movimiento prescrito, con velocidad constante  $v$ . Se considera que en el instante inicial la posición de  $m_0$  es  $x_0$ .

*Solución.* El sistema consta en principio de dos masas, aunque la primera tiene su movimiento totalmente prescrito, por lo cual no es objeto de estudio

mediante las ecuaciones de la dinámica. La otra masa tiene dos coordenadas cartesianas  $(x_1, y_1)$  sujetas a un enlace holónomo,  $\ell^2 = x_1^2 + x_2^2$ , por lo cual el sistema posee un solo grado de libertad. Podemos tomar como coordenada libre el ángulo  $\theta$ , expresándose:

$$x_1 = x_0 + vt + \ell \operatorname{sen} \theta; \quad y_1 = -\ell \cos \theta.$$

Se observa en la ecuación anterior que la expresión de  $x_1$  depende explícitamente del tiempo. Esto es debido al enlace móvil (movimiento impuesto) de  $m_0$ . Asimismo, podemos considerar que el sistema de coordenadas (generalizadas) para definir la posición de  $m_1$  es móvil, ya que el origen de las coordenadas polares está en  $m_0$ .  $\square$

**EJEMPLO 2.3:** Establecer los grados de libertad, coordenadas generalizadas y enlaces de un sistema formado por dos partículas  $A$  y  $B$ , unidas por una varilla rígida sin masa de longitud  $l$ . El conjunto se mueve sobre un plano horizontal liso, existiendo en  $A$  un pequeño cuchillo que obliga a que ese punto se mueva según la dirección de la varilla (figura 2.4).

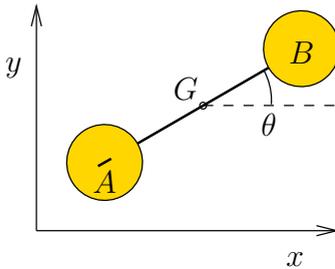


Figura 2.4: Sistema de dos partículas  $A$  y  $B$ , unidas rígidamente, con cuchillo en el apoyo de  $A$  que materializa un enlace anholónomo.

*Solución.* Al estar en un plano, se precisan en principio 4 coordenadas cartesianas para definir la configuración,  $\{x_A, y_A, x_B, y_B\}$ . Estas se hallan sujetas a 2 condiciones de enlace. Primeramente, el enlace holónomo correspondiente a la varilla rígida entre  $A$  y  $B$

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2.$$

Por otra parte, la condición de apoyo mediante el cuchillo de cargas en  $A$  resulta en imponer que la velocidad de este punto lleve la dirección de la varilla, lo que constituye un enlace anholónomo:

$$-\dot{x}_A(y_B - y_A) + \dot{y}_A(x_B - x_A) = 0.$$

El sistema posee por tanto 2 grados de libertad. Podrían escogerse coordenadas generalizadas que eliminen el enlace holónomo (aunque no el anholónomo).

Tomaremos para ello las coordenadas del centro de masas  $(x, y)$  y el ángulo  $\theta$  formado con el eje  $x$ , un total de tres coordenadas. En función de éstas, la velocidad de  $A$  se expresa como  $\mathbf{v}_A = (\dot{x} + \frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta)\mathbf{i} + (\dot{y} - \frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta)\mathbf{j}$ , y la normal a la varilla es  $\mathbf{n} = -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}$ . La condición del enlace es  $\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{n} = 0$ , resultando

$$-\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta - \frac{l}{2}\dot{\theta} = 0. \quad (2.3)$$

De esta forma, el sistema queda definido por tres coordenadas generalizadas sujetas a una ecuación de enlace anholónomo. A pesar de que tiene dos grados de libertad, debido a la naturaleza de este enlace no es posible definir explícitamente un conjunto de dos coordenadas libres.  $\square$

## 2.2. Ecuaciones de Lagrange

### 2.2.1. El principio de D'Alembert en coordenadas generalizadas

Sea un sistema sometido a enlaces lisos. El principio de D'Alembert (1.94) expresa:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{f}_i - m_i\ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0, \quad \forall\{\delta\mathbf{r}_i\} \text{ compatibles.} \quad (2.4)$$

En esta expresión  $\mathbf{f}_i$  incluyen sólo las fuerzas activas, excluyendo las reacciones de los enlaces lisos.

Considerando una variación « $\delta$ » (es decir, infinitesimal y a tiempo constante) de las coordenadas en (2.1), se obtienen los desplazamientos virtuales:

$$\delta\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.5)$$

Nótese que en esta expresión no existe término  $\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial t}\delta t$ , ya que  $\delta t = 0$  para un desplazamiento virtual. La variación  $\delta$  se realiza en un instante fijo de tiempo, no a lo largo del movimiento. En esto difiere de los desplazamientos infinitesimales reales a lo largo del movimiento, que a partir de (2.2) serían

$$d\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial t} dt.$$

Sustituyendo (2.5) en (2.4) y reorganizando el orden de las sumas  $i, j$ :

$$\sum_{j=1}^n \left[ \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0, \quad \forall \{\delta q_j\} \text{ compatibles.} \quad (2.6)$$

Analicemos con mayor detalle cada uno de los dos términos dentro del corchete en esta expresión. El primero define unos coeficientes escalares que llamaremos «Fuerzas generalizadas»:

$$Q_j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

Es inmediato comprobar que  $Q_j$  son precisamente los coeficientes de  $\delta q_j$  en la expresión del trabajo virtual  $\delta W$ :

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \sum_j^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \quad (2.8)$$

El segundo término de (2.6) se puede expresar como:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \quad (2.9)$$

Para lo que sigue, debemos precisar que consideraremos la dependencia funcional de todas las magnitudes cinéticas sobre el conjunto de variables independientes  $(q_j, \dot{q}_j, t)$ . Esta aclaración precisa el significado de las derivadas parciales. Así,  $\partial/\partial q_j(\cdot)$  indicará la derivada parcial respecto de la coordenada  $q_j$ , manteniéndose constantes el resto de coordenadas  $q_k$  ( $k \neq j$ ) así como las velocidades  $\dot{q}_j$  y el tiempo  $t$ .

Para continuar el desarrollo de la expresión (2.9), establezcamos antes dos igualdades que será necesario emplear:

$$1. \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$

*Demostración.* En efecto, desarrollando el primer término,

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[ \overbrace{\sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k}^{\dot{\mathbf{r}}_i} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta_{kj} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad \square$$

$$2. \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}.$$

*Demostración.* En efecto, desarrollando ambos términos por separado:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t}; \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_j}, \end{aligned}$$

siendo ambas expresiones iguales, por la igualdad de las derivadas cruzadas.  $\square$

Empleando estos dos resultados y la definición de energía cinética,  $T \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$ , la ecuación (2.9) resulta:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

Finalmente, empleando (2.7) y (2.10), el principio de D'Alembert (2.4) queda expresado en coordenadas generalizadas como:

$$\boxed{\sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0, \quad \forall \{\delta q_j\} \text{ compatibles}} \tag{2.11}$$

Esta expresión, al tratarse del principio de D'Alembert, puede ser considerada por tanto como *ecuación fundamental de la dinámica*.

Conviene notar que en (2.11) no se emplean fuerzas físicas en ningún término. Tan sólo entran los coeficientes  $Q_j$ , *fuerzas generalizadas*, calculadas directamente a partir de la expresión (2.7) o como coeficientes del trabajo virtual  $\delta W$  (2.8) según se ha dicho. Al igual que en el principio de D'Alembert, en la definición de  $Q_j$  tampoco intervienen las fuerzas de reacción de los enlaces lisos, que no realizan trabajo virtual.

### 2.2.2. Forma básica de las ecuaciones de Lagrange

La expresión (2.11) es completamente general por lo que se puede aplicar a cualquier sistema, tanto con enlaces holónomos como no holónomos. En el

caso en que *todos los enlaces sean holónomos*, será posible siempre establecer un conjunto de coordenadas libres  $\{q_j\}$ , en el que las variaciones  $\{\delta q_j\}$  se puedan escoger de manera arbitraria, manteniendo la compatibilidad con los enlaces. En este caso, (2.11) equivale a enunciar que cada uno de los coeficientes de las  $\{\delta q_j\}$  ha de anularse:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, \dots, n).} \quad (2.12)$$

Estas expresiones son las llamadas *ecuaciones de Lagrange*, en su forma básica.

OBSERVACIONES:

- En (2.12) existe una ecuación por cada grado de libertad, por lo que la elección de coordenadas generalizadas libres conduce directamente al mínimo número de ecuaciones dinámicas.
- Se trata de ecuaciones diferenciales de segundo orden (al existir derivadas temporales de los términos  $\partial T / \partial \dot{q}_j$ , que dependen, a su vez, de  $\dot{q}_j$ ).
- De las ecuaciones (2.12) han quedado eliminadas todas las reacciones de enlace que no realizan trabajo virtual, correspondientes a los enlaces lisos. Esto contrasta con las ecuaciones procedentes de los teoremas Newtonianos en las que, en principio, deben considerarse también estas reacciones.
- Una vez evaluadas las expresiones de  $T$  y de  $Q_j$ , las ecuaciones de Lagrange se pueden obtener de forma automática sin más que aplicar las reglas analíticas de derivación correspondientes a (2.12). Es posible incluso automatizar su obtención mediante una programación adecuada de sistemas de matemática simbólica, como MAPLE, MATHEMATICA, MACSYMA, etc.
- El significado físico del término  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right)$  en (2.12) es el de las fuerzas de inercia. Para comprobarlo, tomemos como coordenadas las propias coordenadas vectoriales  $\mathbf{r}_j$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j} \right) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j} \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) \right] = \frac{d}{dt} (m_j \dot{\mathbf{r}}_j) = m_j \ddot{\mathbf{r}}_j.$$

- Los términos  $\partial T / \partial q_j$  pueden interpretarse como fuerzas ficticias procedentes de la elección de coordenadas generalizadas  $\{q_j\}$ . En caso de que

éstas sean simplemente las componentes cartesianas de los vectores  $\{\mathbf{r}_i\}$ , desaparecerían. Estas fuerzas se añaden a las fuerzas generalizadas  $Q_j$  en la dirección de  $q_j$ .

- En el caso en que las coordenadas  $\{q_j\}$  no sean libres, sus variaciones  $\{\delta q_j\}$  no pueden ser arbitrarias, y no es posible llegar a ecuaciones como las (2.12). Es necesario partir de la ley fundamental (2.11) y emplear técnicas especiales de resolución, según se discute en el apartado 2.2.7.

### 2.2.3. Caso en que las fuerzas provienen de un potencial. Función Lagrangiana

Si las fuerzas aplicadas proceden de un potencial  $V$ ,

$$\mathbf{f}_i = -\mathbf{grad}_i V = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i},$$

las fuerzas generalizadas tendrán entonces la expresión:

$$Q_j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}. \quad (2.13)$$

En lo que sigue, admitimos la hipótesis de que el potencial  $V$  depende de las coordenadas y posiblemente del tiempo<sup>3</sup>, pero no de las velocidades<sup>4</sup>:

$$V = V(q_j, t) = V(\mathbf{r}_i, t).$$

Sustituyendo (2.13) y agrupando términos, las ecuaciones de Lagrange (2.12) se pueden escribir como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

Se define la *función Lagrangiana* como:

$$L(q_j, \dot{q}_j, t) \stackrel{\text{def}}{=} T(q_j, \dot{q}_j, t) - V(q_j, t);$$

<sup>3</sup>Ya se ha comentado (apartado 1.1.3) que si el potencial no es constante (es decir,  $\partial V(\mathbf{r}_i, t)/\partial t \neq 0$ ), las fuerzas no son conservativas a pesar de provenir de un potencial.

<sup>4</sup>En caso de existir fuerzas de tipo electromagnético, esta suposición no es válida, ya que las fuerzas dependen de la velocidad con la que se mueven las partículas con carga. Es posible definir un potencial generalizado dependiente de la velocidad para este caso, y establecer las ecuaciones de Lagrange correspondientes, aunque que no trataremos aquí este aspecto para no complicar el desarrollo.

al no depender  $V$  de las velocidades, se verifica  $\partial T/\partial \dot{q}_j = \partial L/\partial \dot{q}_j$ . De esta forma, las ecuaciones quedan finalmente:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, \dots, n).} \quad (2.14)$$

Estas expresiones constituyen las *ecuaciones de Lagrange* en su forma estándar, aplicables para sistemas en que las fuerzas provienen de un potencial.

Es necesario comprender la importancia de la función Lagrangiana  $L$  en la caracterización dinámica de un sistema: basta con conocer su expresión,  $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ , para poder determinar a partir de ella las ecuaciones dinámicas (2.14); toda la información dinámica del sistema está por tanto contenida en la estructura de  $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ .

EJEMPLO 2.4: Sea el problema de Poggendorf (ver ejemplo 1.8). Resolver por los métodos de la dinámica analítica, obteniendo las ecuaciones de Lagrange.

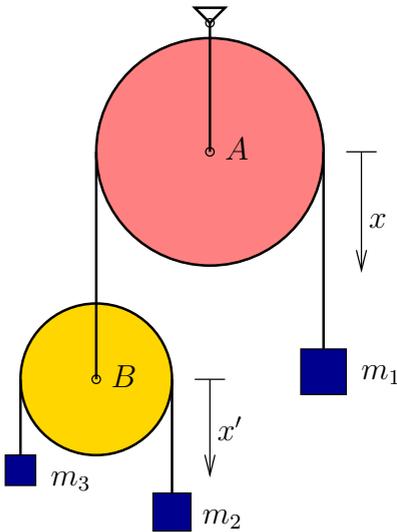


Figura 2.5: Ejemplo 2.4; Problema de Poggendorf.

*Solución.* El sistema es conservativo, ya que las poleas son lisas y sólo actúa la gravedad. La función Lagrangiana es:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2 + m_1gx_1 + m_2gx_2 + m_3gx_3. \quad (2.15)$$

El sistema tiene en realidad dos grados de libertad sólo, ya que existe un enlace holónomo (1.97), que permite escribir:

$$x_3 = -2x_1 - x_2; \quad \dot{x}_3 = -2\dot{x}_1 - \dot{x}_2. \quad (2.16)$$

Eliminando  $\dot{x}_3$  de (2.15), se expresa la Lagrangiana en función de coordenadas libres:

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3(2\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 + m_1gx_1 + m_2gx_2 - m_3g(2x_1 + x_2). \quad (2.17)$$

Las ecuaciones de Lagrange se obtienen calculando las derivadas de  $L$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_1} \Rightarrow (m_1 + 4m_3)\ddot{x}_1 + 2m_3\ddot{x}_2 = m_1g - 2m_3g; \quad (2.18)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_2} \Rightarrow (m_2 + m_3)\ddot{x}_2 + 2m_3\ddot{x}_1 = m_2g - m_3g. \quad (2.19)$$

Estas ecuaciones coinciden con las que se obtuvieron antes (1.101) mediante la aplicación directa del principio de D'Alembert.  $\square$

EJEMPLO 2.5: Para el problema del semidisco calculado anteriormente mediante las ecuaciones de Newton-Euler (1.6), obtener la Lagrangiana y la ecuación de Lagrange en función del grado de libertad  $\theta$  (figura 2.6).

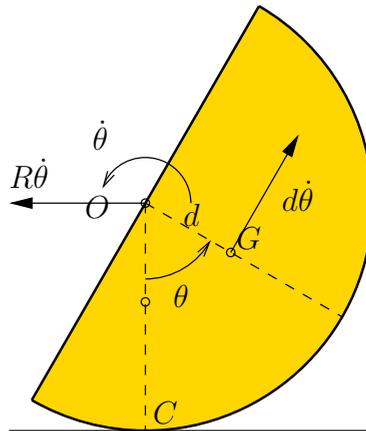


Figura 2.6: Ejemplo 2.5. Semidisco que rueda sin deslizar en una configuración genérica, definida por el ángulo  $\theta$ . La distancia del centro de masas  $G$  vale  $d = \frac{4R}{3\pi}$ .

*Solución.* El sistema es conservativo, ya que no se produce deslizamiento en la base y las únicas fuerzas que trabajan son las de la gravedad. Está definido por un único grado de libertad ( $\theta$ ), ya que la condición de rodadura restringe dos grados de libertad de los teóricos tres que tendría un sólido rígido en movimiento plano.

La función Lagrangiana es

$$L = T - V = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 - Mgy_G,$$

siendo

$$\begin{aligned} I_G &= \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right) MR^2; \\ y_G &= R - \frac{4R}{3\pi} \cos \theta; \\ v_G^2 &= R^2\dot{\theta}^2 + \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 \dot{\theta}^2 - 2R\frac{4R}{3\pi} \dot{\theta}^2 \cos \theta. \end{aligned}$$

(La expresión de  $v_G$  se obtiene considerando que es la suma del arrastre del centro del aro  $R\dot{\theta}$  y la rotación de  $G$  alrededor del mismo  $d\dot{\theta}$ .)

Desarrollando la expresión resulta<sup>5</sup>

$$L = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi} \cos \theta \right) MR^2 \dot{\theta}^2 - MRg \left( 1 - \frac{4}{3\pi} \right). \quad (2.20)$$

Realizando las derivadas se obtiene la ecuación de Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \theta} \Rightarrow \\ \left( \frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi} \cos \theta \right) MR^2 \ddot{\theta} + \frac{4}{3\pi} MR^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta &= -MRg \frac{4}{3\pi} \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.21)$$

De esta ecuación se puede despejar la aceleración,

$$\ddot{\theta} = - \frac{8 \left( \dot{\theta}^2 + g/R \right) \sin \theta}{9\pi - 16}. \quad (2.22)$$

Se trata de la misma ecuación obtenida antes por los procedimientos de Newton–Euler (1.75), aunque ahora de forma mucho más sencilla.  $\square$

<sup>5</sup>En esta expresión el primer sumando corresponde a  $T = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2$ . Al tener el punto de contacto  $C$  velocidad nula también podría expresarse como  $T = \frac{1}{2}I_C\dot{\theta}^2$ , donde a partir de  $I_C = I_G + Mr_{CG}^2 = \left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi} \cos \theta\right) MR^2$  se comprueba que resulta la misma expresión para  $T$ . Observamos por tanto que, a diferencia de la aplicación del teorema del momento cinético, donde no se podría tomar momentos en este punto  $C$  ya que tiene aceleración no nula, aquí sí sirve para expresar la energía cinética, que depende solo de las velocidades y es nula la velocidad  $v_C = \mathbf{0}$ .

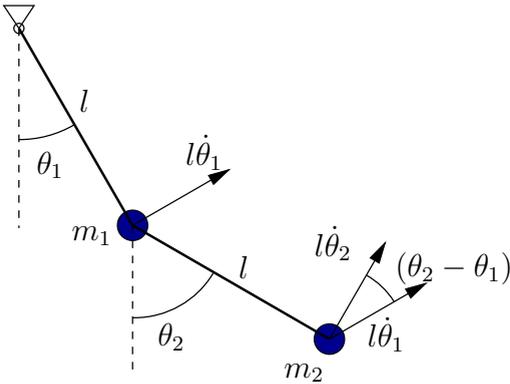


Figura 2.7: Ejemplo 2.6.

EJEMPLO 2.6: El péndulo doble de la figura está formado por dos varillas rígidas y sin masa, con sendas masas  $(m_1, m_2)$  en los extremos. Las varillas están unidas mediante articulaciones entre sí y a un punto fijo. El movimiento se desarrolla en un plano vertical, sometido al peso propio. Determinar las ecuaciones de la dinámica, empleando como coordenadas (libres) los ángulos  $(\theta_1, \theta_2)$  (ver figura 2.7).

*Solución.* El sistema es conservativo y descrito mediante coordenadas libres. La velocidad de  $m_1$  es  $l\dot{\theta}_1$  y la de  $m_2$  se halla como suma de los dos vectores (figura 2.7)  $l\dot{\theta}_1$  y  $l\dot{\theta}_2$  que forman un ángulo  $(\theta_2 - \theta_1)$ . Con todo, la Lagrangiana resulta:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1l^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l^2 \left[ \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right] + m_1gl \cos \theta_1 + m_2g(l \cos \theta_1 + l \cos \theta_2). \quad (2.23)$$

Derivando la Lagrangiana se obtienen las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \Rightarrow (m_1 + m_2)l^2\ddot{\theta}_1 + m_2l^2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - m_2l^2\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + (m_1 + m_2)gl \sin \theta_1 = 0 \quad (2.24)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \Rightarrow m_2l^2\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + m_2l^2\ddot{\theta}_2 + m_2l^2\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2gl \sin \theta_2 = 0. \quad \square \quad (2.25)$$

### Unicidad de la función Lagrangiana

La elección de una función Lagrangiana para representar un sistema no es única. Para comprender esto basta considerar un potencial distinto que difiera en una constante aditiva ( $V' = V + \text{cte.}$ ), como sabemos, estos dos potenciales son equivalentes por completo. Por tanto, dos Lagrangianas que difieran en una constante también serán equivalentes. Este resultado se puede generalizar, ya que es posible comprobar que dos Lagrangianas que difieran entre sí en una derivada total de alguna función que dependa exclusivamente de coordenadas y tiempo, son equivalentes<sup>6</sup>.

En efecto, sean  $L$  y  $L'$  tales que

$$L'(q_j, \dot{q}_j, t) \stackrel{\text{def}}{=} L(q_j, \dot{q}_j, t) + \frac{d}{dt}F(q_j, t); \quad (2.26)$$

siendo  $F(q_j, t)$  una función cualquiera de  $q_j$  y  $t$  pero no de las velocidades  $\dot{q}_j$ . Por la definición funcional de  $F$ , desarrollando la derivada temporal:

$$L' - L = \frac{dF}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t},$$

y las contribuciones de este término en las ecuaciones de Lagrange son:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) \right] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial F}{\partial q_j} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t} \\ \blacksquare \quad & \frac{\partial}{\partial q_j} \left[ \frac{dF}{dt} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} \end{aligned}$$

Como se ve, al restar ambos términos en (2.14) se anulan entre sí, y el resultado neto, de emplear  $L'$ , son las mismas ecuaciones dinámicas que para  $L$ .

### Caso de fuerzas no conservativas

En los casos en que existan algunas fuerzas que procedan de un potencial ( $Q_j^V \stackrel{\text{def}}{=} -\partial V / \partial q_j$ ) y otras que no ( $Q_j^N$ ):

$$Q_j = Q_j^V + Q_j^N = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^N,$$

<sup>6</sup>Las transformaciones que ocasionan una variación de  $L$  de este tipo se denominan «transformaciones de gauge», término proveniente del inglés, aunque la traducción directa en castellano «transformaciones de galga» no parece tampoco muy atractiva.

es posible definir una Lagrangiana parcial  $L = T - V$ , resultando entonces las ecuaciones:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^N, \quad j = 1, \dots, n} \quad (2.27)$$

donde sólo aparecen expresamente las fuerzas no conservativas  $Q_j^N$ .

### Transformaciones admisibles de coordenadas

Las coordenadas generalizadas empleadas son una elección, es fácil comprender que no son únicas. Por ejemplo, en lugar de una coordenada  $q_j$  podría igualmente haberse considerado un múltiplo de esta  $\beta q_j$  para cualquier  $\beta \neq 0$ . Si se emplean unas coordenadas distintas válidas  $\{\hat{q}_j\}$  estas darán lugar a un conjunto de ecuaciones de Lagrange también distintas pero equivalentes. La condición general para admitir otras coordenadas puede resumirse en que la transformación sea regular, es decir que el determinante de su jacobiano no se anule<sup>7</sup>:

$$\left| \frac{\partial \hat{q}_j}{\partial q_i} \right| \neq 0. \quad (2.28)$$

#### 2.2.4. Desarrollo explícito de las ecuaciones del movimiento

##### Expresiones de la energía cinética y momentos generalizados

La energía cinética es una función cuadrática de las velocidades. Esta propiedad se conserva al expresarla en coordenadas generalizadas. En efecto, desarrollando su expresión a partir de (2.2) se obtiene en el caso general

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = T_2 + T_1 + T_0, \quad (2.29)$$

---

<sup>7</sup> *Curso de Mecánica*, J.M. Goicolea (2010), apartado 7.2.3.

siendo  $T_2$  un término cuadrático en función de  $\dot{q}_j$ ,  $T_1$  lineal y  $T_0$  independiente de  $\dot{q}_j$ :

$$T_2 = \sum_{k,l=1}^n \frac{1}{2} a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l, \quad \text{siendo } a_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \quad (2.30)$$

$$T_1 = \sum_{k=1}^n a_k \dot{q}_k, \quad \text{siendo } a_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (2.31)$$

$$T_0 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 \quad (2.32)$$

En el caso en que no exista dependencia explícita del tiempo en la definición de las coordenadas generalizadas ( $\partial \mathbf{r}_i / \partial t = 0$ ), la expresión de la energía cinética será cuadrática homogénea en  $\dot{q}_j$ ,

$$T = T_2 = \sum_{k,l=1}^n \frac{1}{2} a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l, \quad (2.33)$$

esto sucederá si no se emplean sistemas de coordenadas móviles ni hay enlaces reónomos (es decir, dependientes del tiempo).

Por otra parte, los momentos generalizados se definen como

$$p_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, \dots, n); \quad (2.34)$$

admitiendo que el potencial no depende de las velocidades, se obtiene

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_k + a_j. \quad (2.35)$$

### Forma general de las ecuaciones

En función de los momentos generalizados, las ecuaciones de Lagrange (2.14) pueden reescribirse como

$$\dot{p}_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (2.36)$$

Desarrollando estas expresiones puede comprobarse<sup>8</sup> que la forma más general de las ecuaciones puede expresarse como

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{l,k=1}^n [kl, j] \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^n \gamma_{jk} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{jk}}{\partial t} \dot{q}_k + \frac{\partial a_j}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0, \quad (2.37)$$

donde se han empleado los coeficientes

$$[kl, j] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l} + \frac{\partial a_{jl}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{kl}}{\partial q_j} \right), \quad (2.38)$$

$$\gamma_{jk} = -\gamma_{kj} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial a_j}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \quad (j, k = 1, \dots, n). \quad (2.39)$$

En las ecuaciones (2.37) se distinguen términos proporcionales a las aceleraciones ( $\ddot{q}_k$ ), términos cuadráticos en las velocidades ( $\dot{q}_k \dot{q}_l$ ), términos lineales en las velocidades ( $\dot{q}_k$ ) y por último términos independientes.

### 2.2.5. Integrales primeras

#### Coordenadas cíclicas

Partiendo de las ecuaciones de Lagrange expresadas en la forma (2.36), si la función Lagrangiana  $L$  no depende explícitamente de una coordenada  $q_j$  —es decir,  $\partial L / \partial q_j = 0$ —, se verifica la conservación del momento generalizado correspondiente:

$$\boxed{\text{si } \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j = \text{cte.}} \quad (2.40)$$

Se dice entonces que  $q_j$  es una «coordenada cíclica» o ignorable. Las expresiones (2.40) constituyen integrales primeras del movimiento, ya que son ecuaciones en las que intervienen sólo derivadas primeras de las coordenadas.

Se puede interpretar el significado de las coordenadas cíclicas considerando que, si una coordenada  $q_j$  es cíclica, se puede sustituir ( $q_j$ ) por ( $q_j + C$ ), siendo  $C$  una constante, y las ecuaciones no varían. Esto se debe a que  $L$  no depende de  $q_j$ , y por otra parte  $\dot{q}_j$  es invariante ante ese cambio. Por el contrario, hacemos notar que el hecho de que una coordenada sea cíclica no quiere decir que su valor sea constante, ni tampoco la velocidad generalizada correspondiente.

Sin embargo, para una coordenada cíclica  $q_j$ , será posible eliminar de las ecuaciones la velocidad correspondiente  $\dot{q}_j$ , empleando la integral primera (2.40). Si el sistema tiene  $n$  grados de libertad, de los que  $k$  corresponden a

<sup>8</sup> *Curso de Mecánica*, J.M. Goicolea (2010), apartado 7.2.4

coordenadas cíclicas, se podrán eliminar éstas y quedar descrito el movimiento mediante dos conjuntos desacoplados de ecuaciones:  $k$  ecuaciones (2.40) para las coordenadas cíclicas, y  $(n - k)$  ecuaciones (2.14) para las demás coordenadas. El problema se ve considerablemente simplificado, procediéndose en primer lugar a resolver estas últimas  $(n - k)$  ecuaciones; una vez resueltas, se obtiene el valor de las  $k$  coordenadas cíclicas<sup>9</sup>.

Es posible extender el concepto de coordenada cíclica para el caso en que las fuerzas no procedan de un potencial. Para ello se define el momento generalizado en dirección  $j$  como

$$p_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}.$$

La condición de coordenada cíclica será entonces:

$$\text{si } \frac{\partial T}{\partial q_j} = 0 \text{ y } Q_j = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j = \text{cte.}$$

### Integral de Jacobi o de la Energía

En ocasiones es posible obtener una integral primera cuyo significado está relacionado con la energía total del sistema a partir de la función Lagrangiana. Para ello, observamos que la derivada total de  $L$  respecto del tiempo es

$$\frac{d}{dt}L(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Sustituyendo a partir de (2.14),  $\partial L / \partial q_j = \frac{d}{dt}(\partial L / \partial \dot{q}_j)$ , y operando:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right] + \frac{\partial L}{\partial t}$$

Agrupando los términos con derivadas totales, se deduce

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right] = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

de donde se obtiene la expresión de la llamada «integral de Jacobi»:

$$\text{si } \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad h \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = \text{cte} \quad (2.41)$$

<sup>9</sup>En *Curso de Mecánica*, J.M. Goicolea (2010), apartado 12.7 se describe el procedimiento general de Routh para proceder a esta reducción.

OBSERVACIONES:

- En el caso en que  $\partial \mathbf{r}_i / \partial t = 0$ , según vimos, la energía cinética es una expresión cuadrática homogénea en  $\dot{q}_j$ . Entonces, a partir de (2.29, 2.30):

$$T = T_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_k$$

y por tanto

$$h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = 2T_2 - (T_2 - V) = T_2 + V = T + V,$$

por lo que  $h$  (2.41) coincide en este caso con la energía total,  $T + V$ .

- Pudiera darse el caso de que  $\partial \mathbf{r}_i / \partial t = 0$  y, por tanto,  $T + V = h = p_j \dot{q}_j - L$ , pero que esta expresión no se mantenga constante por ser  $\partial L / \partial t \neq 0$ . Esto último ocurrirá si  $\partial V(q_j, t) / \partial t \neq 0$ , siendo en este caso el sistema no conservativo desde el punto de vista físico aunque las fuerzas procedan de un potencial.
- Por otra parte, en los casos en que existan sistemas de coordenadas móviles se verificará, como se ha dicho,  $\partial \mathbf{r}_i / \partial t \neq 0$  y por tanto  $h = p_j \dot{q}_j - L \neq T + V$ . Sin embargo, puede que exista la integral de Jacobi (si  $\partial L / \partial t = 0$ ), aunque su significado físico no será en este caso la conservación de la energía. Un ejemplo típico de esta situación es el de una referencia móvil pero inercial, con velocidad de traslación constante y rectilínea (cf. ejemplo 2.8)

**Conservación de la energía.**— Otra manera —más directa— de obtener una integral de la energía es observando que, si las fuerzas son todas conservativas, la energía se mantiene constante (1.45). En este caso, basta con expresar dicha ecuación en función de las coordenadas generalizadas para obtener, en el marco de la dinámica analítica, la integral primera de la energía, equivalente a (2.41). Recordemos que para que las fuerzas sean conservativas, además de provenir de un potencial, éste debe ser estacionario ( $\partial V / \partial t = 0$ ). En función de las coordenadas generalizadas, esta condición se impone de la siguiente forma:

si  $\exists V$  tal que  $Q_j = -\frac{\partial V(q_j, t)}{\partial q_j}$ , siendo  $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$  y  $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}_i(q_j, t) = \mathbf{0}$

↓

$E = T + V = \text{cte.}$

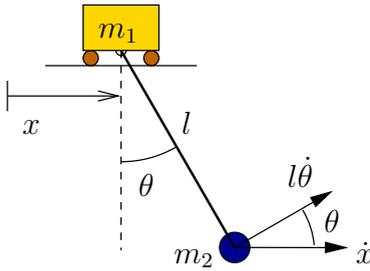


Figura 2.8: Ejemplo 2.7.

Hacemos notar que, en la expresión anterior, para establecer la constancia del potencial  $V$ , ha sido necesario añadir la condición  $(\partial \mathbf{r}_i / \partial t)(q_j, t) = \mathbf{0}$ , es decir, que no existan sistemas de coordenadas móviles. Otra manera más compacta de expresar la constancia de  $V$  sería en función de las coordenadas vectoriales, mediante la condición  $\partial V(\mathbf{r}_i, t) / \partial t = \mathbf{0}$ .

Por el contrario, en el caso en que el potencial  $V$  no sea constante, aplicando el principio de la energía cinética (1.44),

$$dT = - \sum_{k=1}^N \frac{\partial V(\mathbf{r}_i, t)}{\partial \mathbf{r}_k} \cdot d\mathbf{r}_k = -dV + \frac{\partial V(\mathbf{r}_i, t)}{\partial t} dt$$

por lo que

$$d(T + V) = \frac{\partial V(\mathbf{r}_i, t)}{\partial t} dt \neq 0,$$

es decir, no se conserva la energía  $T + V$ . Hacemos la observación de que en la expresión anterior se emplea la derivada parcial respecto del tiempo en relación con las coordenadas vectoriales (absolutas), que es en general distinta de la derivada cuando se consideran coordenadas generalizadas (posiblemente relativas o móviles):

$$\frac{\partial V(\mathbf{r}_i, t)}{\partial t} \neq \frac{\partial V(q_j, t)}{\partial t}.$$

**EJEMPLO 2.7:** Sea el sistema formado por la masa  $m_1$  que puede deslizar libremente sobre una recta horizontal, y  $m_2$  unida mediante una varilla rígida y sin masa a  $m_1$ , pudiendo girar libremente en un plano vertical.

- Considerando los parámetros (libres)  $(x, \theta)$  (ver figura 2.8), obtener las ecuaciones de Lagrange e integrales primeras que hubiere.
- Considerando ahora que se impone una velocidad constante  $v$  a  $m_1$ , discutir la existencia de integrales primeras.

*Solución.*

a.— Desarrollando la función Lagrangiana resulta:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) + m_2gl\cos\theta. \quad (2.42)$$

Observamos que no depende explícitamente de  $x$ , por lo que ésta es una coordenada cíclica:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m_1\dot{x} + m_2(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta) = (\text{cte.}) \quad (2.43)$$

La ecuación de Lagrange en la otra coordenada es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad \Rightarrow \quad m_2l^2\ddot{\theta} + m_2\ddot{x}l\cos\theta + m_2gl\sin\theta = 0. \quad (2.44)$$

En esta ecuación aparece tanto  $\theta$  como la coordenada cíclica  $x$ . Es posible eliminar esta última para obtener una ecuación diferencial función exclusivamente de las coordenadas no cíclicas. Para ello, en primer lugar se despeja derivando (2.43)

$$\ddot{x} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(-l\ddot{\theta}\cos\theta + l\dot{\theta}^2\sin\theta\right),$$

y sustituyendo en (2.44) resulta finalmente:

$$m_2l\ddot{\theta}\left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\cos^2\theta\right) + \frac{m_2^2}{m_1 + m_2}l^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta + m_2gl\sin\theta = 0. \quad (2.45)$$

Por otra parte, todas las fuerzas son conservativas luego la energía total  $E$  se conserva:

$$\begin{aligned} E &= T + V \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) - m_2gl\cos\theta \quad (\text{cte.}). \end{aligned} \quad (2.46)$$

También puede razonarse que la Lagrangiana no depende del tiempo explícitamente, por lo que la integral de Jacobi  $h$  (2.41) es constante, y además coincide con la energía  $E$  al no haber coordenadas móviles.

b.— El sistema queda ahora con el único grado de libertad  $\theta$ . La lagrangiana es:

$$L = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2(v^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2vl\dot{\theta}\cos\theta) + m_2gl\cos\theta. \quad (2.47)$$

Ahora la energía total no se conserva, ya que se realiza un trabajo externo para mover  $m_1$  con la velocidad impuesta  $v$ . Sin embargo,  $L$  no depende explícitamente del tiempo por lo que existe la integral de Jacobi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} = 0 &\Rightarrow h = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - L \\ &= -\frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2(-v^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2vl\dot{\theta} \cos \theta) - m_2gl \cos \theta \quad (\text{cte.}). \quad \square \quad (2.48) \end{aligned}$$

### 2.2.6. Sistemas naturales

Llamaremos *sistema natural* a un sistema descrito por las ecuaciones de Lagrange en su forma estándar (2.14), en el que exista la integral de Jacobi como constante del movimiento ( $\partial L/\partial t = 0$ ) y la energía cinética sea función cuadrática homogénea de las velocidades generalizadas ( $T = T_2$ ).

Como se ha comentado antes (apartado 2.2.5), en este caso la integral de Jacobi resulta tener un significado físico claro, la energía total del sistema,

$$h = T + V.$$

Al conservarse  $h$  se mantiene igualmente constante la energía, resultando conservativo desde el punto de vista físico.

Teniendo en cuenta que en un sistema natural los coeficientes en las ecuaciones (2.31, 2.30) cumplen  $a_j = 0$  y  $\partial a_{ij}/\partial t = 0$ , las ecuaciones del movimiento tienen una expresión considerablemente más sencilla que en el caso general (2.37), resultando

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{k,l=1}^n [kl, j] \dot{q}_k \dot{q}_l + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1 \dots, n). \quad (2.49)$$

En esta expresión se observa que las velocidades generalizadas  $\dot{q}_j$  intervienen únicamente en términos cuadráticos.

Podemos observar que un sistema holónomo con integral de Jacobi, en el que fuese  $T_1 = 0$  pero  $T_0 \neq 0$ , tiene ecuaciones del movimiento muy similares a (2.49), ya que  $T_0$  puede considerarse agrupado con la energía potencial  $V$ ,

$$V' = V - T_0,$$

de forma que la energía cinética restante es una expresión cuadrática homogénea en las  $\dot{q}_j$ , al igual que en un sistema natural.

EJEMPLO 2.8: Sea un sistema formado por una masa y un resorte lineal, capaz de moverse en una dirección, unido en su base a un punto que se tiene un movimiento impuesto con velocidad uniforme  $v_0$ . Sea  $l_0$  la longitud natural del muelle,  $k$  su constante, y  $x$  la elongación respecto de la natural. Discutir la existencia de una integral primera de la energía.

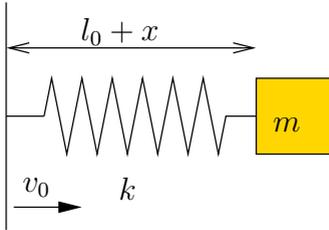


Figura 2.9: Sistema formado por una masa  $m$  y un muelle de constante  $k$  y longitud natural  $l_0$ , capaz de moverse en dirección  $x$ , cuya base tiene un movimiento impuesto de velocidad constante  $v_0$ .

*Solución.* La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m(v_0 + \dot{x})^2$$

por lo que sus componentes homogéneas son

$$T_2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2; \quad T_1 = mv_0\dot{x}; \quad T_0 = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

La energía potencial es

$$V = \frac{1}{2}kx^2.$$

Se comprueba inmediatamente que  $\partial L/\partial t = 0$ , por lo que existe la integral de Jacobi, que vale

$$h = T_2 - T_0 + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

En este ejemplo,  $T_0$  es constante, por lo que la conservación de  $h$  conduce también a la conservación de  $T_2 + V$ , aunque ambas constantes tengan distinto valor.

Otro procedimiento para analizar este ejemplo sería, considerando que el sistema de referencia móvil con la base es inercial, realizar los cálculos relativos a él:

$$T' = \frac{1}{2}m\dot{x}^2;$$

$$V' = \frac{1}{2}kx^2.$$

En este caso obtendríamos un sistema natural, en el que se conserva la energía total  $T' + V'$ . Observamos que ésta coincide con  $T_2 + V$  relativa al sistema fijo inicial, que ya habíamos visto se conservaba.  $\square$

**EJEMPLO 2.9:** Un disco circular de radio  $a$ , situado en un plano horizontal, tiene un movimiento de rotación impuesto alrededor de su centro con velocidad constante  $\omega$ . En su perímetro está anclado un muelle, de longitud natural  $r_0$ , que en su otro extremo tiene una masa  $m$ . Obtener las ecuaciones del movimiento e identificar los términos giroscópicos<sup>10</sup>.

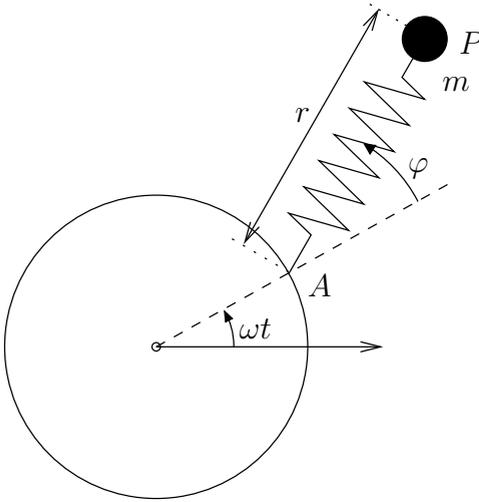


Figura 2.10: Disco que gira con velocidad constante  $\omega$ , con un resorte fijado en su perímetro, al cual está sujeta a su vez una partícula de masa  $m$ .

*Solución.* Para calcular la energía cinética debemos expresar antes la velocidad del punto  $P$ , lo que puede hacerse a través del movimiento relativo al disco,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_P &= \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{P|A} \\ &= [-a\omega \operatorname{sen}(\omega t) - r(\omega + \dot{\varphi}) \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) + \dot{r} \cos(\omega t + \varphi)] \mathbf{i} \\ &\quad + [a\omega \cos(\omega t) + r(\omega + \dot{\varphi}) \cos(\omega t + \varphi) + \dot{r} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)] \mathbf{j} \end{aligned}$$

La expresión de la Lagrangiana es

$$L = \frac{m}{2} [a^2\omega^2 + r^2(\omega + \dot{\varphi})^2 + \dot{r}^2 + 2ar\omega(\omega + \dot{\varphi}) \cos \varphi + 2a\omega\dot{r} \operatorname{sen} \varphi] - \frac{k}{2}(r - r_0)^2.$$

<sup>10</sup>Se denomina así a los términos lineales en las velocidades y con coeficientes hemisimétricos  $\gamma_{jk}$  en las ecuaciones (2.37), véase *Curso de Mecánica*, J.M. Goicolea (2010), apartado 7.2.8.

Las ecuaciones de Lagrange resultan

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 - 2mr\omega\dot{\varphi} - mr\omega^2 - ma\omega^2 \cos \varphi + k(r - r_0) &= 0 \\ mr^2\ddot{\varphi} + 2mrr\dot{\varphi} + 2mr\omega\dot{r} + mar\omega^2 \sin \varphi &= 0 \end{aligned}$$

En la primera ecuación —respecto a  $r$ — el término giroscópico es  $-2mr\omega\dot{\varphi}$ , y en la segunda ecuación —respecto a  $\varphi$ — el término correspondiente es  $+2mr\omega\dot{r}$ . La matriz de coeficientes hemisimétricos es por tanto

$$[\gamma_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & -2mr\omega \\ 2mr\omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Estos términos son los que corresponden al desarrollo de la energía cinética,

$$\begin{aligned} T &= T_2 + T_1 + T_0; \\ T_2 &= \frac{1}{2}m(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2), \\ T_1 &= m(r^2\omega\dot{\varphi} + ar\omega\dot{\varphi} \cos \varphi + a\omega\dot{r} \sin \varphi), \\ T_0 &= \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 + r^2 + 2ar \cos \varphi), \end{aligned}$$

de donde se deduce

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{\partial T_1}{\partial \dot{r}} = ma\omega r \sin \varphi, & a_\varphi &= \frac{\partial T_1}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\omega + mar\omega \cos \varphi; \\ \gamma_{r\varphi} &= \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} = -2mr\omega, & \gamma_{\varphi r} &= -\gamma_{r\varphi} = 2mr\omega \quad \square \end{aligned}$$

### 2.2.7. Sistemas con ligaduras

Sea un sistema descrito mediante coordenadas generalizadas  $\{q_j\}$  no libres. En este caso, las variaciones  $\{\delta q_j\}$  no pueden considerarse arbitrarias y el sistema está gobernado por la ecuación fundamental de la dinámica (2.11). Si el sistema admite potencial  $V$  se puede escribir esta última ecuación en función de la Lagrangiana  $L$ :

$$\sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0, \quad \forall \{\delta q_j\} \text{ compatibles.} \quad (2.50)$$

Al no ser arbitrarias las variaciones  $\{\delta q_j\}$ , estando sujetas a restricciones de los enlaces, no se pueden eliminar de la ecuación anterior.

No resulta posible elegir un conjunto de coordenadas libres si existen enlaces anholónomos en los que intervienen las velocidades, del tipo:

$$\Phi(q_j, \dot{q}_j, t) = 0.$$

Existe un método general para resolver estos sistemas anholónomos con ligaduras, mediante el empleo de *multiplicadores de Lagrange*. Su desarrollo excede los objetivos de este curso y por tanto no se incluye aquí, pudiendo consultarse en otros textos<sup>11</sup>.

---

<sup>11</sup> *Curso de Mecánica*, J.M. Goicolea (2010), apartado 7.4.

## Estática Analítica

### Índice

---

<b>3.1. Consideraciones generales</b>	<b>109</b>
<b>3.2. Condiciones analíticas del equilibrio</b>	<b>112</b>
3.2.1. Unicidad del equilibrio; condición de Lipschitz	114
<b>3.3. Estabilidad del equilibrio</b>	<b>115</b>
3.3.1. Concepto de estabilidad	115
3.3.2. Condiciones de estabilidad: teorema de Lejeune-Dirichlet	116
<b>3.4. Equilibrio de una partícula</b>	<b>119</b>
3.4.1. Partícula libre	119
3.4.2. Partícula ligada a una superficie	120
3.4.3. Partícula ligada a una curva	122
<b>3.5. Equilibrio de un sistema de partículas</b>	<b>124</b>
3.5.1. Ecuaciones cardinales de la estática	124
3.5.2. Principio de los trabajos virtuales	126
<b>3.6. Equilibrio del sólido rígido</b>	<b>127</b>
3.6.1. Aplicación del principio de los trabajos virtuales	127
3.6.2. Sistemas isostáticos e hiperestáticos	130

---

### 3.1. Consideraciones generales

En los capítulos precedentes se ha estudiado la descripción del movimiento (cinemática), las magnitudes que caracterizan al mismo en sistemas materiales (cinética), y la evolución de estas magnitudes con el tiempo (dinámica).

En este capítulo se estudiará la estática o equilibrio de los sistemas, entendida como la ausencia de movimiento. Se trata por tanto de un caso particular de la dinámica, pero que por su importancia merece un tratamiento especial.

DEFINICIÓN:

*Se dice que un sistema material está en equilibrio cuando todas sus partículas se encuentran en reposo, y permanecen en el mismo estado de reposo.*

Para que se verifique el equilibrio y éste sea estable han de darse una serie de condiciones, cuyo análisis constituye el objeto de la estática. Ésta permitirá analizar diversos tipos de problemas:

1. Para un sistema sometido a un conjunto de fuerzas dadas, establecer la *existencia* de una o más posibles configuraciones de equilibrio y determinar éstas.
2. Analizar la *estabilidad* de las posiciones de equilibrio. El concepto de estabilidad consiste en garantizar si ante pequeñas perturbaciones respecto de la posición de equilibrio se mantiene el movimiento próximo a dicha configuración, o si por el contrario se aleja indefinidamente de la misma.
3. Para un sistema en una configuración geométrica determinada, determinar las *acciones necesarias* (tanto en lo que respecta a fuerzas activas como a reacciones) para el equilibrio y su estabilidad.

Las aplicaciones prácticas de la estática en la ingeniería son muy numerosas, siendo quizá la parte de la mecánica más empleada. Esto es así especialmente en la ingeniería civil y en el análisis estructural: por lo general las estructuras se diseñan para estar y permanecer en reposo bajo las cargas de servicio estáticas, o para que su movimiento bajo cargas dinámicas sea pequeño y estable (vibraciones).

Los principios generales de la dinámica de sistemas, desarrollados en los capítulos anteriores permiten, mediante su particularización a las condiciones de la estática, establecer las condiciones generales del equilibrio. En concreto, para un sistema general de varias partículas (digamos  $N$ ), la aplicación del principio de la cantidad de movimiento a cada partícula (ecuación (1.33)), para las condiciones particulares del equilibrio ( $d\mathbf{v}_i/dt = \mathbf{0}$ ), da lugar a una condición necesaria:  $\mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ , ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Por otra parte, si el sistema parte de un estado inicial de reposo ( $\mathbf{v}_i(0) = \mathbf{0}$ ) la condición anterior es también suficiente. Podemos adoptar por lo tanto con carácter general como condición

de equilibrio (necesaria y suficiente) la anulación de la resultante de las fuerzas ejercidas sobre cada partícula:

$$\mathbf{v}_i(0) = \mathbf{0}, \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \iff \mathbf{v}_i(t) = \mathbf{0} \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \quad (3.1)$$

En los sistemas reales con infinitas partículas (p. ej., sólidos rígidos considerados como medios continuos) es preciso reducir las condiciones generales para el equilibrio expresadas arriba a un número menor de condiciones, de forma que sea abordable el problema mediante los métodos de la mecánica de sistemas discretos estudiados en este curso<sup>1</sup>. En cualquier caso, el estudio de las fuerzas será esencial para las condiciones de equilibrio.

Ya se estableció una clasificación somera de las fuerzas en un sistema en el apartado 1.2. Sin embargo, recordaremos aquí algunos conceptos que nos serán útiles para la estática. En primer lugar, es posible clasificar las fuerzas en fuerzas *activas* o *directamente aplicadas*, y fuerzas *pasivas*, también llamadas *reacciones* o *fuerzas de ligadura*. Las primeras son las que tienen un valor conocido, variables con el tiempo o no (por ejemplo, cargas exteriores ejercidas sobre el sistema), o posiblemente en función de la configuración o estado del sistema (por ejemplo, fuerzas internas en muelles o amortiguadores). Por el contrario, se consideran reacciones las que sirven para imponer una determinada ligadura o apoyo, y cuyo valor debe calcularse imponiendo las ecuaciones de equilibrio compatibles con dicha ligadura (o de la dinámica si el problema no es estático).

Otra clasificación de las fuerzas a tener en cuenta es como *interiores* y *exteriores*. El primer caso engloba a todas las que provienen de partículas dentro del propio sistema, tanto por acciones de contacto, acciones a distancia (por ejemplo, atracción gravitatoria), o mediante elementos discretos como resortes o amortiguadores. En este caso tanto la acción como la reacción que postula la tercera ley de Newton se ejercen entre partículas del sistema. Por el contrario, se denomina fuerza exterior a la que proviene de puntos externos al sistema, y la reacción a la misma no se ejerce por tanto sobre el sistema. Tanto las fuerzas activas como las reacciones pueden ser a su vez interiores o exteriores, siendo ambas clasificaciones independientes. Así, las ligaduras pueden provenir de partículas del mismo sistema (por ejemplo, distancias constantes entre puntos de un sólido rígido) o de fuera del mismo (por ejemplo, apoyos o sustentaciones externas).

---

<sup>1</sup>Se puede estudiar la estática (y también la dinámica) en medios continuos, mediante ecuaciones en derivadas parciales o formulaciones débiles equivalentes como el principio de los trabajos virtuales. Entre los procedimientos de resolución, el más potente en la actualidad es el Método de los Elementos Finitos (M.E.F.), especialmente adecuado para su tratamiento numérico en ordenadores.

Otro elemento importante para el análisis del equilibrio son las *ligaduras* o *enlaces*. Ya se habló sobre ellas en el apartado 1.2, por lo que sólo recordaremos aquí los aspectos fundamentales. Establecíamos allí la clasificación entre enlaces *holónomos*, funciones que imponían condiciones entre coordenadas y tiempo:

$$\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0, \quad (3.2)$$

y enlaces *anholónomos*, funciones que adicionalmente dependían de las velocidades:

$$\phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_n, t) = 0 \quad (3.3)$$

Asimismo, en función de su variación temporal, los enlaces se denominan *reónomos* si dependen explícitamente del tiempo ( $\partial\phi/\partial t \neq 0$ ) o *esclerónomos* si no varían con el tiempo ( $\partial\phi/\partial t = 0$ ). Por último, denominamos *lisos* a los enlaces cuyas fuerzas de reacción no realizan trabajo para los movimientos permitidos por los mismos, mientras que serán *rugosos* en caso contrario. Para que tenga sentido esta última clasificación, es obvio que el enlace debe permitir algún movimiento, ya que en caso contrario no cabe hablar de trabajo. Para ilustrar esta última clasificación, considérese un apoyo deslizante, que puede ser liso o con rozamiento entre las superficies; por el contrario, si el apoyo restringe todos los movimientos del punto en cuestión se convierte en un *empotramiento*, al cual no tiene sentido calificarlo como liso ni rugoso.

## 3.2. Condiciones analíticas del equilibrio

En el capítulo 2 se estudió la formulación analítica de la mecánica, en relación con la dinámica. Recordemos que la base de dicho planteamiento, debido originalmente al matemático francés Lagrange, es la descripción de la configuración del sistema mediante un conjunto reducido de *coordenadas generalizadas*, para las que empleamos la notación  $\{q_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), que sirven para definir de manera unívoca la configuración. Estas coordenadas pueden, en principio, representar magnitudes físicas diversas (longitudes, ángulos, distancias al cuadrado, ...), no estando restringidas a sistemas de coordenadas algebraicas ni a bases de espacios vectoriales.

La ventaja fundamental del uso de coordenadas generalizadas es que en su propia elección está incluida de forma implícita toda o a menos gran parte de la información de los enlaces. Cuando los enlaces son holónomos, de las ecuaciones (3.2) que los expresan podemos “eliminar” las coordenadas dependientes; de esta forma, restan al final únicamente las coordenadas independientes o *grados de libertad* del sistema. Si existen además enlaces anholónomos propiamente dichos (es decir, no integrables) no será posible eliminar las coordenadas

redundantes y será preciso mantener sus ecuaciones de ligadura de manera explícita, para solucionarlas finalmente junto con las ecuaciones de la dinámica mediante multiplicadores de Lagrange (ver apartado 2.2.7).

En cualquier caso, el estudio de un sistema mediante coordenadas generalizadas permite un marco ventajoso para establecer las condiciones de equilibrio, ya que por lo general nos restringiremos al mínimo número de condiciones. Sean las coordenadas generalizadas libres o no, por lo general son un número mucho más reducido que el de las coordenadas cartesianas de todas las partículas del sistema; normalmente, serán además un conjunto discreto y finito de coordenadas, en lugar de un número infinito como por ejemplo el que corresponde a las partículas de un sólido considerado como un medio continuo.

Puesto que la relación entre las configuraciones o posiciones del sistema y las coordenadas generalizadas  $\mathbf{r}_i(q_j)$  ( $i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, n$ ) es unívoca, es obvio que la definición de equilibrio (3.1) dada en el apartado anterior es equivalente a exigir que las coordenadas generalizadas sean constantes y permanezcan constantes:

$$\boxed{\dot{q}_j = 0; \quad \ddot{q}_j = 0 \quad (j = 1, \dots, n)} \quad (\text{condición de equilibrio}) \quad (3.4)$$

Para establecer la restricción que esta condición impone a las fuerzas, partimos de las ecuaciones de Lagrange (2.12):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (3.5)$$

donde  $Q_j$  son las fuerzas generalizadas (ecuación (2.7)) y  $T$  es la energía cinética. Esta última viene dada, en el caso en que los enlaces no dependan del tiempo, mediante (2.33)<sup>2</sup>:

$$T = \frac{1}{2} a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l$$

donde los coeficientes  $a_{kl}$  son simétricos, y pueden ser función a su vez de las coordenadas,  $a_{kl}(q_j)$ . Sustituyendo en las ecuaciones de Lagrange (3.5),

$$\frac{da_{kj}}{dt} \dot{q}_k + a_{kj} \ddot{q}_k - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{kl}}{\partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_l = Q_j$$

y empleando la condición de equilibrio (3.4) se llega a la condición equivalente

$$\boxed{Q_j = 0 \quad (j = 1, \dots, n)} \quad (3.6)$$

<sup>2</sup>al igual que en capítulos anteriores, adoptaremos aquí el convenio de sumatorio implícito para los índices repetidos

Es fácil ver también que, si  $Q_j = 0$  y se parte de condiciones iniciales de reposo ( $\dot{q}_j(0) = 0$ ), puesto que la matriz de coeficientes  $a_{kl}$  es regular, ha de ser  $\ddot{q}_j = 0$ . Por lo tanto, la anulación de las fuerzas generalizadas (3.6) es necesaria y suficiente para el equilibrio de un sistema, pudiendo considerarse como una condición equivalente a (3.4).

### 3.2.1. Unicidad del equilibrio; condición de Lipschitz

Acabamos de ver que si se anulan las fuerzas generalizadas ( $Q_j = 0$ ) existe solución estática o de equilibrio. Sin embargo, no queda demostrado desde el punto de vista matemático la unicidad de esta solución. Podría, en teoría, existir otra solución que fuese dinámica.

Desde un punto de vista físico determinista la falta de unicidad no tiene sentido, pues supondría que a partir de condiciones iniciales dadas es imposible predecir el estado o la evolución de un sistema. Esto de hecho ocurre en la dinámica para el caso de los sistemas caóticos, en los que el desorden (“caos”) se debe en realidad a una gran sensibilidad frente a perturbaciones pequeñas, haciéndose en la práctica impredecible su evolución.

Veamos un sencillo ejemplo de sistema que posee solución no única, estática y dinámica:

$$m\ddot{x} = k \left| \sqrt{|x|} \right|, \quad \text{siendo } m, k > 0 \quad (3.7)$$

La solución estática es obviamente:

$$x = 0$$

Sin embargo, existe asimismo una solución dinámica dada por:

$$x = \frac{k^2}{144m^2} t^4$$

basta sustituir en (3.7) para comprobar que esta solución cumple efectivamente la ecuación.

Matemáticamente, la condición de unicidad se expresa por la *Condición de Lipschitz*:

*Se dice que una función  $Q(q_i, t)$ , definida en un Dominio  $\mathcal{D}$  cumple la condición de Lipschitz respecto de las variables  $\{q_i\}$  si se puede encontrar una constante  $k$  tal que  $\forall q_i \in \mathcal{D}$  y  $\forall \Delta q_i$ ,*

$$|Q(q_i + \Delta q_i, t) - Q(q_i, t)| \leq k \sum_i |\Delta q_i| \quad (3.8)$$

La constante  $k$  se denomina constante de Lipschitz.

Si el Dominio  $\mathcal{D}$  es convexo, un requisito suficiente para la condición de Lipschitz es que existan derivadas parciales  $\frac{\partial Q}{\partial q_i}$ , y que estén acotadas en  $\mathcal{D}$ .

La función (3.7) propuesta en el ejemplo anterior no podemos garantizar que cumple la condición de Lipschitz en  $x = 0$ , pues no existe allí su derivada. por tanto, no está garantizada la unicidad de la solución, que de hecho hemos visto no es única.

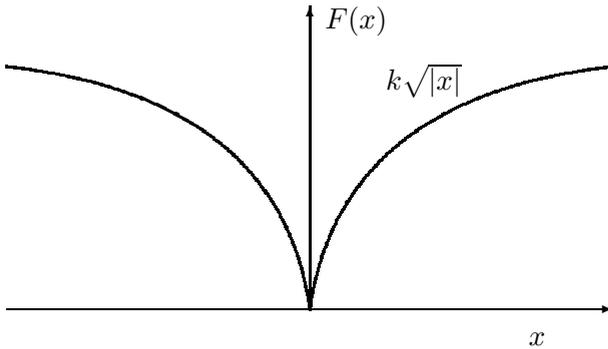


Figura 3.1: Sistema gobernado por la ecuación  $m\ddot{x} = k\sqrt{|x|}$ ; la solución estática en  $x = 0$  no es única, debido a la no derivabilidad de la función de fuerza en este punto.

### 3.3. Estabilidad del equilibrio

#### 3.3.1. Concepto de estabilidad

Una perturbación del equilibrio en que se alteren las coordenadas  $\{q_i\}$ , o bien se ponga en movimiento el sistema con velocidades iniciales  $\{\dot{q}_i \neq 0\}$ , dará lugar a una evolución dinámica del sistema, en la que obviamente la configuración varía respecto de la posición de equilibrio.

Se dice que el equilibrio es *estable* cuando la variación respecto de la posición de equilibrio está acotada, llegando a ser tan pequeña como queramos al hacer la perturbación suficientemente pequeña. En términos más precisos, y suponiendo que la posición de equilibrio corresponde a  $\{q_i = 0\}$ , diremos que el equilibrio es estable si para un valor  $\epsilon$  tan pequeño como se desee es posible encontrar un valor  $\delta$  de forma que:

$$\forall \epsilon, \exists \delta \quad \text{tal que} \quad |q_{0i}| < \delta, \quad |\dot{q}_{0i}| < \delta \quad \Rightarrow \quad |q_i| < \epsilon$$

En este caso lo que ocurre es que las fuerzas que se originan en esta perturbación tienden a devolver al sistema a su posición de equilibrio.

Por el contrario, se dice que el equilibrio es *inestable* cuando la configuración del sistema no está acotada, aún para una perturbación pequeña, perdiéndose

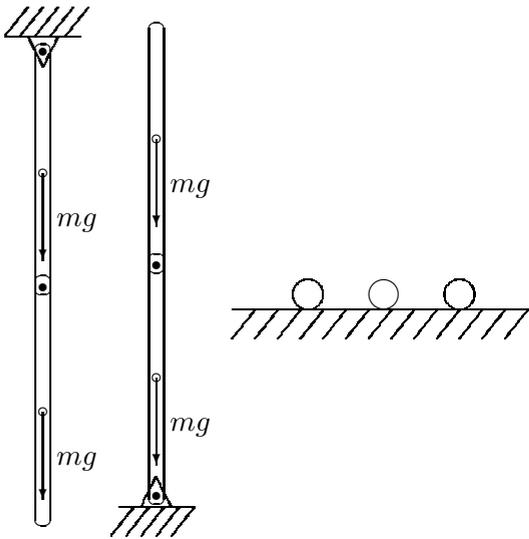


Figura 3.2: Ejemplos de equilibrio estable, inestable e indiferente.

por tanto la posición de equilibrio. Las fuerzas tienden a separar el sistema de su posición de equilibrio.

Por último, cabe hablar también de equilibrio *indiferente*, referido a perturbaciones en que se alteran tan sólo las coordenadas, pero no las velocidades. En este caso las nuevas posiciones, cercanas a la posición original de equilibrio siguen siendo de equilibrio.

Restringiéndonos al caso en que las fuerzas provengan de un potencial  $V$  ( $Q_i = -\partial V/\partial q_i$ ), es inmediato observar que la condición de equilibrio (3.6) exige que éste adopte un valor estacionario en la posición de equilibrio:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_{q_i=0} = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.9)$$

El problema de la estabilidad del equilibrio es en realidad un problema de dinámica, como se ha observado arriba, puesto que una vez que se perturba la posición de equilibrio, aunque sea ligeramente, se pierden las condiciones estáticas (3.4).

### 3.3.2. Condiciones de estabilidad: teorema de Lejeune-Dirichlet

Supongamos un sistema en que las fuerzas provienen de un potencial  $V$ :  $Q_i = -\partial V/\partial q_i$ , y que además es autónomo:  $\partial V/\partial t = 0$ . Sabemos que en el equilibrio debe cumplirse  $\partial V/\partial q_i = 0$ , por lo cual  $V$  adopta un valor estacionario en dicho punto. La condición analítica para la estabilidad del equilibrio viene dada por el teorema de Lejeune-Dirichlet, que afirma:

*“Si el potencial  $V$  es mínimo en la posición de equilibrio, ésta es estable”*

Cuando el potencial toma un valor estacionario correspondiente a un máximo, por el contrario, el equilibrio es inestable. En el caso en que  $V$  sea estacionario pero no corresponda ni a un mínimo ni a un máximo, el carácter del equilibrio es en principio dudoso, pudiendo corresponder a situaciones de equilibrio indiferente o inestable.

Veamos en primer lugar una justificación del teorema mediante un razonamiento sencillo e intuitivo, basado en la conservación de la energía total,  $E = T + V$ . Dicha energía debe conservarse, al provenir las fuerzas de un potencial autónomo. Supongamos una perturbación del equilibrio, que esté asociada bien a un cambio de las coordenadas  $\{q_i\}$  o de las velocidades  $\{\dot{q}_i\}$ , o de ambas al tiempo. En cualquier caso, y asignando (sin pérdida de generalidad) valor nulo al potencial en la posición de equilibrio, en ella la energía total es nula; la perturbación inicial del mismo está asociada a una energía pequeña  $\epsilon = \Delta E$  de forma que en la evolución posterior (dinámica) se cumple:

$$\epsilon = T + V$$

Si en la posición de equilibrio  $V|_0 = 0$  es un mínimo local, al separarse ligeramente del mismo será  $V > 0$ . Por otra parte la energía cinética también se anula en la posición de equilibrio y su carácter esencialmente positivo obliga igualmente a que sea  $T > 0$ . Al ser  $T + V = \epsilon$ , esto indica que ambos deben estar acotados:

$$T + V = \epsilon, \quad T > 0, V > 0 \quad \Rightarrow \quad T < \epsilon, V < \epsilon$$

La regularidad de  $V$  y  $T$  como funciones de las coordenadas y de las velocidades respectivamente hacen que esta condición sea equivalente a que las coordenadas y las velocidades se mantengan igualmente pequeñas, asegurando por tanto la estabilidad.

Por el contrario, si  $V$  está en un punto de máximo, al apartarse del equilibrio es  $V < 0$ , por lo cual la energía cinética  $T$  debe crecer para mantener la suma igual a  $\epsilon$ , apartándose el sistema cada vez más de la posición de equilibrio, con lo que éste será inestable.

Es posible realizar una discusión algo más precisa de la estabilidad basándose en el desarrollo en serie de  $V$ :

$$V(\mathbf{q}) = V(\mathbf{0}) + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial q_i} \Big|_0}_{=0} q_i + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_0}_{\stackrel{\text{def}}{=} k_{ij}} q_i q_j + \dots \quad (3.10)$$

La variación del potencial respecto de la posición de equilibrio es por tanto

$$\Delta V = V(\mathbf{q}) - V(\mathbf{0}) = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_0 q_i q_j + \dots \quad (3.11)$$

Si se desprecian en el desarrollo anterior los términos de orden superior al segundo, la condición de estabilidad viene determinada por la matriz de coeficientes  $[\mathbf{K}] = [k_{ij}]$  en (3.10). La condición de mínimo equivale a que esta matriz sea definida positiva, es decir

$$\{\mathbf{a}\}^T [\mathbf{K}] \{\mathbf{a}\} > 0 \quad \forall \{\mathbf{a}\} \neq \{\mathbf{0}\}. \quad (3.12)$$

Puede teóricamente darse el caso de que  $V$  sea mínimo pero que no se cumpla estrictamente la condición anterior, siendo la desigualdad  $\geq 0$ . La matriz  $[\mathbf{K}] = [k_{ij}]$  sería entonces semidefinida positiva, siendo preciso para evaluar la estabilidad un estudio más detallado de los términos de orden superior. En concreto serían los términos pares de orden superior al segundo en (3.10) los encargados de hacer cumplir la condición de mínimo,  $\Delta V > 0$ .

El hecho de que el potencial sea mínimo corresponde a que las fuerzas que se generan en el sistema al perturbar la posición de equilibrio,

$$Q_i \simeq \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} q_j,$$

que son fuerzas pequeñas (del orden de  $q_j$ ), tiendan a recuperar la posición de equilibrio. Si existen además fuerzas de tipo viscoso (proporcionales a las velocidades  $\dot{q}_j$ ) éstas no alteran la naturaleza del equilibrio puesto que son infinitésimas para alteraciones de las posiciones próximas al equilibrio. En efecto, producida una perturbación en coordenadas, estas fuerzas de tipo viscoso no tenderían ni a devolver ni a apartar al sistema de la posición de equilibrio si las velocidades son cero, o prácticamente cero.

Por el contrario, hay resistencias pasivas como el rozamiento que toman un valor finito ante cualquier intento de desplazamiento, en el sentido de impedir el mismo. En este caso sí pueden resultar estabilizadoras del equilibrio, creando lo que se puede llamar “zonas” de equilibrio estable (el equilibrio estable se produce no sólo en el punto de mínimo potencial  $V$ , sino en un dominio finito en que las fuerzas de rozamiento garantizan la estabilidad).

Una consecuencia práctica inmediata del teorema de Lejeune-Dirichlet es el teorema de Torricelli, para sistemas sujetos al campo gravitatorio simplificado. Este afirma que

*Para un sistema sometido a un campo gravitatorio uniforme, las posiciones de equilibrio estable son las que corresponden a los mínimos de la altura (coordenada vertical) del centro de masas.*

En efecto, el potencial del sistema es

$$V = \sum_i m_i g z_i = M g z_G$$

por lo cual, el mínimo de  $z_G$  coincide con el mínimo de  $V$ , lo que garantiza la estabilidad.

## 3.4. Equilibrio de una partícula

### 3.4.1. Partícula libre

Para fijar ideas desarrollaremos en la práctica los conceptos de equilibrio expuestos arriba, comenzando por el sistema más simple, una partícula o punto material libre. Las coordenadas generalizadas pueden ser las tres coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ , o bien las coordenadas en otro sistema como cilíndricas, esféricas, etc. (ver apéndice B).

La condición de equilibrio es

$$\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (3.13)$$

donde  $\mathbf{F}$  es la resultante de todas las fuerzas ejercidas sobre la partícula. En general,  $\mathbf{F}$  será función de la posición de la partícula, lo cual nos permite plantear el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que define las posiciones de equilibrio.

Si  $\mathbf{F}$  (bien todas o algunas de sus componentes) depende a su vez del tiempo, es decir si se trata de un sistema no autónomo, para que haya equilibrio será necesario conseguir la anulación de  $\mathbf{F}(t)$  en todo momento.

Si las fuerzas provienen de un potencial  $V$ , la condición de equilibrio (3.13) equivale a

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad (3.14)$$

es decir,  $V$  ha de tomar un valor estacionario. Para que este equilibrio sea estable, tal y como hemos visto con anterioridad, este punto debe constituir un mínimo de  $V$ , lo que queda garantizado si la matriz de derivadas segundas es definida positiva:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{pmatrix} > 0$$

Un resultado elemental de algebra matricial es que para que una matriz sea definida positiva todos sus menores principales han de ser positivos, lo cual en nuestro caso se traduce en tres inecuaciones, al ser la matriz de orden tres.

Conviene observar que, en el caso de emplear coordenadas curvilíneas y que estas no sean regulares en todo el dominio, en los puntos de singularidad no será posible aplicar el criterio anterior. Esto ocurre, por ejemplo, en coordenadas esféricas para los puntos de latitud  $\lambda = \pm\pi/2$ . En estos puntos es necesario realizar un cambio a otras coordenadas regulares para estudiar el equilibrio.

Por último, este caso sencillo permite hacerse una idea intuitiva de la naturaleza de las fuerzas estabilizadoras para una posición de equilibrio estable. En efecto, éstas quedan definidas por el gradiente de  $V$  con signo cambiado,

$$\mathbf{F} = -\frac{dV}{d\mathbf{r}} = -\mathbf{grad} V$$

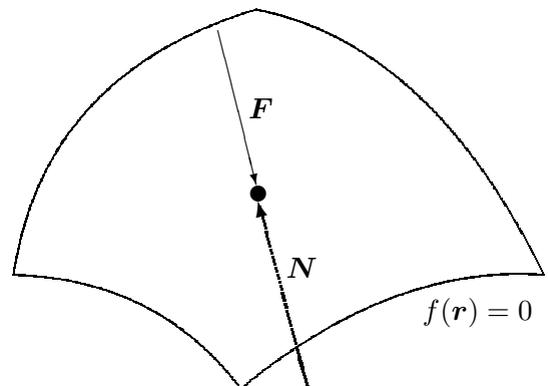
vector que va dirigido hacia los puntos de mínimo valor de  $V$ , es decir en dirección contraria a los puntos de máximo  $V$ . Por tanto, en el primer caso las fuerzas tienden a recuperar la posición de equilibrio, mientras que en el segundo alejan a la partícula de esta posición.

### 3.4.2. Partícula ligada a una superficie

Consideramos la superficie definida por la expresión analítica

$$f(\mathbf{r}) = 0 \tag{3.15}$$

Figura 3.3: *Partícula ligada a una superficie*



Supondremos una partícula ligada de forma bilateral a la superficie mediante un enlace liso, por lo que la reacción sobre la partícula será normal a la superficie:

$$\mathbf{N} = \lambda \mathbf{grad} f \tag{3.16}$$

La condición de equilibrio requiere la anulación de la resultante de sumar fuerzas aplicadas ( $\mathbf{F}$ ) y reacción ( $\mathbf{N}$ ):

$$\mathbf{F} + \lambda \mathbf{grad} f = \mathbf{0} \quad (3.17)$$

Las cuatro incógnitas (coordenadas  $(x, y, z)$  de la partícula y multiplicador  $\lambda$ ) se resuelven mediante las cuatro ecuaciones escalares que se deducen de (3.15) y (3.17).

En el caso en que la ligadura no sea bilateral, pudiendo la partícula abandonar la superficie por una de sus caras, la reacción (3.16) no puede tomar un valor cualquiera, sino que se verá limitado a  $\lambda \geq 0$  ó  $\lambda \leq 0$  según la cara libre. El método a seguir en este caso es solucionar el problema igual que si la ligadura fuera bilateral, para comprobar después el signo de  $\lambda$ . Si éste es el adecuado, se da por válida la solución; si no, la partícula habría abandonado la superficie y se rehace el cálculo considerándola libre a partir de ese instante.

Por lo general, en lugar de resolver directamente para las cuatro variables  $(x, y, z, \lambda)$ , es preferible un planteamiento más sencillo empleando la definición paramétrica de la superficie, en función de dos parámetros  $u$  y  $v$ . Notemos que la ecuación (3.16) expresa simplemente que la fuerza aplicada  $\mathbf{F}$  ha de ser normal a la superficie, lo que equivale a que sea normal a dos vectores tangentes a la misma,  $\partial \mathbf{r} / \partial u$  y  $\partial \mathbf{r} / \partial v$ :

$$\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = 0, \quad \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = 0 \quad (3.18)$$

estas dos ecuaciones, en función de las variables  $u$  y  $v$ , definen las posiciones de equilibrio sobre la superficie. En el caso particular en que  $\mathbf{F}$  provenga de un potencial, (3.18) equivale a:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial V(u, v)}{\partial u} = 0, \\ -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial V(u, v)}{\partial v} = 0; \end{aligned}$$

es decir, equivale a que el potencial  $V(u, v)$  expresado como función de las coordenadas  $(u, v)$  de la superficie, sea estacionario. De hecho, podríamos haber considerado desde un principio  $(u, v)$  como las dos coordenadas generalizadas del sistema, lo que nos habría conducido directamente al resultado anterior.

La estabilidad del equilibrio se estudiará mediante la matriz de derivadas segundas de  $(u, v)$ ,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \end{pmatrix},$$

analizando si es definida positiva. Volvemos a hacer la observación, aquí más pertinente si cabe, de la comprobación de la regularidad de las coordenadas. En una superficie por lo general las coordenadas serán curvilíneas y es bastante común que existan puntos en los que el mapa paramétrico no sea regular.

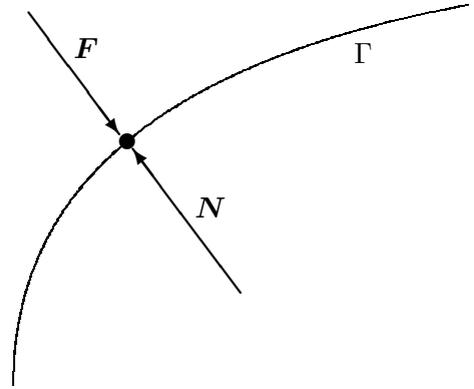
Quedaría por estudiar el caso de que la superficie no sea lisa, existiendo una componente tangencial de la reacción debida al rozamiento<sup>3</sup>.

### 3.4.3. Partícula ligada a una curva

Consideramos la curva  $\Gamma$  definida por las ecuaciones

$$f(\mathbf{r}) = 0; \quad g(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.19)$$

Figura 3.4: *Partícula ligada a una curva  $\Gamma$  lisa: para el equilibrio la fuerza aplicada  $\mathbf{F}$  debe anular la reacción normal  $\mathbf{N}$ .*



Supongamos una partícula ligada a  $\Gamma$  mediante una ligadura bilateral y lisa, por lo que la reacción normal de  $\Gamma$  sobre la partícula será normal a la curva. Esta normal, como sabemos, no es única, expresándose en general como combinación lineal:

$$\mathbf{N} = \lambda \mathbf{grad} f + \mu \mathbf{grad} g$$

para  $\lambda$  y  $\mu$  arbitrarias. Si además actúa sobre la partícula una fuerza aplicada  $\mathbf{F}$ , el equilibrio requiere  $\mathbf{F} + \mathbf{N} = \mathbf{0}$ , es decir

$$\mathbf{F} + \lambda \mathbf{grad} f + \mu \mathbf{grad} g = \mathbf{0} \quad (3.20)$$

El problema queda planteado pues con 5 ecuaciones escalares (3.19) y (3.20) para las 5 incógnitas  $(x, y, z, \lambda, \mu)$ .

<sup>3</sup>Véase *Curso de Mecánica*, J.M. Goicolea (2010), apartado 13.7 para las resistencias pasivas debidas al rozamiento.

En la práctica, el planteamiento expuesto arriba puede resultar demasiado engorroso, pudiendo ser preferible el empleo de la descripción paramétrica de la curva, en función de un parámetro  $u$ :

$$\Gamma : u \mapsto \mathbf{r}(u)$$

La expresión de equilibrio (3.20) establece simplemente que  $\mathbf{F}$  sea normal a la curva, cuya dirección en un punto viene definida por su tangente  $d\mathbf{r}/du$ . Por tanto, equivale a

$$\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{du} = 0 \quad (3.21)$$

resultando una única ecuación en función del parámetro  $u$ , que define el o los puntos de equilibrio.

En este caso, aunque  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  no se haya obtenido a partir de un potencial, admitiendo que sea una función continua, siempre será posible obtener una determinada función potencial definida sobre la curva,

$$V_1(u) = - \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

de forma que el equilibrio corresponde a los puntos en los que  $V_1(u)$  es estacionario. En efecto, para un elemento  $d\mathbf{r}$  sobre  $\Gamma$ ,

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{du} du$$

por lo que la derivada de  $V_1$  coincide con (3.21):

$$\frac{dV_1(u)}{du} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{du} = 0$$

Si  $\mathbf{F}$  se obtuvo a partir de un potencial general en el espacio  $V(\mathbf{r})$ , lógicamente el potencial sobre la curva coincidirá con aquél:

$$V_1(u) = - \int - \mathbf{grad} V \cdot d\mathbf{r} = \int dV = V(\mathbf{r}(u))$$

La estabilidad del equilibrio corresponderá lógicamente a los mínimos de la función potencial,

$$\frac{d^2V_1}{du^2} > 0.$$

Por último, en los casos en que la ligadura no sea lisa y puedan existir fuerzas de reacción tangentes a la curva, habría que proyectar las fuerzas aplicadas según la tangente para establecer la inecuación de rozamiento<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>Véase *Curso de Mecánica*, J.M. Goicolea (2010), apartado 13.7 para las resistencias pasivas debidas al rozamiento.

## 3.5. Equilibrio de un sistema de partículas

### 3.5.1. Ecuaciones cardinales de la estática

En el caso de un sistema de  $N$  partículas, el equilibrio del mismo equivale al de cada una de sus partículas:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (3.22)$$

donde  $\mathbf{F}_i$  es la fuerza total sobre cada partícula  $i$ , resultante de fuerzas exteriores e interiores:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{ext} + \mathbf{F}_i^{int}$$

La aplicación de las condiciones de equilibrio (3.22) puede resultar muy trabajosa, al tenerse que realizar para cada una de las  $N$  partículas. En el caso de medios continuos, rígidos o no, constituidos por infinitas partículas, es prácticamente imposible. Por lo tanto es necesario obtener ecuaciones y condiciones de tipo global que caractericen el equilibrio de un sistema en su conjunto. Además, las ecuaciones (3.22) tienen el inconveniente de que intervienen tanto las fuerzas activas como las reacciones, a menudo desconocidas a priori.

El estudio del equilibrio se puede hacer particularizando algunos de los principios generales de la dinámica de sistemas estudiados en el capítulo 6.

En primer lugar, al sumar (3.22) para todas las partículas del sistema, las fuerzas interiores se anulan dos a dos (apartado 1.3.1), por lo que se obtiene

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{ext} = \mathbf{0} \quad (3.23)$$

tomando momentos de las fuerzas respecto de un punto cualquiera, sumando los mismos obtendremos otra ecuación análoga:

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{ext} = \mathbf{0} \quad (3.24)$$

Al igual que en el apartado 1.3.2 hemos considerado que las fuerzas internas son centrales, por lo que sus momentos se anulan dos a dos.

Las ecuaciones (3.23) y (3.24), denominadas *ecuaciones cardinales de la estática*, constituyen un conjunto *necesario* de condiciones que han de cumplirse para que todo sistema esté en equilibrio. En el caso general de un sistema tridimensional serán 6 ecuaciones, mientras que para un sistema plano se tratará de 3 ecuaciones. Estas ecuaciones equivalen a establecer que el sistema de

fuerzas, como sistema de vectores deslizantes, sea un sistema nulo (resultante y momento en un punto nulos). Por otra parte, estas ecuaciones pueden considerarse como un caso particular de las ecuaciones cardinales de la dinámica (1.66), (1.68) ya estudiadas anteriormente.

Como se ha dicho, las ecuaciones cardinales constituyen condiciones necesarias pero *no siempre suficientes* para el equilibrio de un sistema. Dicho de otra manera, el que en un sistema actúe un conjunto de fuerzas de resultante y momento nulos no es garantía de que el sistema esté en equilibrio.

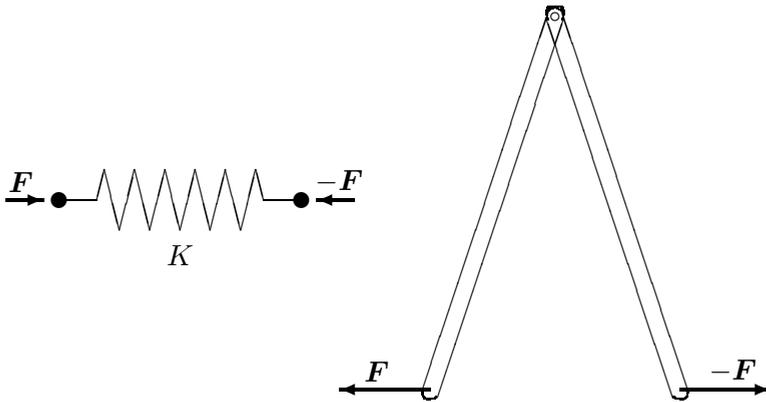


Figura 3.5: Dos sistemas en los que las fuerzas actuantes tienen resultante y momento nulos, y sin embargo no están en equilibrio.

Como ejemplos ilustrativos de esta afirmación basta considerar sistemas en los que pueda haber movimiento relativo entre sus partes, como se muestra en la figura 3.5.

Un método general para establecer el equilibrio es subdividir el sistema global en subsistemas, de forma que al aplicar las ecuaciones (3.23) y (3.24) a cada subsistema resulten condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio del mismo. Adelantaremos que para el caso de los sólidos rígidos estas ecuaciones sí son suficientes para garantizar el equilibrio, lo que se demostrará en el apartado 3.6; por tanto buscaremos una subdivisión en subsistemas rígidos, sin movimiento relativo interno. Lógicamente, al partir un sistema en varios subsistemas las fuerzas ejercidas entre unos y otros, que antes eran internas y no aparecían en las ecuaciones, pasan a ser externas y aumentan por tanto el número de incógnitas. Sin embargo también aumenta el número de ecuaciones (6 por cada subsistema nuevo), de forma que se obtiene finalmente igual número de ecuaciones que de incógnitas.

### 3.5.2. Principio de los trabajos virtuales

Este principio fue enunciado en el apartado 1.5.1 como un principio básico de la mecánica, equivalente a las leyes o principios de Newton-Euler. Sus características esenciales que nos serán de utilidad son dos: por una parte, establece una *condición global* para el equilibrio de un sistema; por otra, *permite eliminar todas las fuerzas de reacción correspondientes a enlaces lisos*, reacciones que por lo general son desconocidas a priori.

Recordemos aquí simplemente el enunciado expuesto en 1.5.1. Se llaman desplazamientos virtuales  $\{\delta \mathbf{r}_i\}$  a cualquier conjunto de desplazamientos infinitesimales (tan pequeños como se desee) tomados en un instante dado. En general, no es necesario que los desplazamientos virtuales respeten los vínculos; sin embargo nos interesa restringir éstos a los denominados desplazamientos virtuales compatibles, que sí respetan los vínculos lisos.

Se considera un sistema sometido a fuerzas activas  $\{\mathbf{f}_i\}$  y reacciones de enlaces lisos  $\{\mathbf{R}_i\}$ . El trabajo virtual desarrollado por estas reacciones es nulo para  $\{\delta \mathbf{r}_i\}$  compatibles. Por tanto, la condición necesaria y suficiente para el equilibrio es que el trabajo virtual de las fuerzas aplicadas sea nulo, para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces:

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad \forall \{\delta \mathbf{r}_i\} \text{ compatibles}$$

En el caso en que existan enlaces no lisos, el principio se aplica igualmente pero considerando las fuerzas de rozamiento (que sí realizan trabajo virtual) como fuerzas activas. lo mismo habremos de hacer si existe alguna reacción de un enlace, liso o no, cuyo valor deseemos calcular. Esto último será necesario realizarlo en cualquier caso si los enlaces son unilaterales, con objeto de comprobar a posteriori el signo de la reacción obtenida, para ver si es compatible con la inecuación del enlace.

Como ejemplo de aplicación, consideremos el sistema del muelle de la figura 3.5. Llamaremos  $x$  a la elongación del resorte medida desde la posición natural del mismo, y sea su constante  $K$ . Tomaremos el desplazamiento virtual  $\delta x$ , obteniendo el trabajo virtual como

$$\delta W = F\delta x - Kx \delta x = 0$$

donde  $Kx$  es la fuerza interna debida al resorte, que actúa en sentido contrario a  $x$ . Al ser  $\delta x$  arbitrario, se llega inmediatamente a la condición de equilibrio

$$F = Kx$$

Como segundo ejemplo consideremos la aplicación del principio para calcular el valor de una reacción de apoyo. Sea la viga biapoyada de la figura 3.6, de longitud total  $l$ , en la que se desea calcular el valor de la reacción vertical en  $A$ ,  $R_A$ .

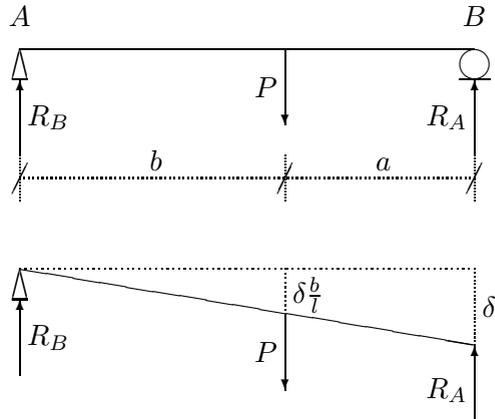


Figura 3.6: Para calcular la reacción en  $A$  “liberamos” la coacción correspondiente para calcular el trabajo virtual considerando  $R_A$  como fuerza activa

Para ello “liberamos” el apoyo en cuestión y lo sustituimos por una fuerza incógnita  $R_A$ . Los desplazamientos virtuales compatibles son los debidos al giro respecto del apoyo  $B$ , que viene caracterizado por el descenso  $\delta$  en  $A$ . Expresando la nulidad del trabajo virtual:

$$\delta W = P \left( \frac{b}{l} \delta \right) - R_A(\delta) = 0$$

al ser  $\delta$  un valor arbitrario, se elimina para obtener

$$R_A = P \frac{b}{l}$$

Análogamente obtendríamos la reacción en el otro apoyo,  $R_B = P \frac{a}{l}$ .

### 3.6. Equilibrio del sólido rígido

#### 3.6.1. Aplicación del principio de los trabajos virtuales

Es posible obtener las condiciones generales de equilibrio del sólido rígido en un caso general aplicando el Principio de los trabajos virtuales. Tomaremos para ello desplazamientos virtuales compatibles con la condición de indeformabilidad del sólido. Éstos han de cumplir una relación similar a la (1.27) que define el campo de velocidades del sólido:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}_i$$

Las magnitudes  $\mathbf{v}_i$  pueden ser consideradas como “velocidades virtuales” compatibles. Análogamente, los desplazamientos virtuales compatibles son:

$$\delta \mathbf{r}_i = \delta \mathbf{r}_O + \delta \boldsymbol{\varphi} \wedge \mathbf{r}_i$$

para valores arbitrarios pequeños de  $\delta \mathbf{r}_O$  y  $\delta \boldsymbol{\varphi}$ .

Expresamos ahora el trabajo virtual:

$$\delta W = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_O + \sum_i (\delta \boldsymbol{\varphi} \wedge \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{F}_i$$

denominando

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \\ \mathbf{M}_O &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{\text{ext}}, \end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \delta W &= \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}_O + \delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i \\ &= \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}_O + \mathbf{M}_O \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \end{aligned}$$

Puesto que  $\delta \mathbf{r}_O$  y  $\delta \boldsymbol{\varphi}$  pueden tomar valores arbitrarios, se deduce inmediatamente que las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio son  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ , que coinciden precisamente con las ecuaciones cardinales de la estática, (3.23) y (3.24). Al contrario de la observación realizada entonces para un sistema general, en este caso particular (sólido rígido) hemos concluido, gracias al principio de los trabajos virtuales, que las ecuaciones no son sólo necesarias sino también suficientes. Resumiendo, podemos afirmar:

*En un sólido rígido la condición necesaria y suficiente para el equilibrio es que el Sistema de Vectores Deslizantes formado por las fuerzas externas sobre el sólido sea un sistema nulo:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

Podríamos haber alcanzado esta misma conclusión mediante la particularización de las ecuaciones de la dinámica del sólido, (9.1) y (9.2) ó (9.3),

para las condiciones de la estática. En efecto, en el equilibrio es  $\mathbf{a}_G = \mathbf{0}$ , y  $\mathbf{H}_G = \mathbf{H}_O = \mathbf{0}$  (constantes), por lo que se deducen de las citadas ecuaciones  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$  como condiciones necesarias y suficientes.

Del resultado anterior se pueden deducir diversos corolarios de interés práctico:

**COROLARIO 1.-** Si sobre un sólido actúa un sistema de fuerzas, éste puede ser sustituido por otro sistema de vectores deslizantes equivalente (es decir, con igual resultante y momento en cualquier punto, lo que se denomina también *equipolente*), sin alterar las condiciones de equilibrio.

En efecto, la diferencia entre los dos sistemas sería un sistema nulo, que como hemos visto no altera el equilibrio.

**COROLARIO 2.-** Si sobre un sólido actúan dos fuerzas, estará en equilibrio si y sólo si ambas siguen la misma recta de acción, con el mismo módulo y sentidos opuestos.

En efecto, es la única forma de que las dos fuerzas constituyan un sistema nulo.

**COROLARIO 3.-** Si sobre un sólido actúan tres fuerzas, para que haya equilibrio éstas deben ser coplanarias y cortarse en un mismo punto.

La justificación es evidente, ya que de otra forma es imposible que el sistema resultante sea nulo.

En el caso en que el sólido tenga el movimiento restringido por enlaces o ligaduras, vale la pena distinguir varios casos:

**Sólido libre:** Los valores de los desplazamientos virtuales  $\delta \mathbf{r}_O$  y  $\delta \varphi$  son independientes; por tanto para el equilibrio han de ser nulas tanto la resultante como el momento de las fuerzas aplicadas

$$\mathbf{F} = \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$$

**Sólido con un punto fijo:** En este caso hay un punto  $O$  fijo por lo cual podemos tomar  $\delta \mathbf{r}_O = 0$ ; la nulidad del trabajo virtual no impone por tanto restricción alguna sobre  $\mathbf{F}$ , siendo la condición de equilibrio

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$$

**Sólido con eje fijo:** sea el eje fijo  $(O, \mathbf{e})$ ; los desplazamientos compatibles son por tanto  $\delta \mathbf{r}_O \parallel \mathbf{e}$ ,  $\delta \varphi \parallel \mathbf{e}$ , por lo que se obtienen las condiciones de equilibrio

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{e} = 0$$

es decir, las proyecciones de  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{M}$  sobre  $\mathbf{e}$  deben anularse para el equilibrio.

### 3.6.2. Sistemas isostáticos e hiperestáticos

En la estática el objetivo suele ser determinar en primer lugar las configuraciones o cargas exteriores para el equilibrio, para a continuación calcular las reacciones en los enlaces o apoyos.

Los casos particulares comentados en el apartado anterior corresponden a sustentaciones que dejan al sistema con algún grado de libertad. Al permitir el movimiento, se necesita para el equilibrio que una o más componentes de las fuerzas o momentos sea nulo.

Si se aumenta el número de coacciones del sólido, se llega a un punto en que no se permite ningún grado de libertad de movimiento: el sistema estará entonces en equilibrio para cualquier conjunto de cargas exteriores (siempre que no se supere la resistencia de rotura de los enlaces). Es el caso, por ejemplo, de un sólido con un eje fijo por un cojinete cilíndrico, restringiendo además el movimiento de traslación en la dirección del eje y el de rotación alrededor del mismo. Las reacciones tendrían 6 componentes, que se determinarían mediante las 6 ecuaciones cardinales de la estática (3.23) y (3.24).

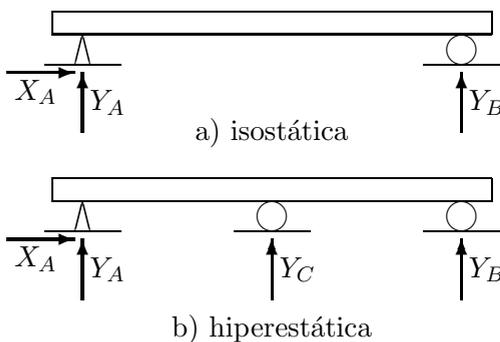


Figura 3.7: *Sustentaciones isostática e hiperestática de una viga: en el segundo caso las ecuaciones de la estática no son suficientes para calcular las reacciones en los apoyos; se dice que existen reacciones “redundantes”.*

Para fijar ideas consideremos un sistema plano, formado por una viga recta biapoyada, en el que uno de los apoyos es una articulación y el otro un apoyo simple que permite el desplazamiento horizontal (figura 3.7<sub>a</sub>)

En este caso las tres ecuaciones de la estática ( $M = 0$ ;  $F_x = 0$ ;  $F_y = 0$ ) permiten calcular las tres reacciones incógnitas,  $X_A$ ,  $Y_A$  e  $Y_B$ , para cualquier conjunto de cargas exteriores. Decimos que la sustentación es *isostática*, ya que el número de incógnitas a determinar, provenientes de las reacciones de enlace, es igual al número de ecuaciones de la estática.

Imaginemos ahora que a la misma viga se le coloca otro apoyo  $C$  intermedio,

que restrinja tan sólo el movimiento vertical en ese punto. Para un conjunto dado de cargas exteriores tenemos ahora 4 reacciones incógnitas ( $X_A, Y_A, Y_B, Y_C$ ) y tan sólo 3 ecuaciones de la estática. Se dice que el sistema es *estáticamente indeterminado o hiperestático*, debido a que posee apoyos redundantes, que “sobran” para garantizar el equilibrio.

Desde el punto de vista de la estática de sistemas rígidos no existe ningún truco ni procedimiento que permita resolver este problema. Está correctamente planteado, ocurriendo que *no tiene solución mediante el sólo empleo de las ecuaciones globales de equilibrio*. Es pues necesario obtener ecuaciones adicionales que proporcionen alguna relación más entre las incógnitas. Estas ecuaciones se obtienen a través de considerar la deformabilidad de la estructura (aplicando las técnicas que se estudian en la resistencia de materiales o en el cálculo de estructuras). A partir del estudio de la deformabilidad de los sólidos y las estructuras, así como de las ecuaciones de comportamiento de las mismas que ligan las deformaciones internas con las tensiones, se obtienen las ecuaciones adicionales necesarias. El estudio de estos aspectos se halla fuera del alcance de este curso.



# Oscilaciones lineales con 1 grado de libertad

## Índice

---

<b>4.1. El oscilador armónico simple</b> . . . . .	<b>134</b>
4.1.1. Ecuación del movimiento . . . . .	134
4.1.2. Energía . . . . .	135
4.1.3. Integración de la ecuación . . . . .	136
<b>4.2. Oscilaciones con amortiguamiento</b> . . . . .	<b>139</b>
4.2.1. Ecuación del movimiento . . . . .	139
4.2.2. Integración de la ecuación . . . . .	140
<b>4.3. Oscilaciones forzadas</b> . . . . .	<b>146</b>
4.3.1. Ecuación del movimiento . . . . .	146
4.3.2. Integración de la ecuación . . . . .	146
<b>4.4. Amplificación dinámica y resonancia</b> . . . . .	<b>151</b>

---

Es muy común que un sistema mecánico (sea una estructura o un mecanismo) permanezca en una posición de equilibrio estable, pudiendo realizar sin embargo pequeños movimientos u oscilaciones alrededor de esa posición. Un ejemplo sería un puente, que admite pequeños movimientos debidos al tráfico sobre el mismo. Una variante sería un sistema cuyo movimiento sea una trayectoria determinada, admitiendo pequeñas oscilaciones o variaciones acotadas respecto de la misma. Ejemplo de este caso sería el movimiento de un satélite en órbita.

Los efectos sobre un sistema debido a cargas dinámicas pueden superar notablemente los de las mismas cargas en condiciones estáticas, es decir, aplicadas de forma suficientemente lenta. Los diseños de ingeniería cada vez requieren más garantizar una adecuada respuesta dinámica. Esto puede deberse tanto a que las cargas realmente se apliquen de forma muy rápida, como al hecho de asignar una mayor importancia a aspectos como el mantenimiento de la funcionalidad, la resistencia, y el confort ante las vibraciones. Estas condiciones de diseño a menudo se añaden a las puramente estáticas, de estabilidad y resistencia en la posición de equilibrio.

En la mayoría de los casos prácticos, estas pequeñas oscilaciones se pueden considerar como «lineales» (más adelante se precisa el significado de este término) pudiéndose analizar mediante la teoría que se expone en este capítulo y en el capítulo 5 para sistemas con varios grados de libertad.

Comenzamos aquí por los casos más simples de oscilaciones, los sistemas con un grado de libertad. Aunque en la realidad casi todos los casos tienen varios grados de libertad, en numerosas situaciones existe un grado de libertad predominante, pudiéndose desprestigiar los otros «modos de vibración» en una primera aproximación. Será válido en estos casos el estudio como sistema de un grado de libertad. En cualquier caso, los modelos con un grado de libertad serán la base para el estudio de las oscilaciones con varios grados de libertad que se tratan más adelante (capítulo 5).

## 4.1. El oscilador armónico simple

### 4.1.1. Ecuación del movimiento

Sea una masa puntual,  $m$ , obligada a moverse según una recta fija, sujeta a un punto dado de la misma por medio de un resorte elástico (es decir, un muelle que ejerce una fuerza proporcional a su elongación), de constante  $k$ , sin que existan otras fuerzas aplicadas. Si se denomina  $x$  la coordenada de  $m$  a lo largo de la recta, el resorte elástico ejerce una fuerza recuperadora, que se opone a la elongación, de valor

$$F = -k(x - x_0),$$

siendo  $x_0$  la que se denomina *longitud natural* del resorte, para la cual éste quedaría sin tensión. El signo ha de ser negativo puesto que la fuerza del resorte tiene sentido contrario a la elongación, es decir, es una resistencia interna que se opone a ella.

Decimos que se trata de un resorte lineal, porque la fuerza desarrollada en el mismo depende linealmente de la elongación: a doble elongación, doble

fuerza, y a elongación mitad, la fuerza se divide por dos.

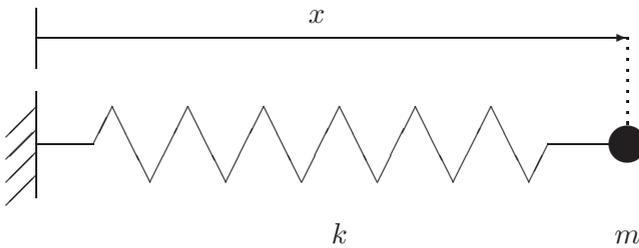


Figura 4.1: *Oscilador armónico simple*

Como podemos elegir el origen de coordenadas donde nos plazca, lo haremos en el punto  $x_0$ , de forma que la expresión de la fuerza del muelle sea

$$F = -kx.$$

Aplicando el principio de la cantidad de movimiento (1.2), obtenemos la ecuación dinámica de este sistema:

$$m\ddot{x} = -kx \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{x} + kx = 0} \quad (4.1)$$

Se trata de una ecuación diferencial ordinaria con las siguientes características:

- de *segundo orden*, ya que intervienen derivadas segundas;
- *lineal*, ya que así es la dependencia en relación con la variable  $x$  y sus derivadas;
- de *coeficientes constantes*, pues supondremos fijos  $m$  (masa del sistema) y  $k$  (rigidez del resorte);
- *homogénea*, pues la ecuación está igualada a cero, sin término independiente a la derecha del signo igual.

#### 4.1.2. Energía

Antes de proceder a integrar la ecuación, conviene analizar la energía asociada al resorte. La fuerza del muelle es conservativa, asociada a un potencial  $V(x)$ . Éste se calcula inmediatamente integrando el trabajo realizado por aquélla entre la posición natural y una posición genérica:

$$V = - \int_0^x F \, dx = - \int_0^x (-kx) \, dx = \frac{1}{2}kx^2.$$

Al ser la fuerza conservativa, la energía total se conserva, siendo su valor en un instante genérico

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2. \quad (\text{cte.}) \quad (4.2)$$

Si el movimiento es oscilatorio y acotado, la elongación  $x(t)$  tendrá máximos en los que la derivada es nula ( $\dot{x} = 0$ ). Particularizando para uno de estos instantes, podemos escribir la ecuación (4.2) en función de una nueva constante  $A$  cuya interpretación es la elongación máxima:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2. \quad (4.3)$$

Físicamente, podemos interpretar la ecuación anterior observando que en los puntos de elongación máxima toda la energía es potencial ( $V_{\max} = \frac{1}{2}kA^2$ ), mientras que en los puntos de elongación nula toda la energía es cinética ( $T_{\max} = \frac{1}{2}kA^2$ ). A lo largo del movimiento, la energía total se conserva, oscilando entre estas dos formas.

### 4.1.3. Integración de la ecuación

El objetivo es resolver la ecuación (4.1), integrándola para obtener el movimiento  $x(t)$ . No se pretende aquí explicar con carácter general los procedimientos de integración de ecuaciones diferenciales con una variable, por lo que nos ceñiremos a los detalles de la solución de ecuaciones del tipo de (4.1), que por otra parte reviste considerable importancia en la física y en la mecánica.

La forma más sencilla es partir de la ecuación (4.3), despejando en ella y separando variables:

$$\dot{x}^2 = \frac{k}{m}(A^2 - x^2) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{k}{m}} dt = \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}}.$$

La integración se puede hacer para cada miembro de esta ecuación de forma independiente, resultando

$$\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi = \text{arc sen } \frac{x}{A},$$

donde  $\varphi$  es una constante de integración. Definimos ahora un nuevo parámetro  $\omega_0$  como

$$\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (4.4)$$

con lo cual despejando el valor de  $x$  resulta la ecuación del movimiento buscada:

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi). \tag{4.5}$$

Esta ecuación define un movimiento armónico (es decir, sinusoidal). Se trata de un movimiento periódico, puesto que se repite idénticamente cada cierto intervalo de tiempo  $T$  denominado periodo, de manera indefinida. En este caso el periodo es  $T = 2\pi/\omega_0$ .

El parámetro  $\omega_0$  recibe el nombre de *pulsación* o *frecuencia angular natural* del sistema; representa la frecuencia angular con la que éste oscila cuando se le separa de su posición de equilibrio y se le libera para que se mueva libremente<sup>1</sup>. La constante  $A$  es la *amplitud* de la oscilación (módulo de la elongación máxima) y por último  $\varphi$  es el *ángulo de fase*, ya que indica la fase de la senoide en que se sitúa el origen de tiempo.

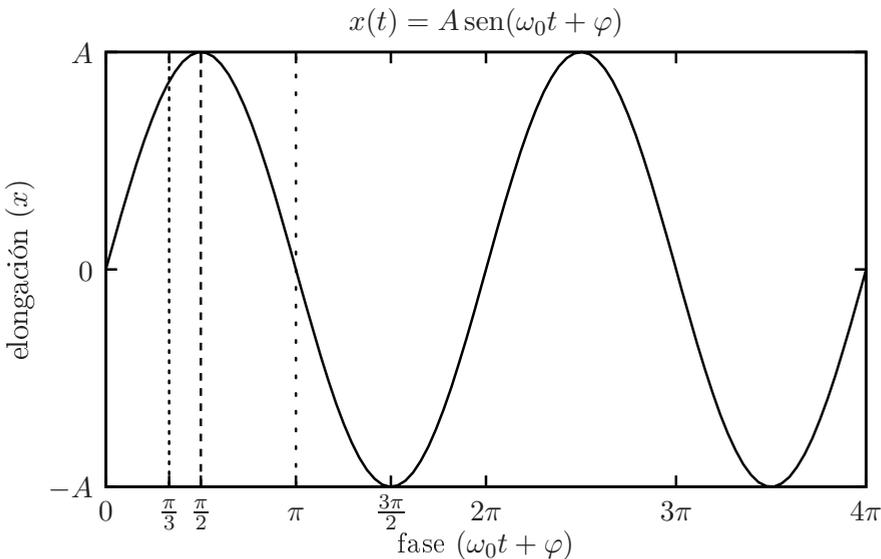


Figura 4.2: *Oscilación armónica, abarcando dos periodos completos del movimiento. Un ángulo de fase  $\varphi \neq 0$  equivale simplemente a una traslación del origen de tiempos.*

La frecuencia angular o pulsación se mide en radianes/segundo. La frecuencia circular  $f$  —o frecuencia propiamente dicha—, indica el número de ciclos o

<sup>1</sup>En contra de lo que pudiera parecer, la notación  $\omega_0$  no indica «valor inicial de  $\omega$ », tratándose de un valor característico del sistema que se mantiene *constante*. El subíndice en  $\omega_0$  se refiere a que el sistema no tiene amortiguamiento, en comparación con la frecuencia característica  $\omega$  que obtendremos para los sistemas con amortiguamiento, ver ecuación (4.11).

revoluciones por unidad de tiempo, y se expresa mediante Hercios o ciclos por segundo (Hz). La relación entre ambas medidas de la frecuencia es por tanto  $f = \omega/2\pi$ . También es posible expresar la frecuencia en otras unidades como revoluciones por minuto (rpm).

Es inmediato observar de (4.5), que cuanto más rígido sea el muelle (mayor  $k$ ) o más ligera la masa (menor  $m$ ), mayor será la frecuencia natural de oscilación  $\omega_0$ . Por el contrario, sistemas más flexibles ( $k$  pequeño) y más masivos ( $m$  grande) tendrán frecuencias naturales bajas.

Si el valor de la constante  $k$  fuese negativo, esto correspondería a una repulsión del resorte, y no sería posible la solución anterior al no poderse obtener  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . Físicamente, este caso no correspondería a un movimiento de oscilación, ya que la partícula tendería a alejarse cada vez más del origen, sin estar su movimiento acotado. Por tanto, para que el sistema tenga un movimiento oscilatorio acotado ha de poseer una rigidez  $k$  positiva, correspondiente a una atracción hacia la posición de equilibrio estable.

Los dos parámetros  $A$  y  $\varphi$  quedan indeterminados en (4.5), siendo necesario calcularlos a partir de las dos condiciones iniciales (posición y velocidad iniciales). Por ejemplo, para una vibración que parte desde una elongación inicial  $a$  en reposo,

$$x_0 = a; \quad \dot{x}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad A = a, \quad \varphi = \pi/2.$$

Para unas condiciones iniciales cualesquiera  $x_0$  y  $v_0$ , particularizando (4.5) se halla

$$x_0 = A \operatorname{sen} \varphi; \quad v_0 = A\omega_0 \cos \varphi,$$

$$A = \frac{x_0}{\operatorname{sen} \varphi}; \quad \varphi = \tan^{-1} \left( \frac{\omega_0 x_0}{v_0} \right).$$

Como comprobación, podemos evaluar la energía asociada al movimiento definido por (4.5). En un instante genérico, la velocidad es

$$\dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

por lo que

$$T + V = \frac{1}{2} \underbrace{m\omega_0^2}_{=k} A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} k A^2 \operatorname{sen}^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} k A^2.$$

Como era de esperar se obtiene el mismo valor que en (4.3).

## 4.2. Oscilaciones con amortiguamiento

### 4.2.1. Ecuación del movimiento

Un amortiguador viscoso ejerce una fuerza de resistencia pasiva proporcional a la velocidad,  $F_A = -c\dot{x}$ , de sentido contrario a ella. Este modelo

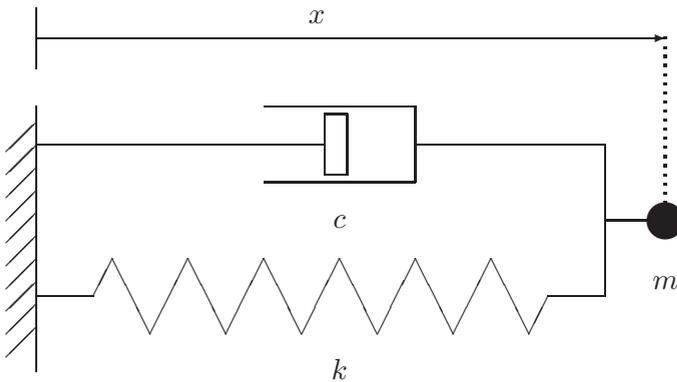


Figura 4.3: Oscilador con amortiguamiento viscoso

corresponde aproximadamente a la resistencia desarrollada por un émbolo en un pistón lleno de líquido, al fluir por el hueco libre entre pistón y émbolo. Se trata de una fuerza necesariamente *no conservativa*. Es fácil comprobarlo, ya que en cualquier trayectoria cerrada (origen y final en el mismo punto), el trabajo realizado por la fuerza de amortiguamiento es esencialmente negativo:

$$W_A = \oint \left(-c \frac{dx}{dt}\right) dx = \oint (-c\dot{x}^2) dt < 0.$$

Aunque este modelo no representa de forma exacta la mayoría de las resistencias pasivas reales, resulta sencillo y suficientemente aproximado para una gran cantidad de casos prácticos, permitiendo considerar las inevitables resistencias del medio en que se produce la vibración.

Considerando la fuerza del amortiguador, y tomando el origen de coordenadas en la posición natural del resorte, la fuerza total sobre  $m$  es ahora

$$F = -c\dot{x} - kx,$$

resultando la ecuación:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0. \quad (4.6)$$

Esta sigue siendo una ecuación diferencial de segundo orden, lineal, de coeficientes constantes y homogénea.

### 4.2.2. Integración de la ecuación

La solución de la ecuación (4.6) es del mismo tipo que en el caso anterior sin amortiguamiento (4.1), es decir, basada en funciones armónicas. Tan sólo será necesario aquí generalizar algo la expresión de las soluciones ensayadas, para lo cual emplearemos una exponencial del tipo  $x(t) = ae^{rt}$ , basándonos en la generalización de las funciones armónicas mediante la notación de Euler de la exponencial imaginaria<sup>2</sup>. En principio, permitiremos que tanto  $a \in \mathbb{C}$  como  $r \in \mathbb{C}$  sean números complejos, aunque por motivos físicos deberemos exigir al final que el resultado  $x(t)$  sea real.

Derivando y sustituyendo en la ecuación (4.6), resulta

$$(mr^2 + cr + k)e^{rt} = 0 \quad \Rightarrow \quad mr^2 + cr + k = 0. \quad (4.7)$$

Esta expresión se denomina «ecuación característica,» proporcionando los valores que debe tomar  $r$  para que exista la solución buscada:

$$r = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}. \quad (4.8)$$

Según el valor del discriminante ( $c^2 - 4km$ ) en la expresión general anterior, pueden distinguirse varios tipos de solución:

a)  $c^2 - 4km > 0$ .- En este caso existen dos raíces reales para  $r$  en (4.7):

$$r_1 = -p, \quad r_2 = -q.$$

Sabemos que necesariamente ambas han de ser negativas, ya que empleando la expresión (4.8) se comprueba que  $r_1 + r_2 < 0$  y  $r_1 \cdot r_2 > 0$ . Mediante la linealidad de la ecuación diferencial se demuestra que, si existen varias soluciones, cualquier combinación lineal de ellas es también solución de la ecuación (propiedad de comprobación inmediata). Por tanto, la solución general será:

$$x(t) = a_1 e^{-pt} + a_2 e^{-qt}.$$

En definitiva, se trata de una solución exponencial decreciente, que no ocasiona movimiento oscilatorio, debido a que el amortiguamiento  $c$  es excesivamente grande (amortiguamiento *super crítico*). En la figura 4.4 se muestra el movimiento que se obtiene para un sistema de este tipo, en varios casos con distintas condiciones iniciales.

<sup>2</sup>Empleando la notación de Euler,  $e^{\theta i} = \cos \theta + i \sin \theta$ , siendo  $i = \sqrt{-1}$ . Para  $\mathbb{C} \ni r = p + \theta i$  es  $e^r = e^p e^{\theta i} = e^p (\cos \theta + i \sin \theta)$ .

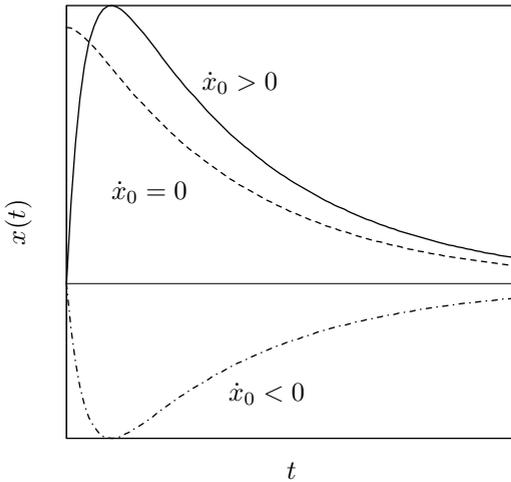


Figura 4.4: *Movimiento de un sistema definido por la ecuación  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ , con amortiguamiento supercrítico ( $c > 2\sqrt{km}$ ), bajo distintas condiciones iniciales; Caso I)  $\dot{x}_0 > 0$ , Caso II)  $\dot{x}_0 = 0$ , Caso III)  $\dot{x}_0 < 0$ .*

**b)  $c^2 - 4km = 0$ .**- Se trata del caso límite, en el que el amortiguamiento posee el valor crítico  $c_{\text{crit}} = 2\sqrt{km}$ . Existe una raíz real doble en (4.7), negativa al igual que antes:

$$r = -\frac{c}{2m} = -p,$$

correspondiendo a la solución  $x(t) = ae^{-pt}$ . Se puede comprobar que  $x = bte^{-pt}$  también es solución, por lo que la solución general será una combinación de estas dos:

$$x = (a + bt)e^{-pt}.$$

Comprobamos por tanto que en este caso tampoco se produce un movimiento de tipo oscilatorio.

**c)  $c^2 - 4km < 0$ .**- Se obtienen en este caso dos raíces complejas conjugadas para (4.7),

$$r_1 = -p + \omega i, \quad r_2 = -p - \omega i,$$

siendo

$$p = \frac{c}{2m}, \quad \omega = \sqrt{-\frac{c^2}{4m^2} + \frac{k}{m}}.$$

La parte real de la solución es negativa, dando lugar a una exponencial decreciente, que multiplica a una función armónica:

$$\begin{aligned} x &= a_1 e^{(-p+i\omega)t} + a_2 e^{(-p-i\omega)t} \\ &= e^{-pt} (a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{-i\omega t}) \\ &= e^{-pt} [(a_1 + a_2) \cos \omega t + i(a_1 - a_2) \text{sen } \omega t] \end{aligned}$$

Aunque en un caso general esta expresión pueda tener componente imaginaria, por motivos físicos sabemos que  $x$  debe ser real. Esto obliga a que las constantes complejas  $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$  den lugar a unas nuevas constantes reales  $A, B \in \mathbb{R}$ :

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = (B - iA)/2 \\ a_2 = (B + iA)/2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} B = a_1 + a_2 \\ A = i(a_1 - a_2) \end{array} \right\}$$

resultando

$$x = e^{-pt}(A \operatorname{sen} \omega t + B \operatorname{cos} \omega t). \quad (4.9)$$

Otra forma equivalente de expresar esta solución es mediante el cambio de las constantes  $(A, B)$  a otras  $(a, \varphi)$  definidas por:

$$A = a \operatorname{cos} \varphi; \quad B = a \operatorname{sen} \varphi,$$

resultando la expresión

$$\boxed{x = ae^{-pt} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)}. \quad (4.10)$$

Este último caso de amortiguamiento subcrítico ( $c < c_{\text{crit}}$ ) es el que más nos interesa, ya que es el único en que se produce un movimiento oscilatorio, de vibraciones alrededor de la posición de equilibrio. La expresión (4.10) representa un movimiento oscilatorio amortiguado de amplitud decreciente ( $ae^{-pt}$ ), al estar modulado por una exponencial negativa. Aunque el movimiento es oscilatorio, no sería correcto en rigor llamarlo periódico, ya que cada oscilación es distinta, al disminuir la amplitud. Se define como amplitud (de forma más rigurosa, «pseudo-amplitud») del movimiento al valor  $ae^{-pt}$ , que tiende a 0 para  $t \rightarrow \infty$ . El movimiento desaparece en la práctica para un tiempo suficientemente grande. Es fácil comprobar que el intervalo entre máximos, al igual que entre pasos por cero, es constante e igual a  $T = 2\pi/\omega$  (periodo de la oscilación). Por tanto, a  $\omega$  se le llama frecuencia angular natural del sistema amortiguado (con mayor rigor formal «pseudo-frecuencia»).

El parámetro  $a$  representa la amplitud inicial y  $\varphi$  el ángulo de fase. Estas dos constantes (o alternativamente las  $A$  y  $B$  si se opta por la otra representación de la solución, definida mediante (4.9)) se calculan a partir de las condiciones iniciales  $(x_0, \dot{x}_0)$ .

En resumen, en función de los parámetros del problema, la solución quedará expresada como:

$$\boxed{x = ae^{-\frac{c}{2m}t} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi), \quad \text{con } \omega \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}}. \quad (4.11)$$

A menudo es útil emplear una notación alternativa para estas expresiones, en función de la frecuencia natural sin amortiguamiento  $\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{k/m}$  (ecuación (4.5)), y la denominada *tasa de amortiguamiento crítico*  $\xi$ , definida como la razón entre el amortiguamiento  $c$  y el valor crítico del mismo  $c_{\text{crit}}$ ,

$$\xi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{c_{\text{crit}}} = \frac{c}{2m\omega_0}.$$

El significado de  $\omega_0$  ya se discutió antes. En cuanto a  $\xi$ , se trata de un valor adimensional, que para los sistemas oscilatorios (amortiguamiento subcrítico) se halla entre 0 y 1. En el caso en que fuese  $\xi \geq 1$  el amortiguamiento sería crítico o supercrítico y no se producirían oscilaciones. Para vibraciones estructurales, los valores usuales de  $\xi$  son pequeños: en una estructura real puede ser del orden de  $\xi = 0,02 = 2\%$  o menor<sup>3</sup>.

En función de estos parámetros, la ecuación diferencial (4.6) se puede escribir

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0, \quad (4.12)$$

mientras que la solución (4.11) se expresa como

$$x = ae^{-\xi\omega_0 t} \text{sen}(\omega t + \varphi), \quad \text{con } \omega \stackrel{\text{def}}{=} \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}. \quad (4.13)$$

Se observa inmediatamente que la pseudo-frecuencia  $\omega$  de este movimiento es menor que en el caso sin amortiguamiento ( $\omega_0$ ), debido al factor  $\sqrt{1 - \xi^2} < 1$ . Sin embargo, en la mayoría de los casos prácticos, al ser  $\xi$  pequeño, ambos valores resultan muy próximos ( $\omega \approx \omega_0$ ).

Una forma práctica eficaz de medir el amortiguamiento es observando la disminución de la amplitud de las vibraciones libres, en un determinado número de oscilaciones  $n$ . Aplicando la ecuación (4.13) el cociente entre los dos instantes será

$$\frac{ae^{-\xi\omega_0 t}}{ae^{-\xi\omega_0(t+nT)}} = e^{\xi\omega_0 nT}$$

tomando logaritmos y considerando  $T = 2\pi/(\omega_0\sqrt{1 - \xi^2})$  se obtiene el denominado *decremento logarítmico*, que representa la disminución de la amplitud entre dos máximos consecutivos:

$$\delta = 2\pi \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \approx 2\pi\xi \quad (\text{para } \xi \ll 1). \quad (4.14)$$

---

<sup>3</sup>Por ejemplo, en la nueva norma para acciones de cálculo de puentes de ferrocarril, en los que las acciones dinámicas cobran especial relevancia para trenes de alta velocidad, se proponen amortiguamientos de  $\xi = 0,5\%$  para puentes metálicos o mixtos, y  $\xi = 2,0\%$  para puentes de hormigón estructural

EJEMPLO 4.1: Una masa  $m$  de 400 kg puede deslizar sin rozamiento sobre un eje horizontal, unida mediante un resorte elástico de constante  $k = 10^5$  N/m a una base fija en el eje. Existe además un amortiguamiento viscoso, que reduce la amplitud de la oscilación a la centésima parte cada 10 s. Se pide:

- a. Valor de la constante  $c$  de amortiguamiento y de la tasa  $\xi$  respecto del crítico;
- b. Suponiendo que parte de  $x_0 = 0,05$  m medido desde la posición de equilibrio en reposo, obtener la ecuación del movimiento así como el valor numérico de la posición al cabo de 2 s;

*Solución.*

a.— El movimiento es un caso de vibraciones libres con amortiguamiento, dado por la ecuación (4.13):

$$x = ae^{-\xi\omega_0 t} \text{sen}(\omega t + \phi_0).$$

El valor de la frecuencia natural del sistema sin amortiguar es

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} = 15,811388 \text{ rad/s} = 2,51646 \text{ Hz.} \quad (4.15)$$

El decremento de la pseudo-amplitud permite calcular la razón de amortiguamiento:

$$ae^{-\xi\omega_0 \cdot 10} = \frac{a}{100} \Rightarrow \xi = \frac{\ln 100}{10\omega_0} = 0,029126 \approx 2,9 \%. \quad (4.16)$$

La constante de amortiguamiento vale  $c = 2\xi\omega_0 = 368,4136 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ . El decremento logarítmico vale

$$\delta = 2\pi \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = 0,1831.$$

(Se comprueba que la aproximación  $\delta = 2\pi\xi = 0,1830$  sólo difiere en el cuarto dígito.)

b.— Una vez calculados todos los parámetros, se pueden obtener las constantes a partir de las condiciones iniciales:

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = A \text{sen } \phi_0 \\ 0 = -A\xi\omega_0 \text{sen } \phi_0 + A\omega \cos \phi_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 0,05002122 \\ \phi_0 = 1,541667 = 0,490728\pi \end{array} \right.$$

La expresión numérica de la solución es por tanto

$$x(t) = 0,05002122 e^{(-,4605170 t)} \text{sen}(15,80468 t + 1,541667), \quad (4.17)$$

y la posición a los dos segundos  $x(2) = 0,01964561$  m. Los resultados se muestran de forma gráfica en la figura 4.5. □

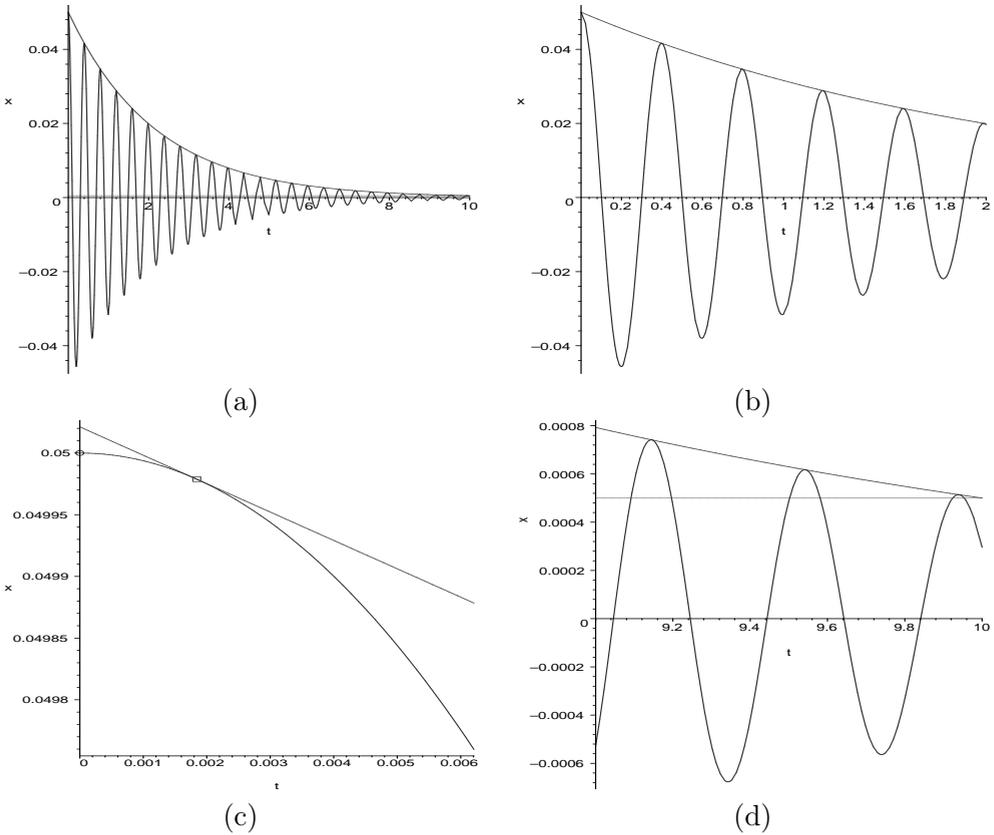


Figura 4.5: Resultados del ejemplo 4.1: (a) Gráfica para  $t \in [0, 10]$ ; (b) Detalle de la gráfica para  $t \in [0, 2]$ , en la que se aprecian mejor las oscilaciones amortiguadas; (c) Detalle del comienzo del movimiento (duración =  $1/64$  periodos) en el que se aprecia que en el instante inicial la curva no es tangente a la envolvente de pseudo-amplitud, junto con el punto de tangencia en que  $(\omega t + \phi_0) = \pi/2$ ; (d) Detalle de la fase final ( $t \in [9, 10]$ ) comprobando que se alcanza la centésima parte de la elongación inicial (recta horizontal).

### 4.3. Oscilaciones forzadas

#### 4.3.1. Ecuación del movimiento

En este caso consideramos que sobre la masa  $m$  actúa una fuerza externa  $f(t)$ , además de las fuerzas internas antes descritas correspondientes al muelle y al amortiguador (figura 4.6).

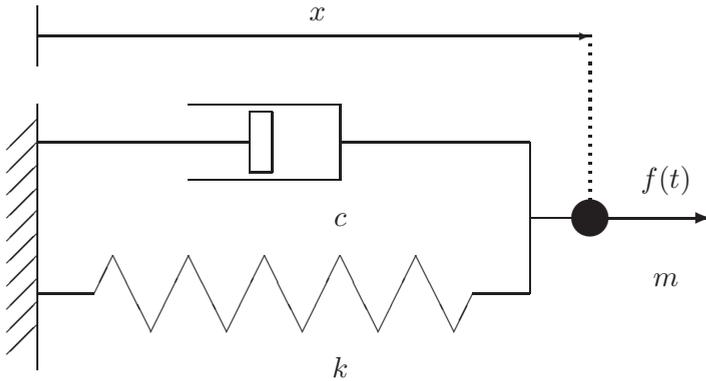


Figura 4.6: Oscilador simple con amortiguamiento sometido a fuerza externa.

La ecuación es ahora:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t). \quad (4.18)$$

Al incluir el término independiente  $f(t)$  la ecuación diferencial deja de ser homogénea. Esto da lugar a una estructura distinta para la solución, como se ve a continuación.

#### 4.3.2. Integración de la ecuación

Sean dos soluciones cualesquiera  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  de la ecuación completa (4.18):

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + kx_2 &= f(t), \\ m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 &= f(t); \end{aligned}$$

restando término a término se obtiene

$$m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) = 0.$$

Por tanto su diferencia,  $x_h(t) = x_2(t) - x_1(t)$ , es solución de la ecuación homogénea (4.6). Esto nos sirve para poder expresar la solución general de la

completa como una solución particular  $x_p(t)$  de la misma, que ya veremos cómo se puede hallar, más la solución general de la homogénea  $x_h(t)$  que ya sabemos calcular:

$$\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p(t)}. \quad (4.19)$$

El problema se limita pues a calcular una solución particular  $x_p(t)$  de (4.18). Cualquier procedimiento práctico que nos permita hallarla será válido. Como regla general, buscaremos una solución particular del mismo tipo que el término de fuerza  $f(t)$ . Veremos a continuación las soluciones particulares para algunos casos significativos.

**a) fuerza constante,  $f(t) = D$ .**— Este caso puede corresponder a una fuerza estática, si su aplicación ha sido lenta, o a una función escalón dinámica, en el caso en que la aplicación sea súbita. En cualquier caso, la solución particular es otra constante, de valor

$$x_p = \frac{D}{k}.$$

La comprobación es inmediata, al ser  $\dot{x}_p = \ddot{x}_p = 0$ .

Como ejemplos concretos de este caso se pueden citar el de un muelle en posición vertical sujeto a la gravedad, o la fuerza de rozamiento durante el intervalo en que no cambia de signo (supuesta la reacción normal constante).

Por otra parte, llamando  $x_0 = D/k$  (cte.), la adición de una solución  $x_p = x_0$  puede interpretarse también como una simple traslación del origen de coordenadas,  $x'(t) = x(t) - x_0 = x_h(t)$ . De esta forma el movimiento puede describirse como una oscilación libre alrededor de un nuevo origen de coordenadas, trasladado  $x_0$ .

Esta puede ser la interpretación, por ejemplo, de una masa  $m$  colgando de un resorte de constante  $k$  en dirección vertical, sometida a su propio peso ( $mg$ ). El movimiento puede interpretarse como una oscilación libre, alrededor de un punto de equilibrio situado la distancia  $mg/k$  por debajo del punto de longitud natural del muelle.

**b) fuerza lineal,  $f(t) = Et$ .**— Se trata de una fuerza que aumenta o disminuye linealmente con el tiempo. Tanteamos la solución  $x_p = mt + n$ , también lineal. Sustituyendo en (4.18) se obtienen los valores de  $m$  y  $n$ :

$$cm + k(mt + n) = Et \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m = E/k \\ n = -cE/k^2, \end{cases}$$

por lo que resulta

$$x_p = \frac{E}{k} \left( t - \frac{c}{k} \right).$$

Este caso sirve para definir un tramo en forma de rampa en una función de fuerza.

**c) fuerza armónica,  $f(t) = q \operatorname{sen} \Omega t$ .**- Este caso tiene especial importancia, ya que no sólo sirve para una fuerza armónica en sí misma, sino que servirá también como base para calcular la solución frente a una carga cualquiera, mediante el desarrollo en serie de Fourier<sup>4</sup>.

Tanteamos una solución que sea igualmente armónica, con la misma frecuencia que la excitación, pero admitiendo un posible desfase  $\delta$  respecto de la carga:

$$x_p(t) = A \operatorname{sen}(\Omega t + \delta).$$

Sustituyendo en (4.18):

$$(k - m\Omega^2) \operatorname{sen}(\Omega t + \delta) + c\Omega \cos(\Omega t + \delta) = \frac{q}{A} \operatorname{sen} \Omega t,$$

y particularizando para dos valores distintos de  $t$  se puede calcular  $A$  y  $\delta$ :

1. para  $t = 0$ ,

$$(k - m\Omega^2) \operatorname{sen} \delta + c\Omega \cos \delta = 0,$$

y despejando  $\delta$ ,

$$\tan \delta = -\frac{c\Omega}{k - m\Omega^2} = -\frac{2\xi\omega_0\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad (4.20)$$

2. para  $\Omega t + \delta = 0$ ,

$$\begin{aligned} c\Omega &= \frac{q}{A} \operatorname{sen}(-\delta) \\ A &= -\frac{q}{c\Omega} \operatorname{sen} \delta \end{aligned}$$

Para expresar  $A$  en función de los parámetros del problema, debemos obtener

---

<sup>4</sup>Consultar *Curso de Mecánica*, J.M. Goicolea (2010), apartado 3.7

en primer lugar la expresión de  $\text{sen } \delta$ :

$$\begin{aligned} \text{sen } \delta &= \frac{\tan \delta}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 \delta}} \\ &= \frac{-c\Omega}{\pm \sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}} \\ &= \frac{-2\xi\Omega\omega_0}{\pm \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2\omega_0^2}}, \end{aligned} \tag{4.21}$$

resultando finalmente las expresiones siguientes para  $A$ :

$$A = \frac{q}{\pm \sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}} = \frac{q/m}{\pm \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2\omega_0^2}}. \tag{4.22}$$

Debido a la indeterminación del signo de la raíz en las expresiones anteriores ((4.21) para  $\text{sen } \delta$  y (4.22) para  $A$ ), podría resultar un valor negativo para esta última constante. A veces es conveniente sin embargo tomar el signo de la raíz que hace  $A$  positivo, concordando con su interpretación física como amplitud. Esto obligaría a su vez a tomar el valor apropiado para  $\delta$ , de forma que  $\text{sen } \delta$  tenga el signo que le corresponde. Conviene observar que para cambiar de signo ( $\text{sen } \delta$ ) basta con tomar  $(\delta + \pi)$  en lugar de  $\delta$ , es decir, se trata de un simple cambio del origen de tiempo, lo que siempre es lícito.

Una vez conocidos  $A$  y  $\delta$  es posible escribir la solución general de la ecuación completa (4.18) que resulta:

$$\boxed{x(t) = \underbrace{ae^{-\xi\omega_0 t} \text{sen}(\omega t + \varphi)}_{\text{sol. gral. homogénea}} + \underbrace{A \text{sen}(\Omega t + \delta)}_{\text{sol. part. completa}}.} \tag{4.23}$$

En esta expresión quedan tan sólo por determinar los parámetros  $a$  y  $\varphi$ , que se obtendrán particularizando para las condiciones iniciales. Conviene subrayar que, aunque estos parámetros afectan sólo a la parte de la solución que proviene de la homogénea, es la solución completa (4.23) la que se debe particularizar. No debe cometerse el error de particularizar el sumando correspondiente a la solución homogénea, sino que debe ser la suma de ambas.

Por otra parte, es importante observar que la solución particular de la completa que hemos obtenido es *independiente de las condiciones iniciales*, al ser función únicamente de los parámetros  $A$  y  $\delta$ , definidos por las expresiones (4.21) y (4.22) en las que no influyen dichas condiciones iniciales.

**Régimen transitorio y permanente.-** En el caso en que exista amortiguamiento, la solución de la homogénea al cabo de cierto tiempo —cuánto

tiempo sea dependerá del amortiguamiento— desaparece. El intervalo durante el que no se puede despreciar el término correspondiente a la solución de la homogénea, siendo significativos ambos sumandos en (4.23), se llama *régimen transitorio*. El movimiento durante este régimen posee dos componentes armónicas de distinta frecuencia, la de la excitación ( $\Omega$ ) y la natural del sistema en vibración libre ( $\omega$ ).

El *régimen permanente* es el que se alcanza cuando el término correspondiente a la solución de la homogénea en (4.23) se amortigua hasta hacerse despreciable, quedando tan sólo la solución particular de la completa. Como se ha dicho antes, esta solución particular se puede escoger de forma que no dependa de las condiciones iniciales<sup>5</sup>. Por lo tanto, éstas sólo tendrán influencia durante el régimen transitorio. Dicho de otra manera, en un movimiento forzado y amortiguado, al cabo de un tiempo el movimiento es siempre el mismo independientemente de las condiciones iniciales.

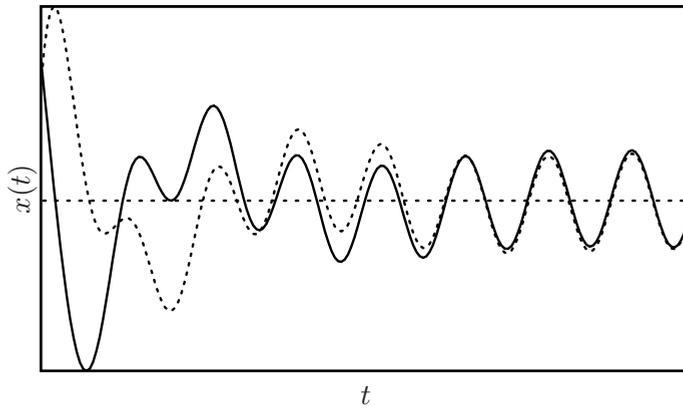


Figura 4.7: *Movimiento oscilatorio forzado, para dos condiciones iniciales distintas; al cabo de cierto tiempo, el régimen permanente es el mismo.*

Para una excitación periódica de tipo armónico, el régimen permanente tiene la misma frecuencia que la excitación, y un desfase  $\delta$  respecto a ella, dado por la expresión (4.21). De ésta se desprende que si no existe amortiguamiento, el desfase es también nulo. El desfase también depende de la relación entre  $\Omega$  y  $\omega_0$ , de forma que, por ejemplo, para  $\Omega = \omega_0$ , resulta  $\sin \delta = \pm 1$  y por tanto  $\delta = \pm \pi/2$ .

<sup>5</sup>La elección de solución particular no es única, siendo por tanto también posible escoger ésta de forma que una parte de ella sí dependa del estado inicial; sin embargo, en el límite cuando  $t \rightarrow \infty$ , esta parte de la solución particular también se verá reducida a cero.

## 4.4. Amplificación dinámica y resonancia

Una carga aplicada de forma dinámica puede producir un efecto considerablemente mayor que aplicada de forma estática, es decir, suficientemente lenta para que no se llegue a producir oscilación. Este efecto se denomina *amplificación dinámica*.

Un ejemplo sencillo es la aplicación de una carga constante  $P_0$ , sobre un sistema formado por una masa  $m$  y un resorte  $k$ , sin amortiguamiento. Si se aplica de forma estática (mediante una rampa suficientemente lenta), el desplazamiento sería  $x_{\text{est}} = P_0/k$ .

Si se aplica de forma súbita, como un escalón de carga, suponiendo que inicialmente el resorte está en su posición natural y sin velocidad, la respuesta es

$$x_{\text{din}}(t) = \frac{P_0}{k} - \frac{P_0}{k} \cos(\omega_0 t).$$

El desplazamiento máximo se produce para  $\omega_0 t = \pi$  y vale  $x_{\text{din,max}} = 2P_0/k$ . Por tanto, la amplificación dinámica de la carga es

$$\text{f.ampl.} = \frac{x_{\text{din,max}}}{x_{\text{est}}} = 2,$$

es decir, el efecto dinámico es el doble del estático.

Supongamos ahora que se aplica la misma carga, pero modulada por una función armónica,  $P_0 \sin(\Omega t)$ . Supondremos que existe un pequeño amortiguamiento inevitable, por lo que el movimiento llega a un régimen permanente, pero que sin embargo se puede despreciar su efecto en la ecuación de dicho régimen, al ser su valor muy pequeño. Decimos, abusando de la expresión, que es un caso «sin amortiguamiento,» aunque queda claro implícitamente que algún amortiguamiento, por pequeño que sea, ha debido existir para que desaparezcan los términos transitorios. En el régimen permanente la respuesta es un movimiento igualmente armónico, cuya amplitud se puede deducir de la ecuación (4.22):

$$x_{\text{din,max}} = A(\Omega) = \frac{P_0}{k - m\Omega^2}.$$

La amplificación dinámica es

$$\text{f.ampl.} = \frac{x_{\text{din,max}}}{x_{\text{est}}} = \frac{1}{1 - \Omega^2/\omega_0^2}. \quad (4.24)$$

Si  $\Omega = 0$ , el factor de amplificación es la unidad, como debería ser en buena lógica, al tratarse de una carga estática. Si  $\Omega \rightarrow \infty$ , el factor de amplificación tiende a cero, lo que quiere decir que la excitación es demasiado rápida y el

resorte no tiene tiempo para deformarse, la masa no llegaría a moverse. Por último, si  $\Omega \rightarrow \omega_0$ , el factor de amplificación tiende a  $\infty$ .

Se denomina *resonancia* al fenómeno por el cual la amplitud de la oscilación se hace máxima para determinadas condiciones de la excitación<sup>6</sup>.

Como se ha visto en el ejemplo anterior, la amplitud puede tender a  $\infty$  bajo determinadas circunstancias (ecuación (4.24)). En este caso la resonancia conduciría a un fallo completo del sistema, por una amplitud de movimiento excesiva.

En un caso general con amortiguamiento, la expresión (4.22) proporciona la amplitud ( $A$ ) del régimen permanente. Utilizando dicha ecuación, es posible dibujar la gráfica de la amplitud obtenida para un valor dado del amortiguamiento ( $\xi$ ), en función de la frecuencia de excitación ( $\Omega$ ) (figura 4.8). Se observa que para amortiguamiento  $\xi \neq 0$  la curva muestra en general un máximo de la amplitud, mientras que para  $\xi = 0$  no existe máximo, tendiendo la amplitud resonante a  $\infty$ .

Desde un punto de vista de cálculo, la frecuencia de resonancia se obtiene hallando el máximo de (4.22):

$$A = \frac{q/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2\omega_0^2}};$$

puesto que el numerador es constante, se busca el mínimo del radicando en el denominador,

$$\frac{d}{d\Omega} [(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2\omega_0^2] = 2(\omega_0^2 - \Omega^2)(-2\Omega) + 8\xi^2\omega_0^2\Omega = 0,$$

obteniéndose finalmente:

$$\Omega_r = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{2m^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}. \quad (4.25)$$

La amplitud resonante se obtiene sustituyendo el valor de  $\Omega_r$  en la expresión (4.22) de  $A$ :

$$A_r = \frac{q}{c\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{q}{c\omega} = \frac{q/c}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}}. \quad (4.26)$$

<sup>6</sup>Estrictamente hablando, la definición hecha corresponde a la *resonancia en amplitud*. Cabe definir también la *resonancia en energía cinética*, como aquella que hace máximo  $T = m\dot{x}^2/2$ , pudiendo demostrarse que corresponde a una frecuencia de excitación igual a  $\omega_0$  (frecuencia propia sin amortiguamiento). Si existe amortiguamiento, esta frecuencia de resonancia es ligeramente distinta a la obtenida en (4.25). Al ser la energía potencial proporcional al cuadrado de la elongación, la resonancia en energía potencial equivale a la resonancia en amplitud.

Conviene observar que las expresiones (4.4), (4.11) y (4.25) definen tres frecuencias características del sistema, que ordenadas de mayor a menor quedan:

$$\omega_0 > \overbrace{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}^{\omega} > \overbrace{\omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}}^{\Omega_r}.$$

Aunque sus valores sean distintos para un caso con amortiguamiento, en los casos prácticos reales, el amortiguamiento  $\xi$  suele ser pequeño y las tres frecuencias tienen valores muy próximos. Para los valores usuales del amortiguamiento en vibraciones estructurales (del orden de 1 %-2 % o incluso menores), la resonancia se produce muy próxima a  $\omega_0$ , como se aprecia en la figura 4.8. Por ello, en la práctica ingenieril a menudo se confunden las dos frecuencias  $\omega_0$  y  $\Omega_r$ . La diferencia de frecuencias es mayor para valores altos del amortiguamiento  $\xi$ , aunque entonces también ocurre que la resonancia tiene menor importancia. Si  $\xi^2 \geq 1/2$  ( $\xi \geq 0,71$ ) no se llega a producir máximo de  $A$ , por lo que no hay resonancia. En este caso la función  $A(\Omega)$  es monótona decreciente y no tiene máximo local, como puede apreciarse en la figura 4.8.

EJEMPLO 4.2: Como continuación del ejemplo 4.1, resolver las siguientes cuestiones adicionales:

- Suponiendo ahora que a la base se le comunica un movimiento impuesto armónico, de amplitud 0,05 m y frecuencia 2 Hz, obtener el movimiento tanto durante el régimen transitorio como en el régimen permanente. Como condiciones iniciales, se admitirá que parte del reposo en la posición de equilibrio.
- Obtener la frecuencia de la excitación anterior que produce la máxima amplitud del movimiento, el valor de dicha amplitud máxima y el factor de amplificación.

*Solución.*

a.— Sea  $x(t)$  el movimiento de elongación del resorte, relativo a la base, y  $x_b(t)$  el movimiento impuesto de la base. El movimiento absoluto es por tanto  $X(t) = x(t) + x_b(t)$ . La ecuación del movimiento es:

$$m\ddot{X} + c\dot{x} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_b.$$

Teniendo en cuenta  $x_b(t) = B \operatorname{sen}(\Omega t)$ , resulta

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mB\Omega^2 \operatorname{sen}(\Omega t). \quad (4.27)$$

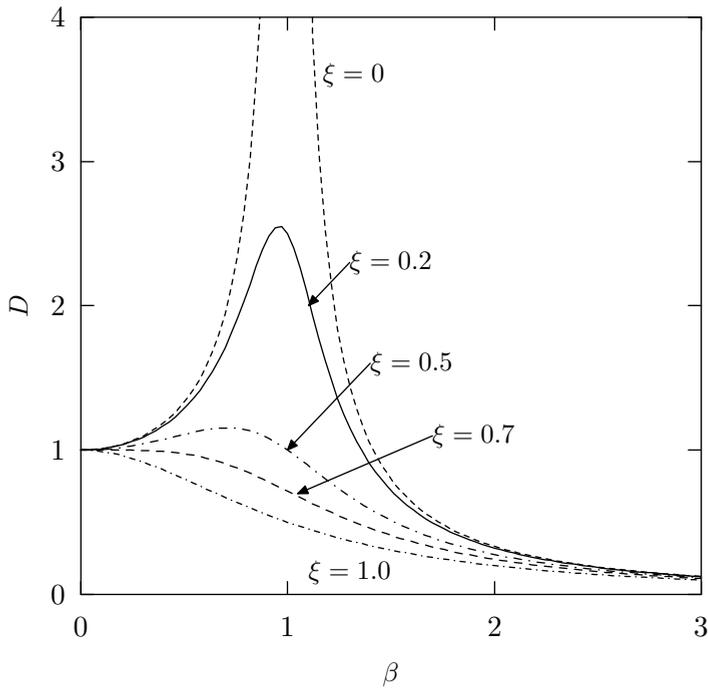


Figura 4.8: Amplitud de oscilación para una excitación armónica, en función de la frecuencia de excitación  $\Omega$ , para diversos valores del amortiguamiento  $\xi$ . Los ejes representan magnitudes adimensionales, en abscisas  $\beta = \Omega/\omega_0$ , y en ordenadas  $D = A/(q/k)$  (factor de amplificación dinámica).

La solución general consta de la solución general de la homogénea más una solución particular de la completa,  $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ . Suponiendo una solución particular del tipo

$$x_p(t) = C \operatorname{sen}(\Omega t + \delta), \quad (4.28)$$

y obligando a que  $x(t)$  cumpla la ecuación anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} \delta &= \arctan\left(\frac{c\Omega}{m\Omega^2 - k}\right) = -0,125031 \text{ rad}; \\ C &= -\frac{mB\Omega^2}{\sqrt{c^2\Omega^2 + (m\Omega^2 - k)^2}} = -0,0850728 \text{ m}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

(Estos parámetros podrían haberse deducido también directamente de aplicar las expresiones (4.20) y (4.22), con  $q = mB\Omega^2$ .) La solución completa de la ecuación es

$$x(t) = C \operatorname{sen}(\Omega t + \delta) + Ae^{-\xi\omega_0 t} \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0). \quad (4.30)$$

Obligando a que cumpla las condiciones iniciales ( $x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$ ), se obtienen las constantes  $A$  y  $\phi_0$ :

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \arctan\left(\frac{2\xi\omega\omega_0}{\Omega^2 - \omega_0^2 + 2\xi^2\omega_0^2}\right) = -0,157492 \text{ rad}; \\ A &= -\frac{C\Omega}{\omega} = 0,0676418 \text{ m}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Con estos datos y los parámetros  $\xi, \omega_0$  calculados anteriormente (ecuaciones (4.15) y (4.16)) queda determinada la ecuación del movimiento (4.30):

$$\begin{aligned} x(t) &= -0,0850728 \operatorname{sen}(4\pi t - 0,125031) \\ &\quad + 0,0676418 e^{-0,4605170 t} \operatorname{sen}(15,80468 t - 0,157492). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Esta solución es la «completa», que corresponde al llamado *régimen transitorio*. Pasado suficiente tiempo, el segundo sumando en esta expresión (la solución de la homogénea) desaparece, debido a la exponencial decreciente, y queda el denominado *régimen permanente*, que se identifica con la solución particular (4.28). En la figura 4.9 pueden observarse estas dos soluciones. Refiriéndose al régimen permanente, el factor de amplificación dinámica (respecto a la amplitud del movimiento impuesto en la base) es  $FA = 0,0850728/0,05 = 1,701457$ .

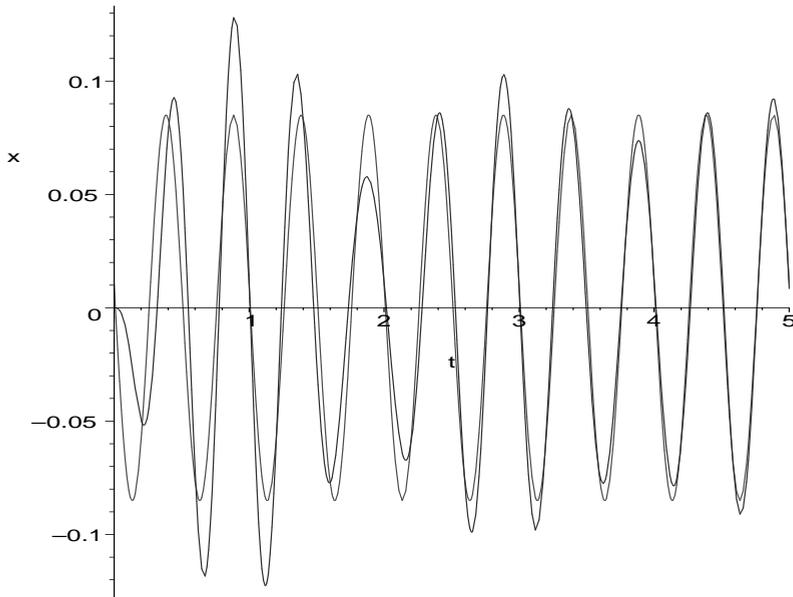


Figura 4.9: Régimen transitorio y permanente, pudiendo observarse como a medida que avanza el tiempo el movimiento se va aproximando al régimen permanente.

b.— Para hallar el máximo de la amplitud en régimen permanente, basta con derivar la expresión de  $C$  en 4.29<sub>2</sub> e igualar a cero. Desarrollando las operaciones se obtiene la frecuencia de resonancia:

$$\Omega_r = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2\xi^2}} = 15,82482 \text{ rad/s.} \quad (4.33)$$

Obsérvese que para este caso en que la excitación es por movimiento armónico en la base la frecuencia de resonancia no coincide con la obtenida anteriormente para una fuerza armónica (4.25). El motivo es que el numerador en la expresión 4.29<sub>2</sub> también depende ahora de  $\Omega$ , y el máximo no coincide para ambos casos.

Sustituyendo esta frecuencia en 4.29<sub>2</sub> se calcula la amplitud máxima (resonante):

$$C = -0,858714 \text{ m.} \quad (4.34)$$

El factor de amplificación lo expresamos en este caso como cociente entre la amplitud dinámica obtenida y la amplitud de la excitación:

$$\text{FA} = \frac{0,858714}{0,05} = 17,17428.$$

En la figura 4.10 se aprecia la variación del factor de amplificación con la frecuencia  $\Omega$ , marcándose claramente el pico de resonancia.  $\square$

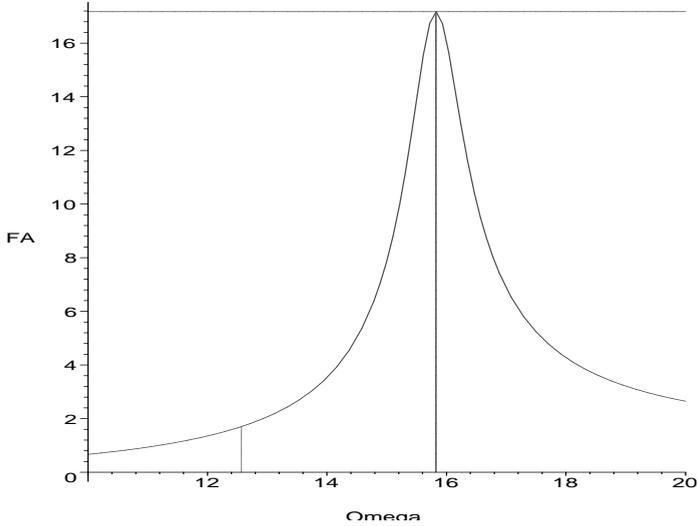


Figura 4.10: *Factor de amplificación dinámica en función de la frecuencia de excitación de la base. Se marcan con líneas verticales la situación para la excitación definida en el primer apartado y la situación de resonancia.*



# Oscilaciones lineales con varios grados de libertad

## Índice

---

<b>5.1. Ecuaciones del movimiento</b> . . . . .	<b>160</b>
5.1.1. Ecuaciones acopladas en sistemas lineales . . . . .	160
5.1.2. Linealización de las ecuaciones . . . . .	162
5.1.3. Formulación matricial . . . . .	165
<b>5.2. Oscilaciones libres</b> . . . . .	<b>168</b>
5.2.1. Oscilaciones sin amortiguamiento; problema de autovalores . . . . .	168
5.2.2. Frecuencias propias y modos normales de vibración . . . . .	169
5.2.3. Caso de autovalores múltiples . . . . .	175
5.2.4. Análisis modal; coordenadas normales . . . . .	176
5.2.5. Condiciones iniciales . . . . .	180
5.2.6. Oscilaciones libres con amortiguamiento . . . . .	181
<b>5.3. Oscilaciones forzadas</b> . . . . .	<b>184</b>
5.3.1. Oscilaciones sin amortiguamiento; Resonancia . . . . .	184
5.3.2. Oscilaciones con amortiguamiento; régimen transitorio y permanente . . . . .	186
<b>5.4. Métodos para la obtención de modos y frecuencias propias</b> . . . . .	<b>188</b>

---

## 5.1. Ecuaciones del movimiento

### 5.1.1. Ecuaciones acopladas en sistemas lineales

Consideremos un sistema definido por  $n$  coordenadas generalizadas  $q_i$ , que denotaremos también mediante el vector de coordenadas  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  para simplificar. Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en función de las incógnitas  $\mathbf{q}(t)$  se denomina lineal cuando las ecuaciones homogéneas correspondientes cumplen dicha condición de linealidad en relación a las soluciones: si  $\mathbf{q}_1(t)$  y  $\mathbf{q}_2(t)$  son dos soluciones de las ecuaciones homogéneas<sup>1</sup>, cualquier combinación lineal de ambas  $a_1\mathbf{q}_1(t) + a_2\mathbf{q}_2(t)$  para  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  arbitrarios será también solución de la ecuación.

En el caso de los sistemas mecánicos, las ecuaciones generales de la dinámica (2.37) son de segundo orden en función del tiempo. Cuando son lineales adoptan la forma siguiente:

$$m_{ij}\ddot{q}_j + c_{ij}\dot{q}_j + k_{ij}q_j = f_i(t), \quad (5.1)$$

donde el rango de los índices<sup>2</sup> es  $i, j = 1 \dots n$ . Si todas las matrices de coeficientes  $m_{ij}, c_{ij}, k_{ij}$  fuesen diagonales, es decir que sólo fueran distintos de cero para  $i = j$ , las ecuaciones anteriores serían en realidad un conjunto de  $n$  ecuaciones desacopladas de 1 gdl cada una. En este caso se podrían resolver independientemente mediante los procedimientos del capítulo 4. En el caso general si alguna de las matrices de coeficientes no es diagonal se produce un acoplamiento entre los distintos grados de libertad, debiendo resolverse de manera conjunta el sistema de ecuaciones acopladas.

A continuación se desarrolla un ejemplo representativo de un sistema dinámico lineal con tres grados de libertad acoplados, en el cual se obtienen las ecuaciones mediante el procedimiento de Lagrange (capítulo 2).

**EJEMPLO 5.1:** Supongamos un sistema formado por tres carros que pueden considerarse como masas puntuales, conectadas entre sí por resortes lineales y amortiguadores. La primera está conectada de igual manera a un punto fijo, y están obligadas todas ellas a moverse según una misma recta (figura 5.1).

<sup>1</sup>Se denomina homogénea a una ecuación diferencial en la que no hay términos independientes de las funciones  $\mathbf{q}$  y de sus derivadas  $\dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$ .

<sup>2</sup>En esta expresión y en el resto del capítulo se sobreentenderán los sumatorios sobre los índices repetidos, extendidos a lo largo de su rango, salvo indicación en contra. Quedan exceptuadas también las expresiones en las que estos índices afecten a vectores o matrices, en cuyo caso se indicará de forma expresa el sumatorio si lo hay.

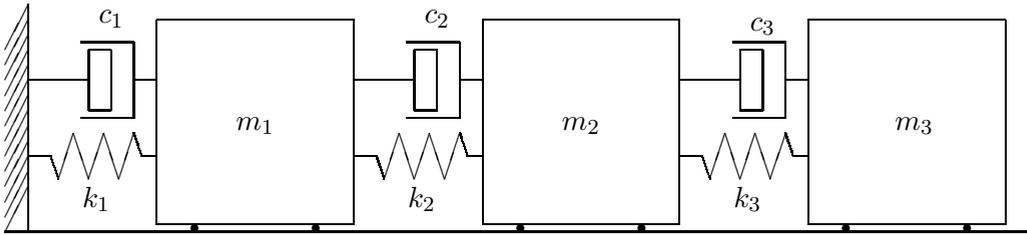


Figura 5.1: *Sistema lineal con 3 grados de libertad, formado por tres masas unidas mediante resortes y amortiguadores lineales.*

Obtendremos en primer lugar las ecuaciones de Lagrange del movimiento. Para ello tomamos coordenadas absolutas de cada masa en relación con la posición de equilibrio,  $\mathbf{q} = (x_1, x_2, x_3)$ . La posición de equilibrio sería por tanto  $\mathbf{q}_0 = (0, 0, 0)$ . La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2,$$

y la energía potencial

$$V = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_3(x_3 - x_2)^2.$$

Derivando se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1\ddot{x}_1; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2\ddot{x}_2; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} \right) = m_3\ddot{x}_3.$$

Las fuerzas generalizadas deben incluir los términos conservativos y los no conservativos provenientes de los amortiguadores:

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\frac{\partial V}{\partial x_1} + Q_1^N \\ &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) - c_1\dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ Q_2 &= -k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_3 - x_2) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) \\ Q_3 &= -k_3(x_3 - x_2) - c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) \end{aligned}$$

Resultan por tanto las ecuaciones del movimiento siguientes:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3x_3 - c_2\dot{x}_1 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - c_3\dot{x}_3 = 0 \\ m_3\ddot{x}_3 - k_3x_2 + k_3x_3 - c_3\dot{x}_2 + c_3\dot{x}_3 = 0 \end{cases}$$

En estas ecuaciones se pueden identificar los coeficientes de las ecuaciones (5.1):

$$\begin{aligned}
 [m_{ij}] &= \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}, & [c_{ij}] &= \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{pmatrix}, \\
 [k_{ij}] &= \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Se obtiene por tanto un sistema de 3 ecuaciones diferenciales lineales y acopladas, al no ser diagonales ni los coeficientes  $c_{ij}$  ni los  $k_{ij}$ .

### 5.1.2. Linealización de las ecuaciones

Para un sistema general las ecuaciones serán no lineales. Sin embargo, si existe una posición de equilibrio estable, por la propia definición del mismo (ver apartado 3.3) se producirán pequeñas oscilaciones o vibraciones alrededor de esta posición si la excitación del sistema es suficientemente pequeña. En este caso podremos linealizar las ecuaciones admitiendo la hipótesis de pequeñas oscilaciones: las fuerzas desarrolladas dependerán linealmente de las coordenadas y de las velocidades, y los parámetros del sistema se podrán considerar constantes e iguales a los correspondientes a la posición de equilibrio. En lo que sigue de este apartado se discute la obtención de estas ecuaciones linealizadas en un caso general, así como las propiedades del sistema de ecuaciones y sus matrices de coeficientes. Como veremos más adelante el movimiento oscilatorio que se produce tiene naturaleza armónica, similar al caso de un grado de libertad que se estudió en el capítulo 4.

La dinámica analítica proporciona un marco teórico adecuado para plantear las ecuaciones en este tipo de sistemas. Adoptamos para ello las siguientes

HIPÓTESIS.—

1. El sistema es holónomo con vínculos esclerónomos (es decir, vínculos que no dependen de  $t$ ). En estas condiciones la energía cinética es una expresión homogénea de segundo grado en las velocidades generalizadas

$\dot{q}_i$  (ver apartado 2.2.4, ecuaciones (2.30) y (2.33))<sup>3 4</sup>:

$$T = \frac{1}{2} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad \text{siendo } m_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \quad (5.3)$$

2. Existe una *posición de equilibrio estable*, en la que tomaremos convencionalmente el origen de coordenadas ( $q_i = 0$ ), con objeto de simplificar las expresiones.

La condición de equilibrio se puede definir por la ausencia de movimiento,  $\dot{q}_i = \ddot{q}_i = 0$ . Se puede comprobar fácilmente que esta condición es equivalente a la anulación de las fuerzas generalizadas  $Q_i$ . En efecto, partiremos de las ecuaciones de Lagrange (2.27),

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^N. \quad (5.4)$$

Desarrollando de forma general estas ecuaciones (2.37), y teniendo en cuenta que se trata de un sistema esclerónomo ( $\partial \mathbf{r}_i / \partial t = 0$ ), se obtiene:

$$m_{ij} \ddot{q}_j + [kl, i] \dot{q}_k \dot{q}_l = - \frac{\partial V}{\partial q_i} + Q_i^N = Q_i, \quad (5.5)$$

siendo  $[kl, i] = \frac{1}{2} (\partial m_{ik} / \partial q_l + \partial m_{il} / \partial q_k - \partial m_{kl} / \partial q_i)$ . Particularizando para unas condiciones iniciales de reposo ( $\dot{q}_i = 0$ ), se comprueba fácilmente<sup>5</sup> que la condición de equilibrio ( $\ddot{q}_i = 0$ ) es equivalente a la condición de nulidad de las fuerzas generalizadas,  $Q_i = 0$ .

3. Al ser estable la posición de equilibrio, una perturbación pequeña del mismo producirá igualmente *oscilaciones pequeñas* respecto de la posición de equilibrio. Supondremos pequeñas tanto las coordenadas relativas a la posición de equilibrio ( $q_j$ ), así como las velocidades y las aceleraciones ( $\dot{q}_i, \ddot{q}_i$ ), por lo que los términos cuadráticos de estas componentes se pueden despreciar en relación con los términos lineales. Asimismo, los parámetros del sistema se podrán considerar constantes, al suponer que no varía apreciablemente la configuración del mismo.

<sup>3</sup>En esta expresión y en el resto del capítulo se sobreentenderán los sumatorios sobre los índices repetidos, extendidos a lo largo de su rango, salvo indicación en contra. Quedan exceptuadas también las expresiones en las que estos índices afecten a vectores o matrices, como en el último término de (5.3), en cuyo caso se indicará de forma expresa el sumatorio.

<sup>4</sup>Por conveniencia, para este capítulo se han modificado los símbolos de los índices mudos en relación con las ecuaciones citadas del capítulo anterior (2.30) y (2.33)

<sup>5</sup>Téngase en cuenta que la matriz de coeficientes  $m_{ij}$  es definida positiva y por tanto regular.

Desarrollaremos ahora las fuerzas generalizadas  $Q_i$  de las ecuaciones (5.5). Admitiremos que estas fuerzas puedan depender de las coordenadas generalizadas  $\mathbf{q} = (q_1, q_2 \dots q_n)$  y de sus velocidades  $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2 \dots \dot{q}_n)$ , y supondremos también que no dependen explícitamente del tiempo ( $\partial Q_i / \partial t = 0$ ). Esto equivale a considerar un *sistema autónomo*, en el que las únicas fuerzas actuantes provienen de cambios en la propia configuración del sistema (fuerzas interiores), o de la velocidad (resistencias viscosas), no existiendo fuerzas debidas a agentes exteriores variables con el tiempo. Con estas premisas realizamos un desarrollo en serie de primer orden alrededor de la posición de equilibrio, que nos permitirá *linealizar* la expresión de las fuerzas generalizadas en función de coordenadas y velocidades:

$$Q_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \underbrace{Q_i|_0}_{=0} + \left. \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \right|_0 q_j + \left. \frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j} \right|_0 \dot{q}_j + \mathcal{O}(\mathbf{q}^2) + \mathcal{O}(\dot{\mathbf{q}}^2)$$

Emplearemos la notación siguiente para los coeficientes que aparecen:

$$k_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} - \left. \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \right|_0 \quad \text{Coeficientes de } \textit{rigidez}$$

$$c_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} - \left. \frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j} \right|_0 \quad \text{Coeficientes de } \textit{amortiguamiento} \textit{ viscoso}$$

Supondremos aquí que las fuerzas provienen de un potencial ( $Q_i = -\partial V / \partial q_i$ ), por lo que los coeficientes de rigidez serán:

$$k_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_0. \quad (5.6)$$

Es fácil comprobar la simetría de estos coeficientes, heredada de las propiedades de las derivadas:  $k_{ij} = k_{ji}$ .

Análogamente, para las fuerzas dependientes de la velocidad, se puede adoptar la hipótesis de que provienen de una función  $\mathcal{R}$ , denominada *función de disipación de Rayleigh*. A partir de esta se obtendrían los coeficientes simétricos  $c_{ij}$  como:

$$c_{ij} = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right|_0. \quad (5.7)$$

En el caso en que los coeficientes fueran constantes, la expresión de  $\mathcal{R}$  sería una forma cuadrática:

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} c_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (5.8)$$

El significado físico de  $\mathcal{R}$  puede relacionarse con la tasa de energía disipada por unidad de tiempo por las fuerzas viscosas no conservativas:

$$\mathcal{D} = -Q_i^N \dot{q}_i = (c_{ij} \dot{q}_j) \dot{q}_i = 2\mathcal{R}$$

Por el segundo principio de la termodinámica esta disipación debe ser positiva o nula, lo que conduce a la condición  $\mathcal{R} \geq 0$ , o de forma equivalente, a que los coeficientes  $c_{ij}$  definen una forma cuadrática semidefinida positiva.

Las ecuaciones del movimiento (5.4) quedan pues expresadas como:

$$m_{ij} \ddot{q}_j + [kl, i] \dot{q}_k \dot{q}_l = -k_{ij} q_j - c_{ij} \dot{q}_j + \mathcal{O}(\mathbf{q}^2) + \mathcal{O}(\dot{\mathbf{q}}^2)$$

Empleando ahora la hipótesis 3 arriba enunciada de pequeñas oscilaciones, se puede aproximar la ecuación anterior eliminando los términos de orden cuadrático. Se obtienen así las *ecuaciones linealizadas* del movimiento:

$$m_{ij} \ddot{q}_j + c_{ij} \dot{q}_j + k_{ij} q_j = 0; \quad i = 1 \dots n \quad (5.9)$$

Estas ecuaciones son válidas siempre que el sistema sea autónomo, sin fuerzas exteriores que lo exciten. Este caso se denomina de *vibraciones libres*. En caso contrario se obtendría un sistema con *vibraciones forzadas*, en el que habría que añadir a la derecha de la igualdad los términos de fuerzas exteriores correspondientes:

$$m_{ij} \ddot{q}_j + c_{ij} \dot{q}_j + k_{ij} q_j = f_i(t); \quad i = 1 \dots n \quad (5.10)$$

Las ecuaciones (5.9) ó (5.10) gobiernan el estudio de las vibraciones en sistemas lineales, siendo válidas también de forma bastante aproximada para el estudio de pequeñas oscilaciones en la mayoría de los sistemas reales no lineales. Como se comprueba inmediatamente, son una generalización directa de la ecuación (4.18) para las oscilaciones con un grado de libertad estudiada en el capítulo 4:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t).$$

### 5.1.3. Formulación matricial

En las ecuaciones (5.9) los coeficientes  $m_{ij}$  juegan el papel de masas, los  $c_{ij}$  definen el amortiguamiento viscoso, y los  $k_{ij}$  la rigidez del sistema. Podemos

emplearlos para definir las matrices siguientes<sup>6</sup>:

$[\mathbf{M}] = [m_{ij}]$	Matriz de masas
$[\mathbf{C}] = [c_{ij}]$	Matriz de amortiguamiento
$[\mathbf{K}] = [k_{ij}]$	Matriz de rigidez
$\{\mathbf{q}\} = \{q_j\}$	Vector columna de coordenadas
$\{\mathbf{f}\} = \{Q_j\}$	Vector columna de fuerzas externas

De esta forma para el caso de oscilaciones libres (5.9) la ecuación matricial resulta ser

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (5.11)$$

y para oscilaciones forzadas (5.10),

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{f}\}. \quad (5.12)$$

La matriz  $[\mathbf{M}]$  define la energía cinética como una forma cuadrática de las velocidades (ecuación (5.3)),

$$T = \frac{1}{2} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \{\dot{\mathbf{q}}\}^T [\mathbf{M}] \{\dot{\mathbf{q}}\}$$

La matriz  $[\mathbf{M}] = [m_{ij}]$ , por la definición de sus componentes (ver (2.30)) es simétrica. Por otra parte, la energía cinética, por su definición, es esencialmente positiva, por lo que la matriz de masa ha de ser además definida positiva:

$$\forall \dot{q}_i, \quad \frac{1}{2} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j > 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{M}] > 0. \quad (5.13)$$

Restringiéndonos al caso en que las fuerzas provienen de un potencial, la definición de las componentes de  $[\mathbf{K}] = [k_{ij}]$ , ver ecuación (5.6), la caracteriza también como simétrica. Para estudiar su signo, desarrollamos en serie de potencias el potencial  $V$  alrededor de la posición de equilibrio,

$$V(\mathbf{q}) = V(\mathbf{0}) + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial q_i} \Big|_0}_{=0} q_i + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_0}_{=k_{ij}} q_i q_j + \dots \quad (5.14)$$

---

<sup>6</sup>Emplearemos la notación habitual en este curso para las expresiones matriciales:  $\{\mathbf{q}\} \equiv \{q_i\}$ ,  $\{\mathbf{a}\} \equiv \{a_i\}$  (negritas entre llaves) para matrices columna ( $n \times 1$ ),  $\|\mathbf{a}\| = \{\mathbf{a}\}^T \equiv \|a_i\|$ ,  $\|\mathbf{q}\| = \{\mathbf{q}\}^T \equiv \|q_i\|$  para matrices fila ( $1 \times n$ ), y  $[\mathbf{M}] \equiv [M_{ij}]$ ,  $[\mathbf{K}] \equiv [K_{ij}]$ ,  $[\mathbf{A}] \equiv [A_{ij}]$  (negritas *rectas* o corchetes) para matrices de 2 índices ( $n \times n$ ). Reservaremos las “negritas *itálicas*” ( $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{I}$ ) para vectores o tensores. Procuraremos distinguir de esta manera entre el tensor  $\mathbf{R}$  y la matriz de componentes del mismo en un triedro dado,  $[\mathbf{R}]$ .

La condición para que el equilibrio sea estable, en virtud de lo cual las oscilaciones alrededor del mismo se mantienen pequeñas, equivale a que el potencial  $V$  tenga un mínimo local, es decir que sea  $V(\mathbf{q}) - V(\mathbf{0}) > 0$ . Esta afirmación la demostraremos más adelante (apartado 5.2.2). Supondremos además que los coeficientes de las derivadas segundas  $k_{ij}$  en el desarrollo anterior son significativos, sin que se necesite recurrir a derivadas de orden superior para establecer la condición de mínimo. En virtud de ello, se deduce que la forma cuadrática definida por  $k_{ij}$  es definida positiva además de simétrica:

$$\forall q_i, \quad k_{ij}q_iq_j > 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{K}] > 0. \quad (5.15)$$

Por último, como ya se justificó en el apartado anterior, los coeficientes de amortiguamiento viscosos definen una matriz simétrica y semidefinida positiva:

$$\forall \dot{q}_i, \quad c_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{C}] \geq 0. \quad (5.16)$$

EJEMPLO 5.2: Para el caso del ejemplo anterior 5.1, expresar las ecuaciones matriciales y las matrices del sistema, comprobando sus características.

Estas ecuaciones se pueden expresar matricialmente en la forma definida por (5.11),

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}$$

siendo las matrices del sistema las obtenidas en (5.2):

$$[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}; \quad [\mathbf{C}] = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{pmatrix};$$

$$[\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix}.$$

Las tres matrices son obviamente simétricas. Teniendo en cuenta que todos los parámetros  $m_i, c_i, k_i$  son positivos, las matrices son también definidas positivas. Por ejemplo para la matriz  $[\mathbf{K}]$  los menores principales son todos positivos

$$M_1 = k_1 + k_2 > 0; M_2 = k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1 > 0; M_3 = k_1k_2k_3 > 0.$$

La comprobación es similar para la matriz  $[\mathbf{C}]$ , y más obvia para  $[\mathbf{M}]$ .

## 5.2. Oscilaciones libres

### 5.2.1. Oscilaciones sin amortiguamiento; problema de autovalores

En este caso no existen fuerzas dependientes de la velocidad, ni fuerzas exteriores aplicadas, por lo que las ecuaciones del movimiento (5.12) quedan

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}, \quad (5.17)$$

o en componentes,

$$m_{ij}\ddot{q}_j + k_{ij}q_j = 0. \quad (5.18)$$

Buscaremos una solución de la forma

$$\{\mathbf{q}\} = C\{\mathbf{a}\}e^{i\omega t} \Leftrightarrow q_j = Ca_j e^{i\omega t}. \quad (5.19)$$

En la expresión anterior  $C = D + iE \in \mathbb{C}$  es una constante compleja, en función de la unidad imaginaria  $i \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{-1}$ ;  $\{\mathbf{a}\}$  es un vector de constantes que más adelante (apartado 5.2.2) demostraremos es real ( $\in \mathbb{R}^n$ ), y  $e^{i\omega t}$  indica la notación de Euler para la exponencial compleja:

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t.$$

La utilización de magnitudes complejas en (5.19) se realiza únicamente por conveniencia, para facilitar los desarrollos. Lógicamente el movimiento físico corresponde a coordenadas reales, por lo que habrá que tomar únicamente la parte real de esta expresión. La notación compleja facilita la representación de funciones armónicas, ya que la constante compleja  $C$  incluye dos constantes reales. En efecto, desarrollando la parte real de (5.19),

$$\begin{aligned} \{\mathbf{q}\} &= \Re [(D + iE)(\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t)] \{\mathbf{a}\} \\ &= (D \cos \omega t - E \operatorname{sen} \omega t) \{\mathbf{a}\}; \end{aligned}$$

y si definimos unas nuevas constantes  $(B, \delta)$  como  $B = \sqrt{D^2 + E^2}$  y  $\operatorname{tg} \delta = -E/D$ , esta expresión equivale a su vez a

$$\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{a}\} \Re [B e^{i(\omega t - \delta)}] = \{\mathbf{a}\} B \cos(\omega t - \delta). \quad (5.20)$$

La solución considerada debe cumplir la ecuación del movimiento (5.17). Para ello se deriva dos veces (5.19),

$$\{\ddot{\mathbf{q}}\} = -\omega^2 C \{\mathbf{a}\} e^{i\omega t} = -\omega^2 \{\mathbf{q}\},$$

y sustituyendo en la ecuación (5.17),

$$(-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}])\{\mathbf{a}\}C e^{i\omega t} = \{\mathbf{0}\}.$$

De esta ecuación se puede eliminar el escalar  $C e^{i\omega t} \neq 0$ , resultando

$$(-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}])\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (5.21)$$

Esta expresión define un sistema de ecuaciones lineales homogéneas en función de las incógnitas  $\{\mathbf{a}\}$ , lo que constituye un *problema de autovalores generalizado*. En efecto, denominando  $\lambda = \omega^2$ , se trata de obtener los vectores  $\{\mathbf{a}\}$  que verifican

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{a}\} = \lambda[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}\} \quad (5.22)$$

para algún valor de  $\lambda$ . Para que existan soluciones distintas de la trivial  $\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{0}\}$ , el sistema de ecuaciones homogéneo (5.21) debe ser singular, es decir, debe anularse el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\det([\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}]) = 0. \quad (5.23)$$

Esta ecuación de compatibilidad se denomina la *ecuación característica* del problema de autovalores (5.22). La ecuación (5.23) resulta un polinomio de grado  $n$  en  $\lambda$  (*polinomio característico*), que poseerá en general  $n$  raíces  $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2 \dots n$ . Estas raíces  $\lambda_k$  se denominan *autovalores* o *valores propios*, correspondiendo a los valores de  $\lambda$  que hacen posible una solución no trivial de (5.22); cada uno de ellos está asociado a un vector solución  $\{\mathbf{a}_k\}$ , estos se denominan *autovectores* o *vectores propios*<sup>7</sup>.

### 5.2.2. Frecuencias propias y modos normales de vibración

Las raíces cuadradas positivas de los autovalores  $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$  se denominan *frecuencias propias* del sistema, debido a que representan las frecuencias angulares de las posibles soluciones armónicas del tipo (5.19). Los valores de  $\lambda_k$  son positivos al ser las matrices  $[\mathbf{K}]$  y  $[\mathbf{M}]$  simétricas y definidas positivas, por tanto admiten raíz cuadrada real y positiva.

La linealidad de la ecuación (5.17) lleva aparejada la linealidad de las soluciones: si  $\{\mathbf{x}_1\}$  y  $\{\mathbf{x}_2\}$  son soluciones de la ecuación, cualquier combinación lineal de las mismas ( $\mu\{\mathbf{x}_1\} + \nu\{\mathbf{x}_2\}$ ) también es solución. La comprobación es

<sup>7</sup>En inglés los valores y vectores propios se denominan respectivamente *eigenvalues* y *eigenvectors*.

inmediata, sin más que sustituir en (5.17):

$$[\mathbf{M}](\mu\{\ddot{\mathbf{x}}_1\} + \nu\{\ddot{\mathbf{x}}_2\}) + [\mathbf{K}](\mu\{\mathbf{x}_1\} + \nu\{\mathbf{x}_2\}) = \\ \mu \underbrace{([\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{x}}_1\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{x}_1\})}_{=\{\mathbf{0}\}} + \nu \underbrace{([\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{x}}_2\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{x}_2\})}_{=\{\mathbf{0}\}} = \{\mathbf{0}\}.$$

Supondremos en principio que los autovalores  $\lambda_k$  son todos distintos, no existiendo soluciones múltiples de (5.23). El caso de autovalores múltiples se tratará más abajo. Por tanto, cada  $\lambda_k$  definirá una solución posible del tipo (5.19), en función de una constante arbitraria  $C_k$ . Por lo dicho antes la solución más general será una combinación lineal de las mismas, del tipo

$$\{\mathbf{q}\} = C_1\{\mathbf{a}_1\}e^{i\omega_1 t} + C_2\{\mathbf{a}_2\}e^{i\omega_2 t} + \dots + C_n\{\mathbf{a}_n\}e^{i\omega_n t} \\ = \sum_{k=1}^n C_k\{\mathbf{a}_k\}e^{i\omega_k t} \quad (5.24)$$

En esta expresión, los valores de  $\{\mathbf{a}_k\}$  y  $\omega_k$  vienen dados por la solución del problema de autovalores (5.22). Quedan  $2n$  constantes por determinar, correspondientes a las constantes complejas  $C_k = D_k + iE_k$ , que se definirán a partir de las  $2n$  condiciones iniciales.

Adelantando algunos resultados que demostraremos más adelante, los  $n$  autovalores  $\lambda_k$  son reales y positivos, por lo que  $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$  son números reales. Tomaremos sólo la raíz positiva, ya que la negativa carece de sentido físico. Por tanto, la solución será, tomando la parte real de (5.24)

$$\{\mathbf{q}\} = \sum_{k=1}^n (D_k \cos \omega_k t - E_k \operatorname{sen} \omega_k t)\{\mathbf{a}_k\} \quad (5.25)$$

o bien con la notación alternativa (5.20),

$$\{\mathbf{q}\} = \sum_{k=1}^n B_k\{\mathbf{a}_k\} \cos(\omega_k t - \delta_k) \quad (5.26)$$

siendo  $B_k = \sqrt{D_k^2 + E_k^2}$ .

Esta expresión ofrece una interpretación del movimiento como la suma de  $n$  “*modos de vibración*”  $\{\mathbf{a}_k\}$ , cada uno de ellos vibrando según una ley armónica con su frecuencia característica,  $\omega_k$ . La amplitud de cada modo en función del tiempo es  $B_k \cos(\omega_k t - \delta_k)$ .

La solución general, en cualquiera de las formas (5.24), (5.25) ó (5.26) depende de  $2n$  constantes que se determinan a partir de las  $2n$  condiciones iniciales del problema: coordenadas iniciales  $\{\mathbf{q}_0\}$  y velocidades iniciales  $\{\dot{\mathbf{q}}_0\}$ .

## Propiedades de los autovalores y modos normales (autovectores)

1. *Todos los autovalores son reales:*  $\lambda_k \in \mathbb{R}$ .

Para demostrarlo emplearemos la propiedad de *hermiticidad*<sup>8</sup> de las matrices  $[\mathbf{K}]$  y  $[\mathbf{M}]$ . Sea un autovalor  $\lambda_k$ , que cumple:

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_k\} = \lambda_k[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\} \quad (k \text{ no sumado}). \quad (5.27)$$

Tomando conjugados de los traspuestos de esta expresión,

$$\{\mathbf{a}_k\}^\dagger[\mathbf{K}] = \lambda_k^*\{\mathbf{a}_k\}^\dagger[\mathbf{M}]. \quad (5.28)$$

Pre-multiplicando la ecuación (5.27) por  $\{\mathbf{a}_k\}^\dagger$ , post-multiplicando (5.28) por  $\{\mathbf{a}_k\}$  y restando ambas expresiones se obtiene:

$$0 = (\lambda_k - \lambda_k^*)\{\mathbf{a}_k\}^\dagger[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\}. \quad (5.29)$$

Veamos ahora que el segundo factor de esta expresión no puede ser nulo. Suponiendo en general una expresión compleja para el autovalor como

$$\{\mathbf{a}_k\} = \{\alpha_k\} + i\{\beta_k\}; \quad \{\mathbf{a}_k\}^\dagger = \{\alpha_k\}^\text{T} - i\{\beta_k\}^\text{T},$$

resulta

$$\begin{aligned} \{\mathbf{a}_k\}^\dagger[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\} &= \{\alpha_k\}^\text{T}[\mathbf{M}]\{\alpha_k\} + \{\beta_k\}^\text{T}[\mathbf{M}]\{\beta_k\} \\ &\quad + i \underbrace{(\{\alpha_k\}^\text{T}[\mathbf{M}]\{\beta_k\} - \{\beta_k\}^\text{T}[\mathbf{M}]\{\alpha_k\})}_{=0} \end{aligned}$$

La condición de definida positiva de la matriz  $[\mathbf{M}]$  obliga a que la expresión anterior sea estrictamente positiva. Por tanto, de la expresión (5.29) se deduce

$$\lambda_k = \lambda_k^* \Rightarrow \lambda_k \in \mathbb{R},$$

como queríamos demostrar.

2. *Todos los autovectores son reales:*  $\{\mathbf{a}_k\} \in \mathbb{R}^n$ .

Sea un autovector cualquiera  $\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{a}_k\}$ , del cual ya sabemos que su autovalor asociado es real,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . La ecuación (5.27) es un sistema homogéneo con coeficientes reales, que en componentes puede expresarse como

$$(k_{ij} - \lambda m_{ij})a_j = \alpha_{ij}a_j = 0, \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{R}.$$

<sup>8</sup>Se dice que una matriz es *hermítica* cuando su adjunta, es decir la conjugada y traspuesta, es igual a ella misma:  $[\mathbf{A}]^\dagger = ([\mathbf{A}]^\text{T})^* = [\mathbf{A}]$ . Esta propiedad es evidente para una matriz real simétrica.

Las posibles soluciones a este sistema tienen la propiedad de que el cociente entre dos componentes cualesquiera es real:  $a_k/a_l \in \mathbb{R}$ . Por tanto, dada la indeterminación que existe para la solución, podremos escoger de forma arbitraria una componente real, p. ej.  $a_1 = 1$ , con lo que el resto de componentes habrá de ser igualmente real.

3. *Los autovalores son positivos:  $\lambda_k > 0$ .*

Se parte de la igualdad (5.27),

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_k\} = \lambda_k[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\}. \quad (5.30)$$

Pre-multiplicando por  $\{\mathbf{a}_k\}^T$  y despejando  $\lambda_k$ , se obtiene

$$\lambda_k = \frac{\{\mathbf{a}_k\}^T[\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_k\}}{\{\mathbf{a}_k\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\}}. \quad (5.31)$$

Tanto el numerador como el denominador en esta expresión son estrictamente positivos, al ser definidas positivas las matrices  $[\mathbf{K}]$  y  $[\mathbf{M}]$  respectivamente. Por tanto,  $\lambda_k > 0$ , como queríamos demostrar.

Si algún autovalor fuera negativo,  $\lambda_k < 0$ , la frecuencia propia asociada sería imaginaria,  $\omega_k = \pm\sqrt{\lambda_k} = \pm(a + ib)$ , y sustituyendo en la solución (5.19) se obtendría una exponencial real creciente, no acotada, que indicaría un equilibrio inestable e invalidaría la hipótesis hecha de pequeñas oscilaciones. Esto podría ocurrir en el caso en que no se tuviese un mínimo del potencial, en cuyo caso los coeficientes  $[\mathbf{K}]$  podrían no ser definidos positivos. Este razonamiento prueba que para la estabilidad del movimiento se requiere la condición de mínimo del potencial.

4. *Ortogonalidad:*

Dos modos de vibración  $\{\mathbf{a}_k\}$  y  $\{\mathbf{a}_l\}$ , correspondientes a autovalores distintos  $\lambda_k \neq \lambda_l$ , son ortogonales respecto a la matriz de masa  $[\mathbf{M}]$ :

$$\{\mathbf{a}_k\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_l\} = 0 \quad (5.32)$$

La expresión anterior se puede interpretar como la anulación del producto interior de los vectores  $\{\mathbf{a}_k\}$  y  $\{\mathbf{a}_l\}$ , en la métrica definida por  $[\mathbf{M}]$ .

En efecto, debe cumplirse:

$$\begin{aligned} \lambda_k[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\} &= [\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_k\} \\ \lambda_l[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_l\} &= [\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_l\} \end{aligned}$$

Premultiplicando la primera igualdad por  $\{\mathbf{a}_l\}^T$ , la segunda por  $\{\mathbf{a}_k\}^T$  y restando ambas entre sí, gracias a la simetría de  $[\mathbf{M}]$  y de  $[\mathbf{K}]$  obtenemos

$$(\lambda_k - \lambda_l)\{\mathbf{a}_k\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_l\} = 0 \quad (5.33)$$

Al ser  $\lambda_k \neq \lambda_l$  queda demostrada la ortogonalidad.

5. *Los autovalores y autovectores son intrínsecos:*

Esto quiere decir que son independientes de la elección de coordenadas. En efecto, si suponemos un cambio de coordenadas cartesianas definido por la matriz  $[\mathbf{U}]$ ,

$$\{\mathbf{q}\} = [\mathbf{U}]\{\mathbf{y}\}, \quad (5.34)$$

al sustituir en la ecuación matricial (5.17) resulta:

$$[\mathbf{M}][\mathbf{U}]\{\ddot{\mathbf{y}}\} + [\mathbf{K}][\mathbf{U}]\{\mathbf{y}\} = \{\mathbf{0}\};$$

la ecuación característica es ahora:

$$|-\lambda[\mathbf{M}][\mathbf{U}] + [\mathbf{K}][\mathbf{U}]| = |[\mathbf{U}]| \cdot |-\lambda[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]| = 0.$$

Si el cambio de coordenadas es regular, es decir  $|[\mathbf{U}]| \neq 0$ , se deduce por tanto la misma ecuación característica (5.23). De ella resultarán los mismos autovalores  $\lambda_k$ . Los vectores propios correspondientes estarán ligados a los obtenidos con las coordenadas originales  $\{\mathbf{q}\}$  mediante las relaciones de cambio de coordenadas (5.34).

6. *Los vectores propios son linealmente independientes.*

Los vectores propios asociados a autovalores distintos son *linealmente independientes*. En efecto, si suponemos una combinación lineal cualquiera

$$\alpha_1\{\mathbf{a}_1\} + \alpha_2\{\mathbf{a}_2\} + \dots + \alpha_k\{\mathbf{a}_k\} + \dots + \alpha_n\{\mathbf{a}_n\} = \{\mathbf{0}\}$$

premultiplicando por  $\{\mathbf{a}_k\}^T[\mathbf{M}]$  obtenemos  $\alpha_k = 0$ . Puesto que esta operación se puede realizar para todos los valores  $k = 1, \dots, n$ , se deduce que la única posibilidad es que todos los coeficientes  $\alpha_k$  sean nulos. Los  $n$  vectores propios forman por tanto una base del espacio vectorial  $R^n$ .

### Masas modales y normalización de los modos

Como se ha indicado antes en la propiedad de ortogonalidad, el producto de un modo de vibración por sí mismo a través de la matriz de masa será distinto de cero,

$$\{\mathbf{a}_k\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\} = M_k. \quad (5.35)$$

El valor  $M_k$  se denomina *masa modal* del modo  $\{\mathbf{a}_k\}$ , y debe ser estrictamente positivo  $M_k > 0$  como consecuencia de ser la matriz de masa  $[\mathbf{M}]$  definida positiva.

Conviene advertir que esta masa modal no es una magnitud intrínseca de los modos de vibración, sino que depende de cómo estos se hayan escogido y normalizado. Efectivamente, al ser solución de un sistema homogéneo, los vectores propios están indefinidos respecto de, al menos, un parámetro. Así, si  $\{\mathbf{a}_k\}$  es vector propio, cualquier vector paralelo al mismo  $\mu\{\mathbf{a}_k\}$  (para  $\mu \in \mathbb{R}$ ) también lo es:

$$(-\lambda_k[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}])\mu\{\mathbf{a}_k\} = \mu\{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}$$

Podemos por tanto escoger los vectores propios de forma que cumplan algún criterio de normalización, por ejemplo que su norma respecto de la matriz de masa sea unidad:

$$\{\mathbf{a}_k\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\} = 1 \quad (k \text{ no sumado}). \quad (5.36)$$

Para hacer esta normalización, el procedimiento que se sigue en la práctica es tomar en primer lugar una solución cualquiera para (5.30), que podemos denominar  $\{\mathbf{v}_k\}$ . A continuación, cada vector propio se normaliza dividiéndolo por su norma

$$\{\mathbf{a}_k\} = \frac{\{\mathbf{v}_k\}}{\sqrt{\{\mathbf{v}_k\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{v}_k\}}} = \frac{\{\mathbf{v}_k\}}{\sqrt{M_k}} \quad (5.37)$$

En este caso, considerando (5.32) y (5.37), las masas modales serán todas unitarias y se verificará

$$\{\mathbf{a}_k\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_l\} = \delta_{kl} \quad (\delta_{kl} = 0 \text{ si } k \neq l; \quad \delta_{kl} = 1 \text{ si } k = l) \quad (5.38)$$

Esta normalización según (5.37) puede no ser la más conveniente en la práctica, y no es la única opción posible. Otra posibilidad sería adoptar el convenio de que la primera componente de cada vector propio fuese de valor unidad, o bien que la máxima componente de cada vector propio fuese la unidad. Estas alternativas pueden ser preferibles para expresar los vectores propios en cálculos manuales, con objeto de evitar las operaciones aritméticas que implica (5.37). En general la expresión del producto interno de dos modos será

$$\{\mathbf{a}_k\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_l\} = \delta_{kl}M_k \quad (k \text{ no sumado}). \quad (5.39)$$

La ortogonalidad respecto de  $[\mathbf{M}]$  implica también ortogonalidad respecto de  $[\mathbf{K}]$ : premultiplicando (5.30) por  $\{\mathbf{a}_l\}^T$ ,

$$\{\mathbf{a}_l\}^T[\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_k\} = \{\mathbf{a}_l\}^T(\omega_k^2[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\}) = \delta_{kl}M_k\omega_k^2 \quad (k \text{ no sumado}). \quad (5.40)$$

### 5.2.3. Caso de autovalores múltiples

La propiedad de ortogonalidad (5.32), conducente a obtener un conjunto de  $n$  vectores propios normalizados y ortogonales entre sí respecto de  $[\mathbf{M}]$ , se ha basado en la no existencia de soluciones múltiples de la ecuación característica (5.23), por lo que todos los autovalores en (5.33) eran distintos.

En el caso en que existan autovalores múltiples como solución de (5.23) es posible también obtener un conjunto de vectores propios normalizados y mutuamente ortogonales. A continuación se describe en líneas generales el procedimiento de obtención.

Supongamos que uno de los autovalores  $\lambda$  es una solución doble. En ese caso, el sistema de ecuaciones homogéneo (5.21) poseerá como soluciones para este valor de  $\lambda$  un subespacio de dimensión 2, por lo que se podrán escoger dos vectores solución independientes,  $\{\mathbf{a}'_k\}$  y  $\{\mathbf{a}'_l\}$ , que supondremos ya normalizados, es decir cumpliendo cada uno la condición (5.36).

Deseamos obtener dentro de este subespacio dos vectores  $\{\mathbf{a}_k\}$  y  $\{\mathbf{a}_l\}$ , ortogonales entre sí y a todos los demás vectores propios correspondientes a los otros autovalores. Escogemos para ello el primero directamente como  $\{\mathbf{a}_k\} = \{\mathbf{a}'_k\}$ . Este vector cumple la condición de ortogonalidad respecto a los vectores propios de autovalores distintos, ya que es válido el mismo razonamiento seguido en (5.33). Para el otro vector  $\{\mathbf{a}_l\}$ , suponemos una combinación lineal arbitraria de  $\{\mathbf{a}'_k\}$  y  $\{\mathbf{a}'_l\}$ , en función de dos escalares  $c_1$  y  $c_2$ :

$$\{\mathbf{a}_l\} = c_1\{\mathbf{a}'_k\} + c_2\{\mathbf{a}'_l\}$$

imponiendo la ortogonalidad con  $\{\mathbf{a}_k\}$ ,

$$\{\mathbf{a}_l\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\} = c_1M_k + c_2\{\mathbf{a}'_l\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}'_k\} = 0, \quad (5.41)$$

de donde se obtiene una relación entre  $c_1$  y  $c_2$ ,

$$\frac{c_1}{c_2} = -\frac{\{\mathbf{a}'_l\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}'_k\}}{M_k} = -\mu_l.$$

Obtenemos otra relación expresando la masa modal de  $\{\mathbf{a}_l\}$ ,

$$\{\mathbf{a}_l\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_l\} = M_l = c_1^2 + c_2^2 + 2c_1c_2\mu_l. \quad (5.42)$$

De las dos ecuaciones (5.41) y (5.42) determinamos los valores precisos de  $c_1$  y  $c_2$ . De esta forma se obtienen dos vectores propios asociados al autovalor  $\lambda$ , que son ortogonales a todos los demás y entre sí.

En el caso de haber autovalores de multiplicidad mayor ( $m > 2$ ), se sigue un procedimiento similar. En primer lugar se escoge un primer vector normalizado

del subespacio asociado de dimensión  $m$ ; a continuación se aplica el procedimiento anterior para obtener un segundo vector dentro de este subespacio, ortogonal al primero; y así sucesivamente, imponiendo cada vez las condiciones de ortogonalidad con todos los vectores anteriores, hasta obtener los  $m$  vectores ortogonales entre sí.

El método descrito es análogo al procedimiento clásico de ortogonalización de Gram-Schmidt, que se puede consultar en los textos de álgebra lineal<sup>9</sup>.

#### 5.2.4. Análisis modal; coordenadas normales

La solución general de las ecuaciones (5.17), debido a la linealidad de las soluciones, se puede expresar como una combinación lineal de las mismas, de la forma (5.26):

$$\{\mathbf{q}\} = \sum_{k=1}^n B_k \{\mathbf{a}_k\} \cos(\omega_k t - \delta_k). \quad (5.43)$$

Denominando  $a_{ki}$  a la componente  $i$  del vector propio  $\{\mathbf{a}_k\}$ , la expresión anterior se puede escribir en componentes como

$$q_i = B_k a_{ki} \cos(\omega_k t - \delta_k) \quad (5.44)$$

donde se sobreentiende el sumatorio implícito en el índice repetido  $k$ . Definamos ahora unos coeficientes (función del tiempo)

$$u_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} B_k \cos(\omega_k t - \delta_k) \quad (5.45)$$

que denominamos *coordenadas normales*. En función de ellas (5.44) queda

$$q_i(t) = a_{ki} u_k(t) \quad (5.46)$$

Esta expresión puede interpretarse como un cambio de coordenadas para obtener las coordenadas normales  $u_k(t)$  a partir de las coordenadas originales  $q_i(t)$ . La matriz del cambio es la definida por los coeficientes  $a_{ki}$ , que son constantes en relación al tiempo, y que como hemos visto son precisamente las componentes de los modos normales de vibración.

Las componentes  $a_{ki}$  definidos para la expresión (5.44) constituyen la llamada *Matriz Modal*,  $[\mathbf{A}] \stackrel{\text{def}}{=} [a_{ki}]$ . Según la definición hecha antes de estos coeficientes, esta matriz está formada por los modos normales como filas,

<sup>9</sup>Cristóbal Mateos: *Álgebra Lineal*, Servicio de Publicaciones de la E.T.S.I.C.C.P. de Madrid; Juan de Burgos: *Álgebra Lineal*, McGraw-Hill, 1993

$$[\mathbf{A}] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \{\mathbf{a}_1\}^T \\ \{\mathbf{a}_2\}^T \\ \vdots \\ \{\mathbf{a}_n\}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}) \\ (a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}) \end{pmatrix}. \quad (5.47)$$

El cambio de coordenadas establecido por (5.46) está definido por la traspuesta de la matriz modal,  $[\mathbf{A}]^T$ . La expresión de la solución  $\{\mathbf{q}\}$  en función de las coordenadas normales  $\{\mathbf{u}\}$  es pues:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{q}\} &= [\mathbf{A}]^T \{\mathbf{u}\} \\ &= u_1(t)\{\mathbf{a}_1\} + u_2(t)\{\mathbf{a}_2\} + \dots + u_n(t)\{\mathbf{a}_n\}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Las coordenadas normales así definidas poseen una propiedad notable, ya que en función de ellas las ecuaciones del movimiento quedan desacopladas. Al realizar el cambio a las coordenadas normales, en lugar de un sistema de  $n$  ecuaciones simultáneas acopladas (5.17), se obtienen  $n$  ecuaciones independientes, cada una con una sola variable, que se pueden solucionar una a una. En efecto, sustituyendo (5.48) en (5.17),

$$[\mathbf{M}][\mathbf{A}]^T \{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}][\mathbf{A}]^T \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{0}\}$$

y premultiplicando por la matriz modal  $[\mathbf{A}]$ ,

$$[\mathbf{A}][\mathbf{M}][\mathbf{A}]^T \{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{A}][\mathbf{K}][\mathbf{A}]^T \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{0}\}$$

Desarrollando en componentes los productos de matrices en esta ecuación, la componente  $(ij)$  de  $[\mathbf{A}][\mathbf{M}][\mathbf{A}]^T$  corresponde a

$$([\mathbf{A}][\mathbf{M}][\mathbf{A}]^T)_{ij} = a_{ik}m_{kl}a_{jl} = \{\mathbf{a}_i\}^T [\mathbf{M}] \{\mathbf{a}_j\} = \delta_{ij}M_i,$$

es decir, se trata del producto interior a través de  $[\mathbf{M}]$  del modo  $\{\mathbf{a}_i\}$  (fila  $i$  de  $[\mathbf{A}]$ ) y el modo  $\{\mathbf{a}_j\}$  (columna  $j$  de  $[\mathbf{A}]^T$ ), que como se vió en (5.39) son las deltas de Kronecker multiplicadas por las masas modales. Por tanto el resultado es una matriz diagonal:

$$[\mathbf{A}][\mathbf{M}][\mathbf{A}]^T = [\mathbf{M}_D] = \begin{pmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_n \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

En el caso en que la normalización se haya hecho con masas modales unitarias (5.38), esta sería la matriz identidad.

Análogamente, el otro producto de matrices, empleando (5.40), resulta otra matriz diagonal

$$[\mathbf{A}][\mathbf{K}][\mathbf{A}]^T = [\mathbf{K}_D] = \begin{pmatrix} M_1\omega_1^2 & & & \\ & M_2\omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_n\omega_n^2 \end{pmatrix} \quad (5.50)$$

Por lo tanto, la ecuación (5.17) queda expresada en coordenadas normales como

$$[\mathbf{M}_D]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}_D]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{0}\}. \quad (5.51)$$

En componentes, equivale a  $n$  ecuaciones desacopladas (independientes)

$$M_k\ddot{u}_k + M_k\omega_k^2 u_k = 0 \quad (k = 1 \dots n \text{ no sumado}). \quad (5.52)$$

Este resultado no debería extrañar si se recuerda la definición de  $u_k(t)$  realizada antes (5.45). En efecto, esta ecuación define las  $u_k(t)$  como funciones armónicas de frecuencias  $\omega_k$ , que son precisamente las soluciones generales de ecuaciones del tipo (5.52). Existe una identidad formal entre definir  $u_k(t)$  explícitamente en función de constantes  $B_k$  y  $\delta_k$  por determinar como en (5.45), o definir las como soluciones de las ecuaciones (5.52). En definitiva, las ecuaciones (5.52) en  $u_k$  son  $n$  ecuaciones desacopladas, correspondientes cada una a un sistema de un grado de libertad: la amplitud del modo de vibración correspondiente.

Esta observación permite interpretar las vibraciones libres de un sistema de  $n$  grados de libertad como la suma de las oscilaciones por separado de  $n$  modos normales de vibración, independientes unos de otros. Así las coordenadas normales  $u_k(t)$  son las amplitudes de cada modo, coeficientes variables con el tiempo por los que multiplicamos a los modos de vibración para obtener la vibración total del sistema.

Hacemos notar que el desarrollo realizado arriba para demostrar la existencia y propiedades de ortogonalidad de los modos de vibración, resumido en las ecuaciones (5.49) y (5.50), puede resumirse mediante el llamado teorema de diagonalización simultánea<sup>10</sup>. Este afirma que, dada una matriz simétrica  $[\mathbf{M}]$  definida positiva, y otra matriz  $[\mathbf{K}]$  simétrica, existe siempre una matriz  $[\mathbf{A}]$  no singular tal que  $[\mathbf{A}][\mathbf{M}][\mathbf{A}]^T = [\mathbf{1}]$  y  $[\mathbf{A}][\mathbf{K}][\mathbf{A}]^T = [\mathbf{D}]$ , siendo  $[\mathbf{1}]$  la matriz unidad y  $[\mathbf{D}]$  una matriz diagonal. Si además  $[\mathbf{K}]$  es definido positivo, los términos de la diagonal de  $[\mathbf{D}]$  serán todos positivos como es nuestro caso.

<sup>10</sup>Consultar por ejemplo J.A. Fernández Palacios: *Mecánica Teórica de los Sistemas de Sólidos Rígidos*, 1989.

EJEMPLO 5.3: Sea un péndulo doble, formado por dos masas iguales  $m$  unidas por varillas rígidas sin masa de longitud  $l$ , la primera de las cuales está articulada en un punto fijo (figura 5.2). Estudiar las pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio vertical calculando las frecuencias propias y modos normales de vibración.

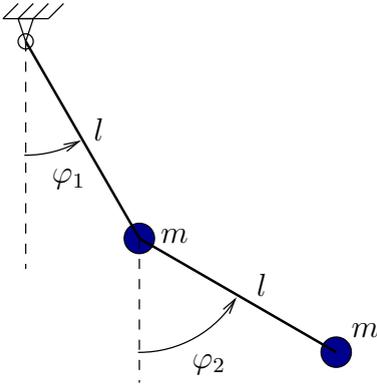


Figura 5.2: Péndulo doble formado por masas puntuales  $m$  unidas por varillas de longitud  $l$

Empleando las coordenadas  $(\varphi_1, \varphi_2)$  definidas en la figura 5.2, la Lagrangiana es:

$$L = \frac{1}{2}ml^2 [2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)] + mgl(2 \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2).$$

Las ecuaciones de Lagrange del movimiento resultan:

$$\begin{aligned} 0 &= 2ml^2\ddot{\varphi}_1 + ml^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\ddot{\varphi}_2 - ml^2\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + 2mgl \sin \varphi_1 \\ 0 &= ml^2\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + ml^2\ddot{\varphi}_2 + ml^2\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + mgl \sin \varphi_2 \end{aligned}$$

Las ecuaciones se linealizan despreciando términos de segundo orden:

$$\begin{aligned} 0 &= 2ml^2\ddot{\varphi}_1 + ml^2\ddot{\varphi}_2 + 2mgl\varphi_1 \\ 0 &= ml^2\ddot{\varphi}_1 + ml^2\ddot{\varphi}_2 + mgl\varphi_2 \end{aligned}$$

La expresión matricial de las ecuaciones es:

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} &= \{\mathbf{0}\} \\ [\mathbf{M}] &= \begin{pmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{pmatrix}; \quad [\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} 2mgl & 0 \\ 0 & mgl \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La ecuación característica resulta

$$\det([\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}]) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\left(\frac{g}{l} - \lambda\right)^2 - \lambda^2 = 0,$$

cuyas soluciones son

$$\lambda_1 = (2 - \sqrt{2})\frac{g}{l}; \quad \lambda_2 = (2 + \sqrt{2})\frac{g}{l}.$$

A partir de éstas podemos calcular los vectores y frecuencias propias asociados a cada una, el resultado es:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{2 - \sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{l}}; & \{\mathbf{a}_1\} &= \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \sqrt{2} \end{array} \right\}; \\ \omega_2 &= \sqrt{2 + \sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{l}}; & \{\mathbf{a}_2\} &= \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -\sqrt{2} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Para estos modos las masas modales valen respectivamente

$$\begin{aligned} M_1 &= (1 \quad \sqrt{2}) ml^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \sqrt{2} \end{array} \right\} = ml^2(4 + 2\sqrt{2}) \\ M_2 &= (1 \quad -\sqrt{2}) ml^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -\sqrt{2} \end{array} \right\} = ml^2(4 - 2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

### 5.2.5. Condiciones iniciales

Los  $2n$  coeficientes  $(B_k, \delta_k)$  de (5.43) se obtendrán a partir de las  $2n$  condiciones iniciales  $(\{\mathbf{q}_0\}, \{\dot{\mathbf{q}}_0\})$ . Desarrollando esta expresión,

$$\{\mathbf{q}\} = \sum_k B_k \{\mathbf{a}_k\} \cos \delta_k \cos \omega_k t + \sum_k B_k \{\mathbf{a}_k\} \operatorname{sen} \delta_k \operatorname{sen} \omega_k t \quad (5.53)$$

por otra parte, la derivada de (5.43) es

$$\{\dot{\mathbf{q}}\} = - \sum_k B_k \{\mathbf{a}_k\} \omega_k \operatorname{sen}(\omega_k t - \delta_k)$$

particularizando ambas en  $t = 0$ ,

$$\begin{aligned} \{\mathbf{q}_0\} &= \sum_k B_k \{\mathbf{a}_k\} \cos \delta_k \\ \{\dot{\mathbf{q}}_0\} &= \sum_k B_k \omega_k \{\mathbf{a}_k\} \operatorname{sen} \delta_k \end{aligned}$$

premultiplicando por  $\{\mathbf{a}_l\}^T [\mathbf{M}]$  identificamos los coeficientes:

$$\begin{aligned} B_l M_l \cos \delta_l &= \{\mathbf{a}_l\}^T [\mathbf{M}] \{\mathbf{q}_0\} \\ B_l \omega_l M_l \operatorname{sen} \delta_l &= \{\mathbf{a}_l\}^T [\mathbf{M}] \{\dot{\mathbf{q}}_0\} \end{aligned} \quad (l \text{ no sumado})$$

Sustituyendo en (5.53) podremos expresar la solución directamente en función de las condiciones iniciales como

$$\{\mathbf{q}\} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{M_k} \left[ \{\mathbf{a}_k\}^T [\mathbf{M}] \left( \{\mathbf{q}_0\} \cos \omega_k t + \frac{1}{\omega_k} \{\dot{\mathbf{q}}_0\} \sin \omega_k t \right) \right] \{\mathbf{a}_k\} \quad (5.54)$$

EJEMPLO 5.4: Demostrar que un sistema sometido a un desplazamiento inicial proporcional a un modo de vibración, partiendo del reposo, desarrolla un movimiento de oscilación pura en que sólo se excita ese modo de vibración.

En efecto, sea  $\{\mathbf{q}_0\} = \{\mathbf{a}_p\}$ ,  $\{\dot{\mathbf{q}}_0\} = \{\mathbf{0}\}$ . Los coeficientes entre corchetes del sumatorio (5.54) serán

$$[\bullet]_k = \{\mathbf{a}_k\} [\mathbf{M}] \{\mathbf{a}_p\} \cos \omega_k t = M_k \delta_{kp} \cos \omega_k t.$$

Por tanto, el movimiento resultante será

$$\{\mathbf{q}\} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{M_k} M_k \delta_{kp} \cos \omega_k t \{\mathbf{a}_k\} = \cos \omega_p t \{\mathbf{a}_p\}.$$

### 5.2.6. Oscilaciones libres con amortiguamiento

Se considera ahora el caso más general de vibraciones libres en las que puedan existir fuerzas de amortiguamiento, dependientes de la velocidad. La ecuación del movimiento es (5.11):

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}$$

Buscamos la solución mediante funciones del tipo

$$\{\mathbf{q}\} = C\{\mathbf{b}\}e^{i\omega t}$$

donde al igual que antes, sólo tiene significado físico la parte real de la expresión, aunque con objeto de simplificar el desarrollo, emplearemos las constantes y la notación complejas.

En este caso, a diferencia del caso sin amortiguamiento, tanto  $\{\mathbf{b}\}$  como  $\omega$  pueden pertenecer al campo complejo. Sustituyendo en la ecuación matricial (5.11) y dividiendo por  $Ce^{i\omega t} \neq 0$ ,

$$(-[\mathbf{M}]\omega^2 + i[\mathbf{C}]\omega + [\mathbf{K}])\{\mathbf{b}\} = \{\mathbf{0}\}$$

Para simplificar las expresiones, realizamos el cambio  $\gamma = i\omega$ . Resulta entonces

$$([\mathbf{M}]\gamma^2 + [\mathbf{C}]\gamma + [\mathbf{K}])\{\mathbf{b}\} = \{\mathbf{0}\},$$

sistema homogéneo que define un problema de autovalores complejo. Para tener solución distinta de la trivial, ha de cumplir la condición de que el determinante de la matriz de coeficientes sea nulo:

$$\det([\mathbf{M}]\gamma^2 + [\mathbf{C}]\gamma + [\mathbf{K}]) = 0 \quad (\text{ecuación característica})$$

Esta ecuación tendrá en general *soluciones complejas* que vendrán dadas por parejas de autovalores y autovectores conjugadas del tipo

$$\begin{aligned} \gamma &= -s + \Omega i, & \gamma^* &= -s - \Omega i; \\ \{\mathbf{b}\} &= \{\boldsymbol{\alpha}\} + \{\boldsymbol{\beta}\}i, & \{\mathbf{b}\}^* &= \{\boldsymbol{\alpha}\} - \{\boldsymbol{\beta}\}i. \end{aligned}$$

La contribución de esta pareja de soluciones conjugadas en la solución general será, si las afectamos de constantes (escalares) arbitrarias  $C_1$  y  $C_2$ ,

$$\begin{aligned} \{\mathbf{q}(t)\} &= C_1\{\mathbf{b}\}e^{\gamma t} + C_2\{\mathbf{b}\}^*e^{\gamma^* t} \\ &= e^{-st}[C_1(\{\boldsymbol{\alpha}\} + i\{\boldsymbol{\beta}\})e^{i\Omega t} + C_2(\{\boldsymbol{\alpha}\} - i\{\boldsymbol{\beta}\})e^{-i\Omega t}] \end{aligned}$$

Desarrollando la exponencial compleja y considerando tan sólo la parte real de la expresión resultante,

$$\{\mathbf{q}(t)\} = e^{-st}(C_1 + C_2)[\{\boldsymbol{\alpha}\} \cos \Omega t - \{\boldsymbol{\beta}\} \text{sen } \Omega t] \quad (5.55)$$

Para que la expresión anterior permanezca acotada, la parte real de  $\gamma$ ,  $(-s)$ , ha de ser negativa o nula. En caso contrario, el módulo de (5.55) crecería de forma exponencial, en contra de la hipótesis de movimiento acotado y pequeñas oscilaciones. Si  $s = 0$  no existirá amortiguamiento para esa frecuencia característica, mientras que si  $s > 0$ , se producirá un amortiguamiento que provocará que al cabo de un cierto tiempo el valor de (5.55) se haga tan pequeño como se quiera.

La solución general será, por combinación lineal de todas las soluciones del tipo (5.55),

$$\{\mathbf{q}\} = \sum_{k=1}^n B_k e^{-s_k t} (\{\boldsymbol{\alpha}_k\} \cos \Omega_k t - \{\boldsymbol{\beta}_k\} \text{sen } \Omega_k t) \quad (5.56)$$

Esta solución consta pues de un sumatorio de armónicos, cada cual con su fase y frecuencia propias, afectados cada uno de ellos por términos exponenciales decrecientes ( $e^{-s_k t}$ ) que representan la pérdida de energía por el amortiguamiento viscoso. Al cabo de suficiente tiempo el movimiento se detiene en la práctica.

En este caso, la transformación a coordenadas normales exigiría un cambio a ejes principales que diagonalice simultáneamente las tres matrices  $[\mathbf{M}]$ ,  $[\mathbf{K}]$ ,  $[\mathbf{C}]$ . En general no es posible realizar esta triple diagonalización simultánea. Tan sólo será factible en algunos casos particulares, como por ejemplo, bajo la hipótesis común en dinámica estructural del *amortiguamiento de Rayleigh*, por la que se considera la matriz de amortiguamiento proporcional a las de masas y de rigidez:

$$[\mathbf{C}] = \alpha[\mathbf{M}] + \beta[\mathbf{K}] \tag{5.57}$$

En este caso se comprueba fácilmente que la diagonalización simultánea se alcanza con la misma matriz modal  $[\mathbf{A}]$  que se obtuvo en el caso sin amortiguamiento (ecuaciones (5.49) y (5.50), ya que

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}][\mathbf{C}][\mathbf{A}]^T &= \alpha[\mathbf{M}_D] + \beta[\mathbf{K}_D] \\ &= \begin{pmatrix} M_1(\alpha + \beta\omega_1^2) & & & \\ & M_2(\alpha + \beta\omega_2^2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_n(\alpha + \beta\omega_n^2) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.58}$$

que es también una matriz diagonal.

Para obtener la matriz modal  $[\mathbf{A}]$  se emplearán por tanto los mismos modos normales del problema sin amortiguamiento. Hecha la diagonalización, resultan las ecuaciones desacopladas

$$M_k \ddot{u}_k + M_k \bar{c}_k \dot{u}_k + M_k \omega_k^2 u_k = 0 \quad (k \text{ no sumado}), \tag{5.59}$$

donde  $0 < \bar{c}_k = \alpha + \beta\omega_k^2$  son los coeficientes de la matriz diagonal  $[\mathbf{M}_D]^{-1}[\mathbf{C}]$  en (5.58). La solución general de cada una de estas ecuaciones de 1 gdl tal como se expuso en el apartado 4.2 es

$$u_k = C_k e^{i\omega'_k t} \tag{5.60}$$

donde  $C_k$  es en general un número complejo, al igual que  $\omega'_k$ . De la misma forma que antes, de esta expresión se considerará tan sólo la parte real.

Sustituyendo en la ecuación (5.59), las  $\omega'_k$  deben satisfacer

$$-\omega'^2_k + i\omega'_k \bar{c}_k + \omega_k^2 = 0$$

ecuación de segundo grado que posee dos soluciones,

$$\omega'_k = i \underbrace{\frac{\bar{c}_k}{2}}_{= s_k} \pm \underbrace{\sqrt{\omega_k^2 - \bar{c}_k^2/4}}_{= \Omega_k}$$

Sustituyendo en (5.60) y tomando la parte real,

$$\begin{aligned} u_k(t) &= \Re(C_k e^{i\Omega_k t} + C_k^* e^{-i\Omega_k t}) e^{-s_k t} \\ &= B_k \cos(\Omega_k t - \delta_k) e^{-s_k t}. \end{aligned}$$

Esta ecuación caracteriza a la amplitud modal como un movimiento afectado de una exponencial decreciente, cuya energía disminuye con el tiempo debido al amortiguamiento.

La ecuación (5.59) se puede escribir también en función de las tasas de amortiguamiento respecto al crítico, haciendo el cambio  $\bar{c}_k = \alpha + \beta\omega_k^2 = 2\xi_k\omega_k$ :

$$\ddot{u}_k + 2\xi_k\omega_k \dot{u}_k + \omega_k^2 u_k = 0 \quad (k \text{ no sumado}); \quad (5.61)$$

En este caso, la solución de cada amplitud modal será  $u_k(t) = B_k \cos(\Omega_k t - \delta_k) e^{-\xi_k\omega_k t}$ .

Un caso que reviste especial interés en la práctica es aquél en el que se conoce directamente la tasa de amortiguamiento de los modos de vibración, obtenida mediante un análisis modal experimental o a partir de una especificación en una norma, aunque se desconoce la forma exacta que tenga la matriz de amortiguamiento. Supongamos que los amortiguamientos modales unitarios son  $\xi_k$ , medidos como razón del amortiguamiento crítico. En este caso puede obtenerse esta matriz mediante

$$[\mathbf{C}] = \sum_{k=1}^n 2\xi_k\omega_k \frac{1}{M_k} ([\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\})(\{\mathbf{a}_k\}^T[\mathbf{M}]). \quad (5.62)$$

En efecto, realizando el producto por los vectores propios en esta matriz resulta una expresión diagonal,

$$\{\mathbf{a}_l\}^T[\mathbf{C}]\{\mathbf{a}_p\} = 2\xi_l\omega_l M_l \delta_{lp} \quad (l \text{ no sumado}). \quad (5.63)$$

La ecuación desacoplada resultante para cada modo será

$$\ddot{u}_k + 2\xi_k\omega_k \dot{u}_k + \omega_k^2 u_k = 0 \quad (k \text{ no sumado}). \quad (5.64)$$

## 5.3. Oscilaciones forzadas

### 5.3.1. Oscilaciones sin amortiguamiento; Resonancia

La ecuación matricial incluye en este caso un término independiente, debido a las fuerzas de excitación externas:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{f}(t)\} \quad (5.65)$$

Esta ecuación tiene por solución general una solución particular de la completa (5.65) más la solución general de la homogénea (5.17):

$$\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{q}\}^h + \{\mathbf{q}\}^p \quad (5.66)$$

La solución general de la homogénea es la obtenida anteriormente para las vibraciones libres (5.26).

Para la solución particular de la completa estudiemos el caso concreto en que las fuerzas son armónicas,

$$\{\mathbf{f}(t)\} = \{\mathbf{F}\} \text{sen } \alpha t,$$

siendo  $\{\mathbf{F}\}$  un vector de constantes.

Busquemos una solución particular del mismo tipo,

$$\{\mathbf{q}\}^p = \{\mathbf{D}\} \text{sen } \alpha t.$$

El vector de constantes  $\{\mathbf{D}\}$  se calcula sustituyendo  $\{\mathbf{q}\}^p$  en la ecuación (5.65):

$$(-\alpha^2[\mathbf{M}]\{\mathbf{D}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\}) \text{sen } \alpha t = \{\mathbf{F}\} \text{sen } \alpha t$$

por lo que

$$\{\mathbf{D}\} = (-\alpha^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}])^{-1}\{\mathbf{F}\} \quad (5.67)$$

En el caso en que  $\alpha$  coincida con una de las frecuencias propias del sistema ( $\alpha = \omega_k$ ), la matriz a invertir en (5.67) se hace singular y no tiene solución por lo tanto. Esto físicamente equivale a una *resonancia* del sistema, debido a que el modo de vibración afectado absorbe constantemente la energía de excitación suministrada con su misma frecuencia propia, hasta que la amplitud del mismo se hace infinita.

Otra forma de estudiar las oscilaciones forzadas es mediante el análisis modal; haciendo el cambio (5.48) a las coordenadas normales en (5.65) y pre-multiplicando por la matriz modal  $[\mathbf{A}]$ ,

$$[\mathbf{A}][\mathbf{M}][\mathbf{A}]^T\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{A}][\mathbf{K}][\mathbf{A}]^T\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{f}(t)\} \quad (5.68)$$

Los productos de matrices de esta expresión se simplifican empleando (5.49) y (5.50),

$$\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{\Omega}]^2\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{M}_D]^{-1}[\mathbf{A}]\{\mathbf{f}(t)\} \quad (5.69)$$

donde hemos denominado  $[\mathbf{\Omega}] = \text{diag}(\omega_1 \dots \omega_n)$  a la matriz diagonal con las frecuencias propias. En componentes,

$$\ddot{u}_k + \omega_k^2 u_k = M_k^{-1} \eta_k(t) \quad (k = 1 \dots n \text{ no sumado}) \quad (5.70)$$

donde los coeficientes  $\eta_k(t)$  representan

$$\eta_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} a_{kj} f_j(t) \quad (k \text{ no sumado}), \quad (5.71)$$

denominándose “*fuerzas modales*”. Se pueden interpretar también como las proyecciones del vector de fuerzas sobre cada modo de vibración,

$$\eta_k = \{\mathbf{a}_k\}^T \{\mathbf{f}\} = a_{kj} f_j. \quad (5.72)$$

Resulta por tanto un conjunto de  $n$  ecuaciones desacopladas (5.70) de 1 grado de libertad cada una, que podremos resolver independientemente.

En el caso particular en que las fuerzas sean armónicas,

$$\{\mathbf{f}(t)\} = \{\mathbf{F}\} \text{sen } \alpha t \quad \Leftrightarrow \quad f_j(t) = F_j \text{sen } \alpha t, \quad (5.73)$$

resultando las ecuaciones

$$\ddot{u}_k + \omega_k^2 u_k = M_k^{-1} \eta_k(t) = \Gamma_k \text{sen } \alpha t \quad (k \text{ no sumado}), \quad (5.74)$$

denominándose  $\Gamma_k = M_k^{-1} \{\mathbf{a}_k\}^T \{\mathbf{F}\}$  el “*coeficiente de participación modal*” de  $\{\mathbf{F}\}$  en el modo  $k$ .

Se producirá resonancia si coincide la frecuencia de la excitación con alguna frecuencia propia ( $\alpha = \omega_k$  para fuerzas armónicas del tipo arriba descrito). En este caso la amplitud de ese modo tendería a infinito, en el caso teórico en que no hubiera amortiguamiento. En los casos reales deberá considerarse el amortiguamiento que conducirá a un valor finito aunque elevado de la amplitud modal (ver apartado siguiente). Además en cualquier caso interviene la participación modal  $\Gamma_k$  que puede ser mayor o menor.

En la práctica los coeficientes de participación modal de las fuerzas habituales suelen ser altos para los modos más bajos ( $\omega_k$  pequeñas), y progresivamente más pequeños para los modos altos ( $\omega_k$  grandes). Es por esto que los modos más bajos suelen ser los que más importancia tienen en la dinámica estructural, al ser los que concentran la mayor parte de la energía en las vibraciones. A menudo se hace la simplificación consistente en considerar únicamente un número limitado de modos de vibración, despreciando los de frecuencias más altas. Esto resulta de gran utilidad cuando los modelos de cálculo poseen un número elevado de grados de libertad, ya que se llega a tener decenas de miles para algunos cálculos tridimensionales reales.

### 5.3.2. Oscilaciones con amortiguamiento; régimen transitorio y permanente

En este caso la ecuación matricial del problema es la (5.12) completa,

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{f}(t)\}. \quad (5.75)$$

En el caso en que la matriz de amortiguamiento  $[\mathbf{C}]$  sea diagonalizable simultáneamente con  $[\mathbf{M}]$  y  $[\mathbf{K}]$  tal y como se ha considerado en el apartado 5.2.6, se podrá hacer una descomposición modal resultando  $n$  ecuaciones desacopladas de un grado de libertad:

$$\ddot{u}_k + 2\xi_k\omega_k\dot{u}_k + \omega_k^2u_k = M_k^{-1}\eta_k(t) \quad (k = 1\dots n \text{ no sumado}). \quad (5.76)$$

La solución de estas ecuaciones proporciona el procedimiento denominado *análisis modal* que suele ser en la práctica el más conveniente. Además de por el desacoplamiento de las ecuaciones, como ya se ha comentado antes no suele ser necesario considerar más que un número reducido de modos.

Estudiamos a continuación el régimen permanente y transitorio a partir de la ecuación matricial (5.75). Al igual que en el apartado 5.3.1, la solución general se podrá expresar como una solución particular de la completa más la solución general de la homogénea (5.11):

$$\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{q}\}^p + \{\mathbf{q}\}^h \quad (5.77)$$

La solución de la homogénea corresponde al caso de vibraciones libres con amortiguamiento, y tiene un valor apreciable sólo durante un tiempo limitado llamado *régimen transitorio*, desapareciendo al cabo del tiempo. Esta solución se ha estudiado antes, en el apartado 5.2.6.

La solución particular de la completa es la que define el llamado *régimen permanente*. Supongamos el caso particular más significativo, una excitación armónica del tipo

$$\begin{aligned} \{\mathbf{f}(t)\} &= \Re\{\{\mathbf{F}\}e^{i\alpha t}\} \\ &= \{\mathbf{F}\} \cos \alpha t \end{aligned}$$

Buscaremos una solución particular del tipo  $\{\mathbf{q}\}^p = \{\mathbf{D}\}e^{i\alpha t}$ , para lo que sustituimos esta expresión en (5.12) obteniendo

$$(-\alpha^2[\mathbf{M}] + i\alpha[\mathbf{C}] + [\mathbf{K}])\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (5.78)$$

Esta ecuación lineal se resuelve mediante la regla de Cramer, obteniendo los elementos del vector solución  $\{\mathbf{D}\}$  como:

$$D_j = \frac{\det_j(\alpha)}{\det(\alpha)}$$

donde  $\det(\alpha) = |-\alpha^2[\mathbf{M}] + i\alpha[\mathbf{C}] + [\mathbf{K}]|$ , y  $\det_j(\alpha)$  es el determinante de la matriz de coeficientes anterior en la que se ha sustituido la columna  $j$ -ésima por

el término independiente  $\{\mathbf{F}\}$ . No hace falta repetir que, de estas expresiones complejas, al final se considerará sólo la parte real.

Los valores de la frecuencia de excitación  $\alpha$  que hacen mínimo el denominador,  $\det(\alpha)$ , son los que producen resonancia en el sistema, para el régimen permanente que es el más significativo. Debido al amortiguamiento, aquí la amplitud de oscilación no tiende a infinito, sino que se mantiene acotada, aunque con valores elevados que pueden provocar la pérdida de linealidad o incluso la rotura del sistema.

Si el amortiguamiento es suficientemente pequeño, como suele ocurrir en numerosas aplicaciones prácticas, las frecuencias de resonancia tienen un valor aproximadamente igual a las frecuencias propias sin amortiguamiento  $\omega_k$ . A menudo será válido también el considerar de forma aproximada que el régimen permanente es el que sale de la solución particular a la ecuación sin amortiguamiento (5.67). Esto equivaldría a considerar que existe un pequeño amortiguamiento (inevitable), pero que para el cálculo de régimen permanente se puede despreciar el valor del mismo, lo que puede ser una aproximación válida en numerosos casos prácticos de la dinámica estructural.

## 5.4. Métodos para la obtención de modos y frecuencias propias

En sistemas con pocos grados de libertad (2 ó 3) la obtención de frecuencias propias y modos normales de vibración se puede realizar manualmente, resolviendo la ecuación característica y el problema de autovalores asociado. Para casos con mayor número de grados de libertad existen otros procedimientos, susceptibles de tratamiento numérico y resolución en el ordenador. Expondremos aquí un método basado en la “deflacción” de matrices (*Método de Stodola*), aplicable a casos con un número moderado de grados de libertad. Para los casos con un elevado número de grados de libertad, existen procedimientos más eficaces, como los métodos de iteración por subespacios o el método de Lanczos, que pueden consultarse en la bibliografía de métodos numéricos en mecánica computacional y elementos finitos<sup>11</sup>.

Supongamos, para no complicar la exposición, que todos los autovalores son distintos y no nulos. El problema de autovalores definido por

$$(-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}])\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{0}\}$$

<sup>11</sup>ver p.ej.: T.J.R. Hughes, *The Finite Element Method*, capítulo 10, Prentice-Hall Inc., 1987; K.J. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, 1982.

se puede expresar también, multiplicando por  $[\mathbf{K}]^{-1}$ , como

$$[\mathbf{D}]\{\mathbf{u}\} = \mu\{\mathbf{u}\}$$

siendo

$$[\mathbf{D}] \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{K}]^{-1} \cdot [\mathbf{M}]$$

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} 1/\omega^2$$

Empezamos por tomar un vector  $\{\mathbf{u}_1\}$  cualquiera, que será combinación lineal de los vectores propios o modos normales de vibración, ya que como vimos éstos forman una base de  $\mathbb{R}^n$ . Si multiplicamos  $\{\mathbf{u}_1\}$  por la matriz  $[\mathbf{D}]$ , cada componente en esta base se verá multiplicada por el autovalor  $\mu_i$  correspondiente. La componente en la dirección del mayor autovalor,  $\mu = \mu_1$  (supuesto  $\mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > \dots > \mu_n$ ), se verá multiplicada por un valor mayor que las demás. Al vector resultante lo denominamos  $\{\mathbf{u}_2\}$

$$\{\mathbf{u}_2\} = [\mathbf{D}]\{\mathbf{u}_1\}$$

Repitiendo el proceso sucesivamente, se obtienen una sucesión de vectores  $\{\mathbf{u}_n\}$ :

$$\{\mathbf{u}_3\} = [\mathbf{D}]\{\mathbf{u}_2\}; \quad \{\mathbf{u}_4\} = [\mathbf{D}]\{\mathbf{u}_3\}; \quad \dots \quad \{\mathbf{u}_n\} = [\mathbf{D}]\{\mathbf{u}_{n-1}\}$$

En el límite ( $n \rightarrow \infty$ ), en el vector  $\{\mathbf{u}_n\}$  predominará el autovector correspondiente al máximo autovalor,  $\mu_1$  (es decir, para el mínimo valor de la frecuencia que será  $\omega_1$ ). Hemos de tomar la precaución de normalizar el vector  $\{\mathbf{u}_n\}$  tras cada iteración, para evitar valores numéricos excesivamente grandes. Cuando se hayan realizado suficientes iteraciones será por tanto

$$[\mathbf{D}]\{\mathbf{u}_n\} \approx \mu\{\mathbf{u}_n\}$$

con un error menor que una tolerancia prefijada. Entonces se adopta  $\mu_1 = \mu$  como autovalor, y  $\{\mathbf{u}_n\}$  como vector propio correspondiente. La frecuencia propia es  $\omega_1 = 1/\sqrt{\mu_1}$ , y llamamos  $\{\mathbf{a}_1\}$  al vector propio una vez normalizado,

$$\{\mathbf{a}_1\} = \frac{\{\mathbf{u}_n\}}{\sqrt{\{\mathbf{u}_n\}^T [\mathbf{M}] \{\mathbf{u}_n\}}}$$

Consideramos ahora la nueva matriz

$$[\mathbf{D}]_2 = [\mathbf{D}] - \mu_1 \underbrace{\{\mathbf{a}_1\}\{\mathbf{a}_1\}^T}_{n \times n} \cdot [\mathbf{M}] \quad (5.79)$$

Vemos que, al multiplicar esta matriz por  $\{\mathbf{a}_1\}$  el resultado se anula:

$$[\mathbf{D}]_2\{\mathbf{a}_1\} = [\mathbf{D}]\{\mathbf{a}_1\} - \mu_1\{\mathbf{a}_1\} \cdot 1 = \{\mathbf{0}\}$$

mientras que para los otros vectores propios ( $k \neq 1$ ) se obtiene el mismo resultado que antes,

$$[\mathbf{D}]_2\{\mathbf{a}_k\} = [\mathbf{D}]\{\mathbf{a}_k\} - \mu_1\{\mathbf{a}_1\} \overbrace{\{\mathbf{a}_1\}^T [\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\}}^{\delta_{1k}=0} = [\mathbf{D}]\{\mathbf{a}_k\}$$

Repitiendo el proceso de deflacción con esta matriz  $[\mathbf{D}]_2$ , obtendremos el autovalor/autovector siguiente ( $\mu_2 = 1/\omega_2^2$ ).

Una vez obtenido, normalizaríamos el vector propio y obtendríamos la matriz  $[\mathbf{D}]_3$  de la misma forma que (5.79). Proseguiríamos así sucesivamente, hasta obtener todos los autovalores y vectores propios.

Este procedimiento tiene la ventaja que los modos se obtienen de forma sucesiva, comenzando por los de frecuencias propias más bajas. Estos suelen ser los más importantes en cuanto a su participación en la solución real, por lo que a menudo basta con obtener los  $m$  modos más bajos. Este método permite calcular sólo los modos más importantes, deteniendo el proceso cuando se ha calculado el modo  $m$ .

## Cinemática del sólido rígido

### Índice

---

<b>6.1. Velocidades y aceleraciones del sólido rígido</b>	<b>191</b>
6.1.1. Derivada de un vector material del sólido	192
6.1.2. Campo de velocidades del sólido rígido	197
6.1.3. Campo de aceleraciones del sólido rígido	201
6.1.4. Caso particular del movimiento plano	203
<b>6.2. Composición de movimientos</b>	<b>209</b>
6.2.1. Composición de movimientos infinitesimales	209
6.2.2. Composición del movimiento de 2 sistemas	211
6.2.3. Composición del movimiento de $n$ sistemas	212
6.2.4. Movimiento de sólidos tangentes	215
<b>6.3. Rotación finita del sólido</b>	<b>218</b>
6.3.1. Composición de rotaciones finitas	218
6.3.2. La Rotación finita como cambio de base	220
6.3.3. La Rotación finita como transformación ortogonal	221
6.3.4. Ángulos de Euler	223
6.3.5. Expresiones de la velocidad de rotación	227

---

### 6.1. Velocidades y aceleraciones del sólido rígido

La segunda parte del curso trata de la dinámica del movimiento general en tres dimensiones del sólido rígido. En este capítulo se estudia la caracterización

del movimiento o *cinemática*, lo que resulta clave para aplicar más adelante las leyes de la dinámica y obtener las ecuaciones pertinentes.

En este estudio del movimiento comenzamos por estudiar la expresión de la derivada temporal de un vector material ligado al sólido, que como veremos es la base para las expresiones de los campos de velocidades y aceleraciones del sólido. Estos campos se caracterizan mediante la velocidad y aceleración de traslación de un punto de referencia del sólido y la velocidad y aceleración angulares del sólido. Tanto las velocidades como las aceleraciones son derivadas del movimiento del sólido, o lo que es lo mismo descripciones de sus movimientos infinitesimales. Una vez caracterizados estos campos se analiza la composición de movimientos ya que en numerosas ocasiones el movimiento de un sólido viene definido como superposición de movimientos elementales o bien en relación a otro sistema móvil. Por último estudiaremos los movimientos finitos del sólido, en particular las rotaciones finitas, que como se verá precisan una interpretación rigurosa como tensores o matrices de rotación, cuya parametrización se aborda mediante los ángulos de Euler.

### 6.1.1. Derivada de un vector material del sólido

Consideremos un sólido  $\mathcal{B}$ , dotado de un movimiento general, esto es tanto de traslación como de rotación. Supondremos un sistema de referencia ortonormal (triedro) ligado al sólido  $(O, \mathbf{e}_i)$ , con origen en  $O \in B$  y vectores unitarios *materiales*  $\mathbf{e}_i$  que se mueven con el sólido (figura 6.1). Las derivadas (temporales) relativas de estos vectores para un observador ligado al sólido serán nulas. Sin embargo, sus derivadas «*absolutas*» para un sistema de referencia inercial

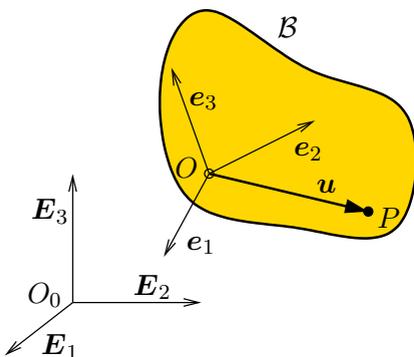


Figura 6.1: Sólido rígido  $\mathcal{B}$ , con el triedro móvil (del sólido)  $\{O, \mathbf{e}_i\}$ , y un vector material  $\mathbf{u}$  ligado al sólido rígido. Este vector puede considerarse como si estuviera «pinchado» en el sólido.

(«*absoluto*») no serán nulas:

$$\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)_{\text{rel},\mathcal{B}} = \mathbf{0}; \quad \dot{\mathbf{u}} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \neq \mathbf{0}. \quad (6.1)$$

Aunque los vectores  $\mathbf{e}_i$  del triedro sean móviles, sus productos escalares sí son constantes, y por tanto las derivadas de estos productos nulas:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = \dot{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot \dot{\mathbf{e}}_j. \quad (6.2)$$

Definimos unos coeficientes

$$H_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_i \cdot \dot{\mathbf{e}}_j, \quad (6.3)$$

que debido a las relaciones (6.2) resultan ser hemisimétricos:

$$\mathbf{e}_i \cdot \dot{\mathbf{e}}_j = -\mathbf{e}_j \cdot \dot{\mathbf{e}}_i \quad \Rightarrow \quad H_{ij} = -H_{ji}. \quad (6.4)$$

Las expresiones (6.3) indican también que los coeficientes  $H_{ij}$  se pueden interpretar como las componentes del vector derivada  $\dot{\mathbf{e}}_j$  en la base  $\{\mathbf{e}_i\}$ .<sup>1</sup>

$$\dot{\mathbf{e}}_j = H_{ij}\mathbf{e}_i. \quad (6.5)$$

Supongamos ahora un vector material cualquiera  $\mathbf{u}$  ligado al sólido,

$$\mathbf{u} = u_j\mathbf{e}_j; \quad (6.6)$$

en el triedro del sólido las componentes  $u_j$  de este vector serán constantes, por lo que su derivada será, empleando la linealidad de la misma y (6.5),

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d}{dt}(u_j\mathbf{e}_j) = u_j \frac{d\mathbf{e}_j}{dt} = u_j H_{ij}\mathbf{e}_i. \quad (6.7)$$

Podemos escribir las componentes de esta expresión en forma matricial, empleando la matriz de las componentes hemisimétricas  $[\mathbf{H}] = [H_{ij}]$ , en la cual sólo hay tres componentes independientes y no nulas:<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \{\mathbf{v}\} &= \{\dot{\mathbf{u}}\} = [\mathbf{H}]\{\mathbf{u}\} \\ \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & H_{12} & H_{13} \\ -H_{12} & 0 & H_{23} \\ -H_{13} & -H_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_{12}u_2 + H_{13}u_3 \\ -H_{12}u_1 + H_{23}u_3 \\ -H_{13}u_1 - H_{13}u_2 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

<sup>1</sup>En lo sucesivo adoptaremos el convenio de sumación implícita de Einstein, por el que, salvo indicación en contra, los índices repetidos se deben entender sumados a lo largo de todo su rango.

<sup>2</sup>Adoptaremos en lo sucesivo la siguiente notación para las expresiones matriciales:  $\{\mathbf{b}\} = \{b_i\}$  para matrices columna,  $\{\mathbf{a}\}^T$  para matrices fila, y  $[\mathbf{C}] = [C_{ij}]$  para matrices de dos índices.

Realizaremos ahora un cambio de notación para las componentes  $[H_{ij}]$ :

$$[\mathbf{H}] = \begin{pmatrix} 0 & H_{12} & H_{13} \\ -H_{12} & 0 & H_{23} \\ -H_{13} & -H_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

Este cambio permite interpretar la derivada como un producto vectorial por el vector que denominaremos *velocidad angular* o *velocidad de rotación* del sólido  $\mathcal{B}$ ,

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_1 \mathbf{e}_1 + \Omega_2 \mathbf{e}_2 + \Omega_3 \mathbf{e}_3; \quad (6.10)$$

desarrollando el producto vectorial:<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} \Omega_i u_j \mathbf{e}_k \\ &= (\Omega_2 u_3 - \Omega_3 u_2) \mathbf{e}_1 + (\Omega_3 u_1 - \Omega_1 u_3) \mathbf{e}_2 + (\Omega_1 u_2 - \Omega_2 u_1) \mathbf{e}_3 \\ &= (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3) \begin{Bmatrix} \Omega_2 u_3 - \Omega_3 u_2 \\ \Omega_3 u_1 - \Omega_1 u_3 \\ \Omega_1 u_2 - \Omega_2 u_1 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

expresión que comprobamos se corresponde con (6.8). De esta forma, la expresión vectorial de la derivada del vector material  $\mathbf{u}$  será

$$\dot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u}. \quad (6.12)$$

Hacemos notar que la velocidad angular  $\boldsymbol{\Omega}$  es una propiedad del movimiento del sólido en su conjunto, independientemente del vector  $\mathbf{u}$  considerado. Así, para dos vectores materiales  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  de  $\mathcal{B}$  será

$$\dot{\mathbf{u}}_1 = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u}_1; \quad \dot{\mathbf{u}}_2 = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u}_2. \quad (6.13)$$

Podemos definir asimismo la notación asociada del operador matricial hemisimétrico como

$$[\widehat{\boldsymbol{\Omega}}] = [\mathbf{H}] \quad (6.14)$$

de forma que la derivada admitirá una interpretación equivalente mediante un producto vectorial o una aplicación hemisimétrica<sup>4</sup> asociada  $[\widehat{\boldsymbol{\Omega}}]$ :

$$\dot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \{\dot{\mathbf{u}}\} = [\widehat{\boldsymbol{\Omega}}] \{\mathbf{u}\}. \quad (6.15)$$

<sup>3</sup>Las componentes  $\epsilon_{ijk}$  corresponden al tensor permutación, siendo su valor +1 ó -1 según la permutación sea par o no, e igual a cero si algún índice se repite.

<sup>4</sup>De forma más general y sin hacer mención a coordenadas, puede considerarse que este operador es un tensor de segundo orden hemisimétrico, que define una aplicación lineal por la que  $\dot{\mathbf{u}} = \widehat{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \mathbf{u}$ . Por otra parte puede comprobarse que la relación entre las componentes del vector axial  $\boldsymbol{\Omega}$  y del tensor hemisimétrico asociado  $\widehat{\boldsymbol{\Omega}}$  son  $\widehat{\Omega}_{ij} = \Omega_k \epsilon_{kji}$ ,  $\Omega_i = \frac{1}{2} \epsilon_{jik} \widehat{\Omega}_{jk}$

El vector  $\Omega$  caracteriza el movimiento del sistema de referencia del sólido, y se corresponde con el concepto intuitivo de velocidad angular de rotación del sólido rígido. Para comprender esto, consideremos la velocidad de un punto definido por el radio vector  $\mathbf{r} = \mathbf{u}$  con origen en  $O$  (o lo que es lo mismo, la velocidad del extremo de  $\mathbf{u}$  respecto a  $O$ ) cuando el triedro gira con velocidad angular  $\Omega$  alrededor de un eje dado (figura 6.2).

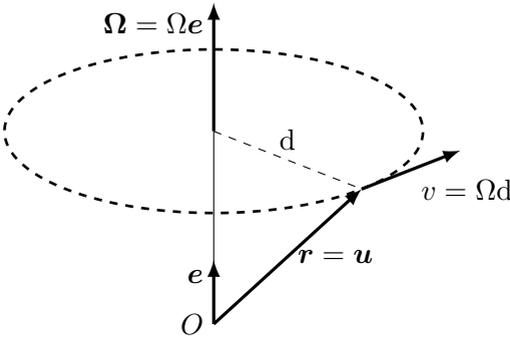


Figura 6.2: Interpretación de  $\Omega$  como una velocidad de rotación.

Si el punto en cuestión se halla situado a distancia  $d$  del eje, su velocidad es  $\Omega d$ , en dirección tangencial a la circunferencia situada en un plano perpendicular al eje de rotación y cuyo centro es la intersección del eje con el plano. Este mismo resultado se obtiene del desarrollo geométrico de la expresión  $\Omega \wedge \mathbf{r}$ .

Por último, este resultado para la derivada de un vector material sirve también para derivar un vector cualquiera no ligado al sólido, pero cuya definición se realice a través del sistema de referencia del sólido,  $\mathbf{p} = p_i \mathbf{e}_i$ . En este caso las componentes  $p_i$  no serán en general constantes, por lo que la derivada es

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{p}_i \mathbf{e}_i + p_i \dot{\mathbf{e}}_i = \dot{p}_i \mathbf{e}_i + p_i (\Omega \wedge \mathbf{e}_i) = \dot{p}_i \mathbf{e}_i + \Omega \wedge (p_i \mathbf{e}_i); \tag{6.16}$$

en esta expresión, el primer término corresponde a la derivada relativa, que mediría un observador ligado al sólido. Así se llega a

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)_{\text{rel},B} + \Omega \wedge \mathbf{p}. \tag{6.17}$$

Esta expresión indica que la derivada de un vector cualquiera a través del sistema de referencia ligado al sólido se puede expresar como suma de la derivada relativa y un término complementario definido por el producto vectorial por la velocidad angular.

**EJEMPLO 6.1:** Se considera una curva  $\Gamma$  en  $\mathbb{R}^3$ , en la cual se puede definir el vector *tangente*  $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/ds$ , siendo  $ds = |d\mathbf{r}|$ . Se sabe por la primera fórmula

de Frenet que  $d\mathbf{t}/ds = \kappa\mathbf{n}$ , siendo el vector unitario  $\mathbf{n}$  la denominada *normal principal* y  $\kappa$  la *curvatura*. La *binormal* se define a su vez como  $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$ . Estos tres vectores unitarios forman un triedro a derechas  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  denominado triedro de Frenet (ver apartado B.4 en apéndice B, o para una descripción más completa un libro de geometría diferencial como el Struik<sup>5</sup>). Por último, la tercera fórmula de Frenet indica que  $d\mathbf{b}/ds = -\tau\mathbf{n}$ , siendo  $\tau$  la *torsión* de la curva. El triedro de Frenet puede considerarse como un sistema rígido.

Deducir la *velocidad de rotación del triedro de Frenet* cuando un punto se mueve por la curva  $\Gamma$  con velocidad  $v$ .

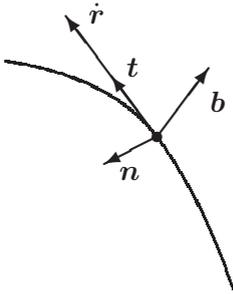


Figura 6.3: Vectores del triedro intrínseco de Frenet.

*Solución.* La derivada temporal de  $\mathbf{t}$  es

$$\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \kappa\mathbf{n}v.$$

Interpretando la derivada mediante la velocidad de rotación  $\boldsymbol{\Omega}$ ,

$$\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{t} = \begin{vmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{n} & \mathbf{b} \\ \Omega_t & \Omega_n & \Omega_b \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\Omega_n \mathbf{b} + \Omega_b \mathbf{n},$$

y de la comparación de ambas expresiones se deduce  $\Omega_b = \kappa v$ ;  $\Omega_n = 0$ . Por otra parte,

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \frac{ds}{dt} = -\tau\mathbf{n}v;$$

e interpretándola como producto vectorial

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{b} = -\Omega_t \mathbf{n} + \Omega_n \mathbf{t}.$$

De donde se deduce que  $\Omega_t = \tau v$ . Por tanto, la velocidad angular buscada tiene la expresión

$$\boldsymbol{\Omega} = v\tau \mathbf{t} + v\kappa \mathbf{b}.$$

<sup>5</sup>D.J. Struik: *Geometría Diferencial Clásica*, Aguilar 1973.

Esta ecuación permite interpretar la evolución del triedro intrínseco de Frenet, al desplazarse con velocidad  $v$  según la curva, como una rotación con dos componentes: una de torsión, alrededor de la tangente, con velocidad angular  $v\tau$ , y una de curvatura, alrededor de la binormal, con velocidad angular  $v\kappa$ .  $\square$

### 6.1.2. Campo de velocidades del sólido rígido

Consideramos un sistema de referencia inercial («fijo»)  $S_0 \equiv (O_0, \mathbf{E}_i)$ , y otro móvil  $S \equiv (O, \mathbf{e}_i)$  ligado a un sólido  $\mathcal{B}$ . El vector posición de un punto material cualquiera del sólido respecto de  $S_0$  es  $\mathbf{r}$ , y respecto de  $S$  lo denominamos  $\boldsymbol{\rho}$ . La relación entre los vectores posición (figura 6.4) es

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}, \tag{6.18}$$

donde  $\mathbf{r}_O$  define la posición del origen  $O$  de  $S$ . La velocidad la obtenemos

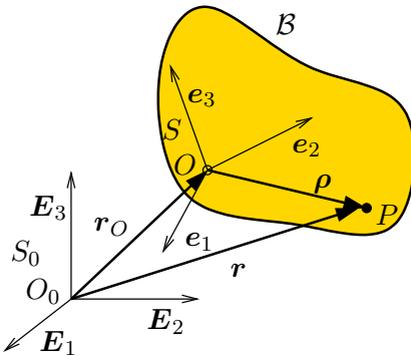


Figura 6.4: Vectores posición  $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})$  en las referencias fija  $S_0 \equiv \{O_0, \mathbf{E}_i\}$  y móvil  $S \equiv \{O, \mathbf{e}_i\}$  respectivamente.

derivando esta igualdad,  $\mathbf{r}_O$  se deriva directamente y para el vector material  $\boldsymbol{\rho}$  tendremos en cuenta la regla de derivación en sistemas móviles (6.12):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}. \tag{6.19}$$

En esta ecuación, los dos sumandos que componen la velocidad tienen una interpretación clara. En primer lugar,  $\mathbf{v}_O$  es una componente de traslación, común para todos los puntos de  $\mathcal{B}$ . Por otra parte,  $\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}$  es la velocidad correspondiente a una rotación instantánea de velocidad angular  $\boldsymbol{\Omega}$  alrededor de un eje que pasa por  $O$ .

La expresión (6.19) define los movimientos infinitesimales del sólido: considerando un tiempo elemental  $dt$ , podemos escribir  $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ ,  $d\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Omega}dt$  y la ecuación es equivalente a

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_O + d\boldsymbol{\theta} \wedge \boldsymbol{\rho}. \tag{6.20}$$

Por otra parte, la ecuación (6.19) caracteriza el campo de velocidades del sólido rígido como un *campo de momentos*, o lo que es equivalente, como un *Sistema de Vectores Deslizantes (SVD)*<sup>6</sup>. Como tal, queda descrito por los siguientes elementos básicos:

- Resultante:  $\boldsymbol{\Omega}$ ;
- Momento en un punto  $O$ :  $\mathbf{v}_O$ ;
- Campo de momentos: para un punto cualquiera  $P \in \mathcal{B}$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_P &= \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}_{OP} \\ &= \mathbf{v}_O + \mathbf{r}_{PO} \wedge \boldsymbol{\Omega}.\end{aligned}$$

De la ecuación del campo de momentos se deducen algunas propiedades interesantes:

1. *Equiproyectividad*: La proyección de las velocidades de dos puntos cualesquiera sobre la recta que les une es igual,

$$\forall (O, P) \in \mathcal{B}, \quad \mathbf{v}_O \cdot \mathbf{r}_{OP} = \mathbf{v}_P \cdot \mathbf{r}_{OP};$$

2. *Invariante escalar*: La proyección de la velocidad de un punto cualquiera sobre la velocidad angular es una constante o «invariante escalar»,

$$\forall P \in \mathcal{B}, \quad \mathbf{v}_P \cdot \boldsymbol{\Omega} = \text{cte.}$$

Cuando esta invariante escalar sea nula diremos que el movimiento es una *rotación instantánea*.

3. *Eje central y momento mínimo*:

Existe un eje en el cual el momento ( $\mathbf{v}$ ) es igual para todos los puntos del mismo, con la particularidad de que es paralelo a la propia dirección del eje ( $\boldsymbol{\Omega}$ ) y además el mínimo ( $v_{\min}$ ). En nuestro caso, llamaremos a este *Eje Helicoidal Tangente (EHT)*, cuya obtención y propiedades las veremos a continuación.

---

<sup>6</sup>Para una descripción y resumen de las propiedades de los Sistemas de Vectores Deslizantes y los campos de momentos resultantes, consultar J.A. Fernández Palacios: *Mecánica Teórica de los Sistemas de Sólidos Rígidos*, Anejo 1B, o M. Prieto Alberca: *Curso de Mecánica Racional – Cinemática y Estática*, Cap. I: Cálculo Vectorial

### Movimiento helicoidal tangente

Busquemos en primer lugar los puntos en los que la velocidad dada por (6.19) se anula:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} = -\mathbf{v}_O;$$

se obtiene una ecuación vectorial en la que son datos  $\boldsymbol{\Omega}$  y  $\mathbf{v}_O$ , con la incógnita  $\boldsymbol{\rho}$ . Para que tenga solución, es necesario que se cumpla la condición de compatibilidad<sup>7</sup>:

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_O = 0. \quad (6.21)$$

En un caso general, no tienen porqué existir puntos de velocidad nula; Sólo los habrá si se cumple esta condición de compatibilidad. Si existen puntos de velocidad nula diremos que el movimiento instantáneo es una rotación.

Generalizando algo más, busquemos ahora puntos en que la velocidad sea paralela a  $\boldsymbol{\Omega}$ , es decir,  $\mathbf{v} = \lambda \boldsymbol{\Omega}$ :

$$\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} = \lambda \boldsymbol{\Omega},$$

o bien

$$\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} = \lambda \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{v}_O. \quad (6.22)$$

Esta es, de nuevo, una ecuación vectorial en  $\boldsymbol{\rho}$ . Es fácil comprobar que su solución no es única: si se conoce una solución y se suma a esta un término paralelo a  $\boldsymbol{\Omega}$ , el resultado también cumple la ecuación. En definitiva la solución general será una recta paralela a  $\boldsymbol{\Omega}$ . A través de algunas sencillas operaciones vectoriales<sup>8</sup> se puede obtener la solución de (6.22) que resulta:

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_O}{\Omega^2} + \alpha \boldsymbol{\Omega}. \quad (6.23)$$

Esta expresión define un *eje paralelo a  $\boldsymbol{\Omega}$* , en función del parámetro  $\alpha$ . Por otra parte, la condición de compatibilidad exige que:

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot (\lambda \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{v}_O) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_O = \lambda \Omega^2,$$

es decir, define el valor de  $\lambda$  en función del invariante escalar, pudiendo distinguirse dos casos.

- a. Si  $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_O \neq 0$ , es  $\lambda \neq 0$ , y la velocidad en el eje es  $\mathbf{v} = \lambda \boldsymbol{\Omega} \neq \mathbf{0}$ . No existen puntos de velocidad nula, se trata de un *movimiento helicoidal tangente* general.

<sup>7</sup>El producto vectorial es normal a los dos argumentos

<sup>8</sup>Véase *Curso de Mecánica*, J.M. Goicolea (2010), apartado 4.3.1

- b. Si  $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_O = 0$ , es  $\lambda = 0$ , y la velocidad en el eje es  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . El movimiento es una *rotación instantánea*.

Todos los puntos del eje definido por (6.23) tienen la misma velocidad; en efecto, si dos puntos definidos por  $\boldsymbol{\rho}_1$  y  $\boldsymbol{\rho}_2$  pertenecen al eje:

$$\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1 = \beta \boldsymbol{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\beta \boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{0}.$$

Por otra parte, si se toma como referencia un punto  $A$  del eje, la velocidad en otro punto cualquiera  $P$  queda descompuesta como suma de un término constante en dirección del eje,  $\mathbf{v}_A$ , y otro perpendicular a este, por serlo a  $\boldsymbol{\Omega}$  (figura 6.5):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} = \lambda \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}. \quad (6.24)$$

Es fácil comprender por tanto que el eje contiene los puntos de *velocidad mínima* del sólido: la velocidad de cualquier otro punto, además de la componente constante ( $\mathbf{v}_A = \lambda \boldsymbol{\Omega}$ ), tiene una componente adicional perpendicular a la velocidad del eje, por lo que siempre será mayor en módulo.

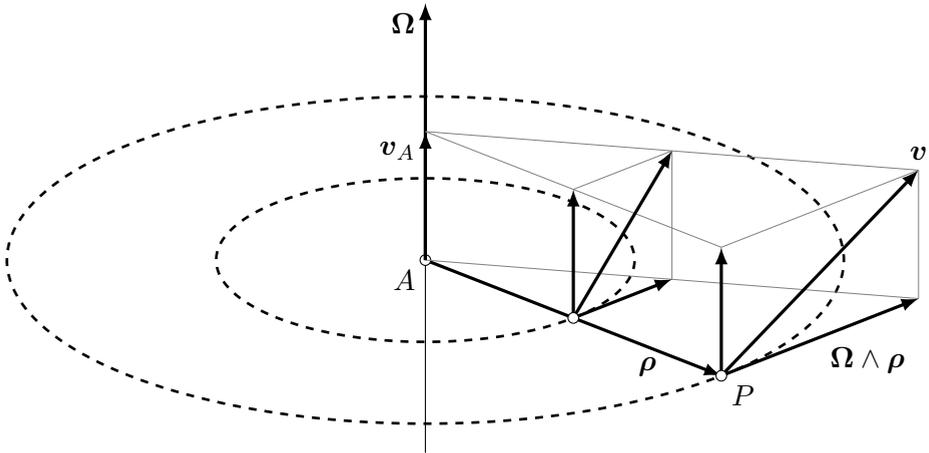


Figura 6.5: Descripción del campo de velocidades como un movimiento helicoidal tangente. La velocidad de un punto  $P$  cualquiera se obtiene sumando la velocidad de deslizamiento de los puntos del eje ( $\mathbf{v}_A$ ) y el momento  $\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}$

Esta descripción del campo de velocidades caracteriza el llamado *movimiento helicoidal tangente*, es decir como una hélice o «sacacorchos», cuyo eje queda definido por (6.23). Los puntos que no estén sobre el eje tienen una componente adicional de la velocidad ( $\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}$ ) perpendicular al mismo.

Esta caracterización del movimiento varía con el tiempo, tanto por el cambio de la dirección de  $\boldsymbol{\Omega}$  como de su módulo. Por lo tanto, en cada momento

existe un movimiento helicoidal, tangente al movimiento en ese instante. Debido a esto, (6.23) se llama «eje instantáneo» del movimiento.

Por otra parte, se denomina «tangente» porque caracteriza, al igual que las tangentes, tan solo la derivada primera del movimiento. El movimiento helicoidal tangente sirve para interpretar el campo de velocidades, pero en cambio no es válido para interpretar el campo de aceleraciones, caracterizado por la derivada segunda, como veremos más abajo.

**Axoides del movimiento.**— A lo largo del movimiento el eje instantáneo del movimiento helicoidal tangente ocupa una posición distinta en cada instante, describiendo una superficie reglada denominada *axoide*. La ecuación paramétrica del axoide será simplemente la expresada por (6.23), tomando como parámetros  $\alpha$  y el tiempo  $t$ . Según describamos el axoide desde el punto de vista del sistema de referencia móvil o del fijo obtendremos dos superficies regladas distintas, denominadas respectivamente *axoide móvil* o *axoide fijo*:

- *Axoide móvil*

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_O}{\Omega^2} + \alpha \boldsymbol{\Omega} \quad (6.25)$$

- *Axoide fijo*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \frac{\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_O}{\Omega^2} + \alpha \boldsymbol{\Omega} \quad (6.26)$$

Por su definición, ambos axoides son superficies regladas. En cada instante tienen en común la generatriz, que es precisamente el eje del movimiento helicoidal tangente en ese instante. Una propiedad importante de los axoides es que *son tangentes entre sí en todos los puntos del eje*. Esta afirmación, a pesar de lo que pudiera parecer intuitivamente en una primera consideración, no es evidente. Conviene precisar que una superficie reglada, en general, no tiene necesariamente un único plano tangente a lo largo de una generatriz; sólo será así si la superficie reglada es además desarrollable, como es el caso de los conos o los cilindros. Sin embargo, un hiperboloide reglado (de una hoja) no es desarrollable y el plano tangente es distinto en cada punto de la generatriz. Los axoides son en general superficies regladas pero no necesariamente desarrollables.

### 6.1.3. Campo de aceleraciones del sólido rígido

Derivando otra vez la expresión de la velocidad (6.19) y aplicando de nuevo la regla de derivación en sistemas móviles (6.12) se obtiene la expresión general

del campo de aceleraciones del sólido:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}). \quad (6.27)$$

El significado de cada uno de estos tres términos es el siguiente (figura 6.6):

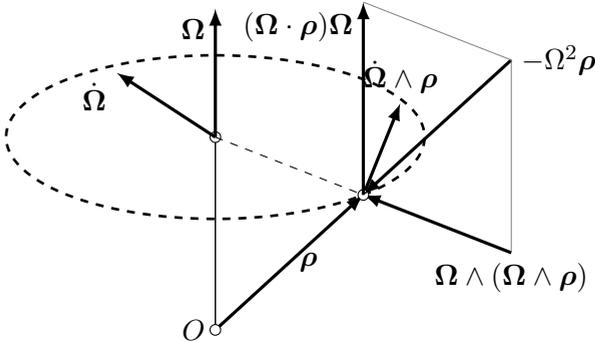


Figura 6.6: *Campo de aceleraciones del sólido rígido: Interpretación geométrica de los distintos términos (Recordamos que por la fórmula de expulsión para el doble producto vectorial resulta  $\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}) = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\Omega} - \Omega^2 \boldsymbol{\rho}$ .)*

- $\mathbf{a}_O$  es la aceleración del origen  $O$ , común para todos los puntos del sólido (aceleración de traslación).
- $\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho}$  es un término perpendicular a  $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$  y  $\boldsymbol{\rho}$ . Aunque por similitud con las fórmulas del movimiento circular pudiera parecer en primera instancia que este término corresponde a una aceleración tangencial, no es así en un caso general. Sólo será tangente a la trayectoria si  $\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$  y la dirección de  $\boldsymbol{\Omega}$  no varía, correspondiendo entonces el movimiento a una rotación permanente alrededor de un eje fijo por  $O$ . En un caso general este término no será tangencial ni siquiera en el movimiento plano (ver más abajo en el apartado 6.1.4 la descomposición en aceleración normal y tangencial para el movimiento plano).
- $\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\rho}) - \rho\Omega^2$  es una aceleración *axípeta* (dirigida hacia el eje), descompuesta en los dos términos anteriores, uno dirigido hacia el centro  $O$  ( $-\rho\Omega^2$ ) y otro según el eje ( $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\rho})$ ).

Se denomina *polo de aceleraciones* al punto en que la aceleración se anula. En general, existe un único punto en que se verifica esto, salvo casos particulares, en que puede no existir, o bien existir una recta de polos. Para obtener el polo, buscamos la solución para  $\boldsymbol{\rho}$  de la expresión (6.27) igualada a cero,

$$\mathbf{0} = \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}).$$

Para obtener la solución de esta ecuación representaremos los productos vectoriales como productos por matrices hemisimétricas (6.15). Denominando  $[\dot{\boldsymbol{\Omega}}]$

y  $[\hat{\Omega}]$  a las matrices hemisimétricas asociadas respectivamente a los productos vectoriales por  $\Omega$  y  $\hat{\Omega}$ :

$$\{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{a}_O\} + [\hat{\Omega}]\{\rho\} + [\hat{\Omega}](\hat{\Omega}\{\rho\}) = \{\mathbf{a}_O\} + ([\hat{\Omega}] + [\hat{\Omega}]^2)\{\rho\},$$

cuya solución,

$$\{\rho\} = -([\hat{\Omega}] + [\hat{\Omega}]^2)^{-1}\{\mathbf{a}_O\},$$

es por lo general única, siempre que  $([\hat{\Omega}] + [\hat{\Omega}]^2)$  sea regular y admita inversa. En caso contrario, si  $([\hat{\Omega}] + [\hat{\Omega}]^2)$  es singular, en principio no existirá polo de aceleraciones, salvo casos degenerados en los que puede existir una línea o un plano entero de polos.

### 6.1.4. Caso particular del movimiento plano

Decimos que un sólido tiene un movimiento plano cuando las velocidades de todos sus puntos son paralelas a un plano  $\Pi$  fijo. Para que esto se cumpla, la velocidad de rotación  $\Omega$  ha de ser perpendicular al plano. En efecto, recordando la expresión del campo de velocidades (6.19),

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \Omega \wedge \rho,$$

tanto  $\mathbf{v}$  como  $\mathbf{v}_O$  pertenecen al plano  $\Pi$ , por lo tanto, para que  $\Omega \wedge \rho$  pertenezca también al plano  $\Pi$ ,  $\Omega$  ha de ser normal al mismo.

Bastará con estudiar el movimiento de una sección plana del sólido paralela al plano dado para caracterizar el movimiento de cualquier punto, aunque el sólido en sí no sea plano. Los puntos fuera de esta sección tendrán idéntica velocidad que sus proyecciones sobre el plano de referencia.

Tomaremos convencionalmente el triedro de referencia de forma que el vector  $\mathbf{k}$  defina la normal al plano. Así, la velocidad de rotación se puede representar tan sólo por una magnitud escalar,  $\Omega = \Omega \mathbf{k}$  (figura 6.7).

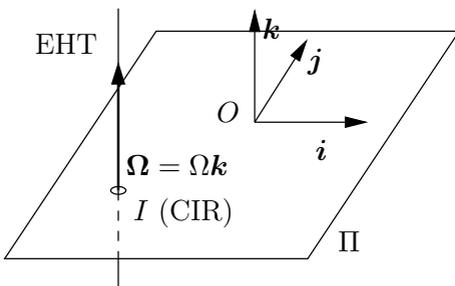


Figura 6.7: Orientación del triedro en el movimiento plano.

### Centro instantáneo de rotación

En un movimiento plano, el eje del movimiento helicoidal tangente (EHT) es una recta con la dirección de  $\boldsymbol{\Omega}$  y por tanto normal al plano  $\Pi$ . Al estar contenida la velocidad de un punto cualquiera del sólido  $\mathbf{v}_O$  en el plano, se cumplirá  $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_O = 0$ , por lo que el movimiento es una *rotación pura*. El eje del movimiento (EHT) tiene velocidad nula en todos sus puntos, será por tanto un *eje instantáneo de rotación (EIR)*. La intersección de este eje con el plano se denomina *centro instantáneo de rotación (CIR)*. Para definir las coordenadas de este punto en el plano, particularizamos las del eje del movimiento helicoidal (6.25):

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_O}{\Omega^2} + \alpha \boldsymbol{\Omega},$$

ya que  $\alpha = 0$  en el plano  $\Pi$ . Sustituyendo  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{k}$  obtenemos

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{k} \wedge \mathbf{v}_O}{\Omega}. \quad (6.28)$$

En el movimiento plano se puede medir la rotación absoluta mediante un parámetro angular  $\varphi$ , ángulo girado por una recta determinada del plano móvil con respecto a una referencia fija. Teniendo en cuenta entonces  $\Omega = d\varphi/dt$  y  $\mathbf{v}_O = d\mathbf{r}_O/dt$ , se puede expresar (6.28) como

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{k} \wedge \frac{d\mathbf{r}_O}{d\varphi}. \quad (6.29)$$

**Curvas polares.**— Análogamente a los axoides definidos para el movimiento tridimensional general, el CIR en el movimiento plano describe unas curvas determinadas dentro del plano a lo largo del movimiento. Este lugar geométrico se llama *polar móvil*, si es el observado desde la referencia móvil, y *polar fija* si es el observado desde la referencia fija. Alternativamente, se pueden llamar también *ruleta* y *base*, respectivamente. Las expresiones de estos lugares geométricos son:

- *Polar móvil*

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{k} \wedge \mathbf{v}_O}{\Omega} = \mathbf{k} \wedge \frac{d\mathbf{r}_O}{d\varphi} \quad (6.30)$$

- *Polar fija*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \frac{\mathbf{k} \wedge \mathbf{v}_O}{\Omega} = \mathbf{r}_O + \mathbf{k} \wedge \frac{d\mathbf{r}_O}{d\varphi} \quad (6.31)$$

La expresión en coordenadas cartesianas de las curvas polares se puede obtener directamente desarrollando en componentes estas ecuaciones vectoriales (6.30) y (6.31), empleando las coordenadas móviles del triedro del sólido o las del triedro fijo en cada caso.

## Aceleraciones

Desarrollando los distintos términos de la expresión general del campo de aceleraciones (6.27) para el caso particular del movimiento plano:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} &= \Omega \mathbf{k}, \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} &= \dot{\Omega} \mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\rho}, \\ \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}) &= -\Omega^2 \boldsymbol{\rho};\end{aligned}$$

de donde obtenemos la siguiente expresión

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \dot{\Omega} \mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\rho} - \Omega^2 \boldsymbol{\rho}. \quad (6.32)$$

Los términos en esta ecuación tienen la siguiente interpretación:

- $\mathbf{a}_O$  es la aceleración de  $O$ , término común de traslación para todos los puntos del sólido;
- $\dot{\Omega} \mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\rho}$  es una componente perpendicular al radio vector  $\boldsymbol{\rho}$  (no necesariamente tangencial a la trayectoria, tan sólo lo será en el caso de que  $O$  coincida con el CIR);
- $-\Omega^2 \boldsymbol{\rho}$  es una componente «centrípeta», dirigida hacia  $O$  (dirección que no tiene porqué ser normal a la trayectoria, salvo en el caso arriba mencionado).

El polo de aceleraciones se obtiene igualando a cero la expresión (6.32) y despejando  $\boldsymbol{\rho}$ . Para ello, multiplicamos vectorialmente la igualdad por  $\mathbf{k}$ , y eliminamos  $(\mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\rho})$  entre la nueva expresión obtenida y (6.32), resultando finalmente:

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\dot{\Omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{a}_O + \Omega^2 \mathbf{a}_O}{\dot{\Omega}^2 + \Omega^4} \quad (\text{polo de aceleraciones})$$

Otra forma de estudiar la aceleración en el movimiento plano es mediante la consideración del movimiento como una rotación instantánea en torno al CIR (figura 6.8). Así, la velocidad de un punto cualquiera  $P$  se puede expresar como:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{d} = \Omega \mathbf{k} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C), \quad (6.33)$$

donde  $\mathbf{r}$  es el vector posición de  $P$ ,  $\mathbf{r}_C$  el del CIR ( $C$ ), y  $\mathbf{d} = \mathbf{r}_{CP} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_C$ . Derivando (6.33) respecto a  $t$ :

$$\mathbf{a} = \dot{\Omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{d} + \Omega \mathbf{k} \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{v}_C),$$

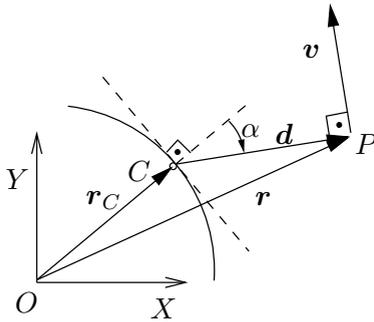


Figura 6.8: Velocidad de un punto cualquiera en relación al CIR ( $C$ ).

donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad del punto  $P$  del sólido, mientras que  $\mathbf{v}_C$  es la velocidad de sucesión del punto geométrico  $C$  (CIR)<sup>9</sup>.

Considerando finalmente que  $\mathbf{v} = \Omega \mathbf{k} \wedge \mathbf{d}$ , resulta la siguiente expresión de la aceleración, en la que el término es tangencial a la trayectoria, el segundo normal, y el tercero tiene componentes según estas dos direcciones:

$$\mathbf{a} = \underbrace{\dot{\Omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{d}}_{\text{tangenc.}} - \underbrace{\Omega^2 \mathbf{d}}_{\text{normal}} - \underbrace{\Omega \mathbf{k} \wedge \mathbf{v}_C}_{\text{tangenc.}} \quad (6.34)$$

+ normal

**Aceleración del centro instantáneo de rotación.**— Otra consideración interesante surge al desarrollar el campo de aceleraciones en relación al punto material situado en un instante dado sobre el CIR. Para diferenciar este *punto material* del sólido del *punto geométrico* CIR, denominaremos  $C^*$  al punto material, mientras que el CIR (punto geométrico) es  $C$ . Aunque en un instante dado la posición de ambos coincide ( $\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_{C^*}$ ), su velocidad difiere:

$$\mathbf{v}_C = \frac{d\mathbf{r}_C}{dt} \neq \mathbf{0},$$

$$\mathbf{v}_{C^*} = \mathbf{0}.$$

El campo de aceleraciones puede calcularse particularizando la expresión general (6.27) para  $O \equiv C^*$  y  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{d} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_C$ ,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{C^*} + \dot{\Omega} \wedge \mathbf{d} + \Omega \wedge (\Omega \wedge \mathbf{d}).$$

<sup>9</sup>Nótese que  $C$ , Centro Instantáneo de Rotación, queda definido por una condición geométrica, por lo que no coincidirá necesariamente con una misma partícula del sólido a lo largo del movimiento. Sería incorrecto por tanto asignar a la derivada de  $\mathbf{r}_C$  el valor (nulo) de la velocidad del punto del sólido situado en  $C$ . En general,  $d\mathbf{r}_C/dt = \mathbf{v}_C$  tiene un valor no nulo, que para distinguir de la velocidad del punto del sólido, denominamos «velocidad de sucesión».

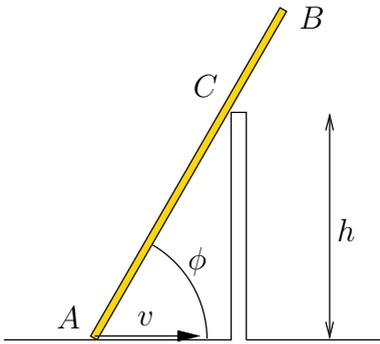


Figura 6.9: *Ejemplo 6.2; escalera que desliza sobre el suelo horizontal y se apoya sobre un muro de altura  $h$ .*

Otra expresión equivalente para el campo de aceleraciones es la proporcionada por (6.34).

Si se particulariza la expresión (6.34) para el propio centro instantáneo de rotación  $P = C^*$ , teniendo en cuenta  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ , resulta

$$\mathbf{a}_{C^*} = -\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_C.$$

Como consecuencia, es interesante observar que, aunque la velocidad del punto del sólido situado en el CIR sea nula ( $\mathbf{v}_{C^*} = \mathbf{0}$ ), su aceleración no lo tiene porque ser ( $\mathbf{a}_{C^*} \neq \mathbf{0}$ ). Esto se debe a que el CIR coincide con distintos puntos del sólido en distintos instantes, y una partícula que está situada sobre el CIR en un momento dado dejará de tener velocidad nula al instante siguiente, por lo que su aceleración no será en general nula.

**EJEMPLO 6.2:** La escalera recta de la figura 6.9 se mueve en un plano vertical, apoyándose sobre la arista superior de un muro vertical de altura  $h$  perpendicular al plano del movimiento, mientras el extremo  $A$  desliza sobre el suelo horizontal con velocidad constante  $v$  dirigida hacia el muro. En el instante inicial la distancia entre el muro y el extremo  $A$  tiene un valor  $b$ . Se pide determinar, en función del ángulo  $\phi$  que forma la escalera con la horizontal:

- Velocidad y aceleración angulares de la escalera;
- Posición del centro instantáneo de rotación y velocidad del punto  $C$  de la escalera;
- Ecuaciones de las polares fija y móvil.

*Solución.*

a.— La velocidad del punto  $C$  de la escalera ha de ser paralela a la propia escalera. Como también conocemos la velocidad del punto  $A$ , trazando perpendiculares a ambas se obtiene el CIR que llamaremos  $I$  (figura 6.10). Escribiendo

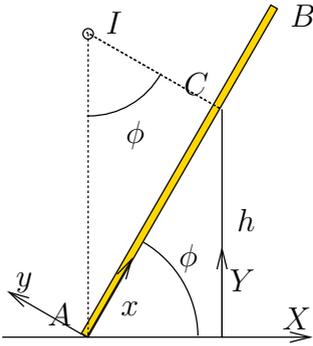


Figura 6.10: *Ejemplo 6.2; El CIR ( $I$ ) se encuentra sobre las perpendiculares a las velocidades de los puntos  $A$  y  $C$  de la escalera.*

la relación geométrica que define el ángulo  $\phi$  y derivando:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{h}{b - vt} \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi}(1 + \operatorname{tg}^2 \phi) = \frac{vh}{(b - vt)^2}.$$

De aquí despejamos la velocidad angular  $\Omega = \dot{\phi}$ :

$$\dot{\phi} = \frac{vh}{(b - vt)^2 + h^2}.$$

Derivando una segunda vez se obtiene la aceleración:

$$\ddot{\phi} = \frac{2hv^2(b - vt)}{[(b - vt)^2 + h^2]^2}.$$

Otras expresiones de velocidad y aceleración que resultan convenientes son en función del propio ángulo  $\phi$ :

$$(-X_A) = \frac{h}{\operatorname{tg} \phi} \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{h\dot{\phi}}{\operatorname{sen}^2 \phi} \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{v}{h} \operatorname{sen}^2 \phi \quad (6.35)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{v}{h} 2\dot{\phi} \operatorname{sen} \phi \cos \phi = 2\frac{v^2}{h^2} \operatorname{sen}^3 \phi \cos \phi \quad (6.36)$$

b.— El centro instantáneo de rotación tiene las coordenadas:

$$\begin{aligned} X_I &= -\frac{h}{\operatorname{tg} \phi} = -(b - vt); \\ Y_I &= \frac{h}{\operatorname{sen}^2 \phi} = \frac{(b - vt)^2 + h^2}{h}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

la velocidad del punto  $C$  de la barra se puede obtener empleando la propiedad de equiproyectividad, con el punto  $A$  de velocidad conocida. Llamando  $\alpha$  al ángulo que forma la velocidad en cada punto con la recta que los une:

$$v_A \cos \alpha_A = v_C \cos \alpha_C \quad \Rightarrow \quad v_C = v \cos \phi.$$

También podría haberse obtenido  $v_C$  considerando que es una rotación alrededor del CIR:

$$v_C = \dot{\phi} \overline{IC} = \dot{\phi} Y_I \cos \phi = v \cos \phi.$$

En expresión vectorial,

$$\mathbf{v}_C = v \cos \phi (\cos \phi \mathbf{I} + \operatorname{sen} \phi \mathbf{J}).$$

c.— La polar fija (base) viene definida por la ecuación del CIR (6.37), de forma paramétrica a través de  $\phi$  (o  $t$ ). Eliminando este parámetro se puede escribir la ecuación implícita:

$$Y = h + \frac{X^2}{h}.$$

Se trata de una parábola de eje vertical cuyo vértice está en  $C$ .

La polar móvil (ruleta) se define a través de las coordenadas del CIR en la referencia móvil ( $Axy$ ):

$$x = \frac{h}{\operatorname{sen} \phi}; \quad y = \frac{x}{\operatorname{tg} \phi} = \frac{h}{\operatorname{sen} \phi \operatorname{tg} \phi}$$

En la figura 6.11 se dibujan las polares en varias configuraciones distintas del movimiento, pudiéndose observar el movimiento de rodadura sin deslizamiento de la polar móvil sobre la fija.

□

## 6.2. Composición de movimientos

### 6.2.1. Composición de movimientos infinitesimales

El campo de velocidades del sólido es equivalente a la definición de los movimientos infinitesimales, como queda expresado en la ecuación (6.20). Supongamos que se efectúan dos movimientos sucesivos de un sólido  $\mathcal{B}$ , el primero caracterizado por la velocidad de rotación  $\boldsymbol{\Omega}_1$  y el segundo por  $\boldsymbol{\Omega}_2$ . Las rotaciones infinitesimales serán respectivamente  $d\boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\Omega}_1 dt$  y  $d\boldsymbol{\theta}_2 = \boldsymbol{\Omega}_2 dt$ . El desplazamiento infinitesimal relativo a  $O$  para el primer movimiento será

$$d\rho_1 = d\mathbf{r} - (d\mathbf{r}_O)_1 = d\boldsymbol{\theta}_1 \wedge \boldsymbol{\rho}. \quad (6.38)$$

El desplazamiento debido al segundo movimiento es

$$d\rho_2 = d\boldsymbol{\theta}_2 \wedge \boldsymbol{\rho}_1 = d\boldsymbol{\theta}_2 \wedge (\boldsymbol{\rho} + d\rho_1) \approx d\boldsymbol{\theta}_2 \wedge \boldsymbol{\rho}, \quad (6.39)$$



donde se han despreciado los infinitésimos de segundo orden. Sumando los dos desplazamientos (6.38) y (6.39),

$$d\rho = d\rho_1 + d\rho_2 = (d\theta_2 + d\theta_1) \wedge \rho. \tag{6.40}$$

En definitiva, el movimiento relativo a  $O$ , que corresponde a las rotaciones infinitesimales, se obtiene como la suma vectorial de dichos vectores de rotación. Esto es equivalente a considerar una velocidad de rotación resultante como suma de las dos velocidades:

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2. \tag{6.41}$$

Respecto a las traslaciones de ambos movimientos es obvio que se verifica también la suma,

$$d\mathbf{r}_O = (d\mathbf{r}_O)_1 + (d\mathbf{r}_O)_2 \Rightarrow \mathbf{v}_O = (\mathbf{v}_O)_1 + (\mathbf{v}_O)_2. \tag{6.42}$$

Un corolario importante de este resultado es, puesto que la suma de vectores es conmutativa, que la composición de velocidades hereda dicha propiedad, es indiferente el orden en el que se consideran los movimientos individuales.

### 6.2.2. Composición del movimiento de 2 sistemas

A continuación realizaremos la interpretación de la composición de movimientos a partir de las propiedades de los campos de momentos o sistemas de vectores deslizantes (SVD) correspondientes. Comenzaremos por el caso elemental de la composición de movimientos relativos a dos sistemas. Suponemos uno  $S_0$  «fijo» y otro  $S_1$  «móvil» (figura 6.12). Según la expresión del campo

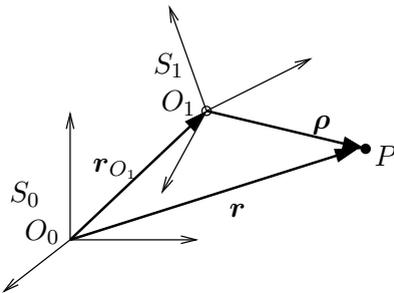


Figura 6.12: Composición de movimientos entre dos sistemas  $S_0$  y  $S_1$ .

de velocidades en el movimiento relativo (1.26) las velocidades son:

$$\underbrace{\mathbf{v}_{\text{abs}}}_{\mathbf{v}_{S_0}} = \underbrace{\mathbf{v}_{O_1} + \Omega \wedge \rho}_{\mathbf{v}_{\text{arr}}} + \underbrace{\mathbf{v}_{\text{rel}}}_{\mathbf{v}_{S_1}};$$

donde se han tomado las magnitudes  $\mathbf{v}_{S_1}$  como relativas, y  $\mathbf{v}_{S_0}$  como absolutas. Así, para obtener las velocidades respecto a  $S_0$  basta con sumar a la velocidad respecto a  $S_1$  el término de arrastre correspondiente al movimiento del punto como sólido rígido.

### 6.2.3. Composición del movimiento de $n$ sistemas

Supongamos ahora el caso general de composición de  $n$  movimientos, en el que el movimiento esté definido respecto de un sistema  $S_n$ , el de éste a su vez respecto de otro  $S_{n-1}$ , y así sucesivamente hasta llegar a  $S_0$ . Interesa conocer el movimiento absoluto (respecto de  $S_0$ ), resultante de esta composición de  $n$  movimientos.

El campo de velocidades de  $S_n$  respecto a  $S_{n-1}$  es un campo de momentos:

$$\mathbf{v}_{n|n-1} = \mathbf{v}_{O_n} + \boldsymbol{\Omega}_n \wedge \boldsymbol{\rho}_n,$$

siendo  $\mathbf{v}_{O_n}$  la velocidad del origen  $O_n$  de  $S_n$ , relativa a  $S_{n-1}$ , y  $\boldsymbol{\Omega}_n$  la velocidad de rotación de  $S_n$  relativa a  $S_{n-1}$ .

Para obtener el movimiento respecto a  $S_{n-2}$  basta considerar la expresión anterior de  $\mathbf{v}_{n|n-1}$  como velocidad relativa respecto a  $S_{n-1}$ , y sumarle el término de arrastre correspondiente al movimiento de  $S_{n-1}$  respecto a  $S_{n-2}$ :

$$\mathbf{v}_{n|n-2} = \underbrace{\mathbf{v}_{O_{n-1}} + \boldsymbol{\Omega}_{n-1} \wedge \boldsymbol{\rho}_{n-1}}_{\mathbf{v}_{\text{arr}} = \mathbf{v}_{n-1|n-2}} + \underbrace{\mathbf{v}_{O_n} + \boldsymbol{\Omega}_n \wedge \boldsymbol{\rho}_n}_{\mathbf{v}_{\text{rel}} = \mathbf{v}_{n|n-1}}$$

A continuación se repite la operación, considerando  $\mathbf{v}_{n|n-2}$  como velocidad relativa, y así consecutivamente hasta llegar a  $S_0$ .

Se puede interpretar esta composición considerando cada campo de velocidades relativo como el campo de momentos de un sistema de vectores deslizantes (SVD). La velocidad absoluta, composición de los diversos movimientos relativos, es el resultado de la suma de los campos de momentos. Esta suma es igual al campo de momentos del sistema suma, composición de todos los campos de momentos. La composición de SVD se realiza sumando las resultantes ( $\boldsymbol{\Omega} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\Omega}_i$ ) y los momentos en un punto  $O$  dado ( $\mathbf{v}_O = \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_O)_{i|i-1}$ ). Por lo tanto, realizando la suma de los SVD relativos tendremos caracterizado el SVD que corresponde al movimiento absoluto composición de los mismos.

El campo de aceleraciones (1.29) en un movimiento relativo no se puede interpretar como la suma de un campo de momentos. Por tanto no se puede aplicar el método de composición de SVD. Para calcular las aceleraciones es necesario ir componiendo uno a uno los movimientos relativos, calculando para cada composición los términos de aceleración relativa y Coriolis correspondientes.

EJEMPLO 6.3: Composición de *dos traslaciones*.

*Solución.* Cada traslación como SVD se reduce a un par (momento  $\mathbf{v}_O \neq \mathbf{0}$ , resultante  $\mathbf{\Omega} = \mathbf{0}$ ). La suma los dos SVD se reduce a otro par, suma vectorial de los dos; por lo tanto, el movimiento compuesto es otra traslación, de velocidad la suma  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ .  $\square$

EJEMPLO 6.4: Composición de *dos rotaciones de ejes concurrentes*.

*Solución.* Son dos sistemas con resultante no nula ( $\mathbf{\Omega} \neq \mathbf{0}$ ) y momento nulo en el eje ( $\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$  para  $O \in$  eje). La suma es otra rotación pura, de resultante  $\mathbf{\Omega}_1 + \mathbf{\Omega}_2$ , aplicada en el punto de intersección de los ejes de rotación.  $\square$

EJEMPLO 6.5: Composición de *dos rotaciones de ejes paralelos*.

*Solución.* Se puede interpretar como un caso particular de ejes concurrentes que se cortan en un punto impropio. El resultado es otra rotación, de eje paralelo y coplanario a los anteriores, situado a la distancia adecuada (se calcula ésta de forma que el momento  $\mathbf{v}$  en un punto sea igual y de signo contrario para cada una de las rotaciones componentes). En el caso degenerado en que ambas rotaciones sean iguales y de distinto signo, el resultado es una traslación pura, con velocidad igual al producto de la velocidad de rotación por la distancia entre los ejes.  $\square$

EJEMPLO 6.6: Composición de *dos rotaciones de ejes no concurrentes ni paralelos*.

*Solución.* El resultado es un sistema general (traslación más rotación), por lo que la interpretación como SVD no ofrece ventaja especial.  $\square$

EJEMPLO 6.7: Interpretación del movimiento de la tierra (figura 6.13).

*Solución.* Se trata de un caso particular interesante, que se puede interpretar como resultado de la composición de dos movimientos elementales:

- a. *Traslación* de la Tierra alrededor del Sol, con órbita elíptica (aproximadamente circular)<sup>10</sup>, a la distancia media de 149 millones de kilómetros. El período orbital es de 365,2564 días. La trayectoria de esta órbita forma un plano denominado «*eclíptica*».

---

<sup>10</sup>No debe confundirse una traslación circular o elíptica con una rotación; en la traslación todos los puntos del sólido tienen igual velocidad en un instante dado, aunque esta velocidad del conjunto varíe con el tiempo, describiendo así trayectorias curvas para cada punto.

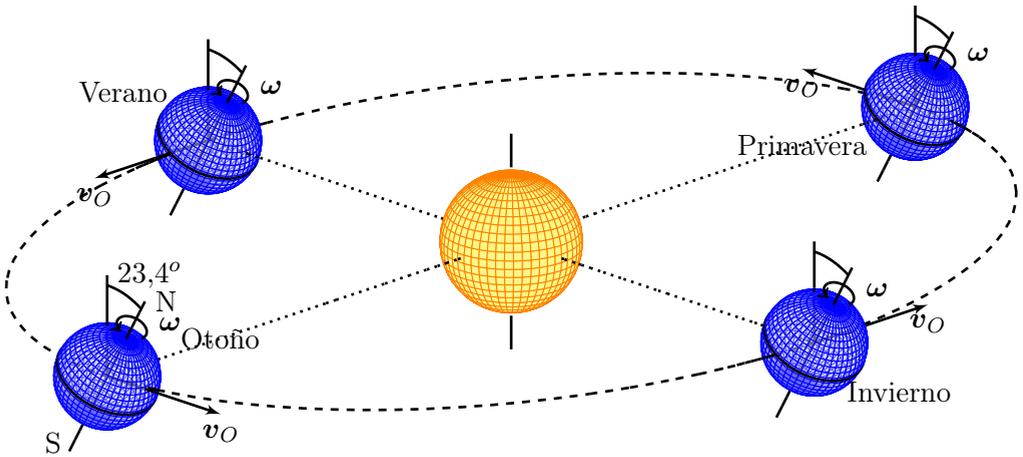


Figura 6.13: *Movimiento de la tierra: composición de traslación y rotación.*

- b. *Rotación*  $\omega$  de la Tierra en torno a su eje Norte-Sur, que mantiene su dirección aproximadamente invariante, con una inclinación aproximada de  $23,4^\circ$  respecto de la normal al plano de la eclíptica. La rotación propia de este movimiento es la rotación sidérea, que tiene un período (día sidéreo) algo menor a 1 día solar<sup>11</sup>.

Por consiguiente, el movimiento de la Tierra es un movimiento helicoidal tangente general con deslizamiento, no equivale a una rotación instantánea salvo en dos puntos singulares de la órbita: los solsticios de verano e invierno, en los que se cumple  $\omega \cdot v_O = 0$ .

En la realidad, el movimiento de la tierra tiene algunas perturbaciones adicionales sobre el sencillo esquema delineado arriba, como por ejemplo, las pequeñas oscilaciones de la dirección del eje de la Tierra, o el fenómeno de precesión de los equinoccios. Este último consiste en una lenta variación de la orientación del eje de rotación de la tierra, precesionando alrededor de la perpendicular al eje de la eclíptica, de periodo 26.000 años (ver el apartado 8.4 para una discusión de éste fenómeno desde el punto de vista de la dinámica).  $\square$

<sup>11</sup>Para volver a estar enfrentado con el sol, un punto de la superficie de la tierra tiene que girar algo más que  $360^\circ$ , ya que durante ese tiempo la tierra se ha trasladado algo en su órbita alrededor del sol; por tanto, 1 día solar (86 400 s.) equivale a un giro algo mayor a los  $360^\circ$  del día sidéreo (86 164 s.).

### 6.2.4. Movimiento de sólidos tangentes

Consideremos dos sólidos,  $S_1$  (fijo) y  $S_2$  (móvil) que permanecen tangentes durante el movimiento. A lo largo del mismo, el punto de tangencia  $A$  define sendas curvas en cada uno de los dos sólidos, que denominamos  $C_1$  y  $C_2$  (figura 6.14). Es posible imaginar intuitivamente estas curvas como dibujadas por una partícula entintada, que se sitúa constantemente en el punto  $A$ , y que va manchando los dos sólidos. Expresando la velocidad de sucesión del punto

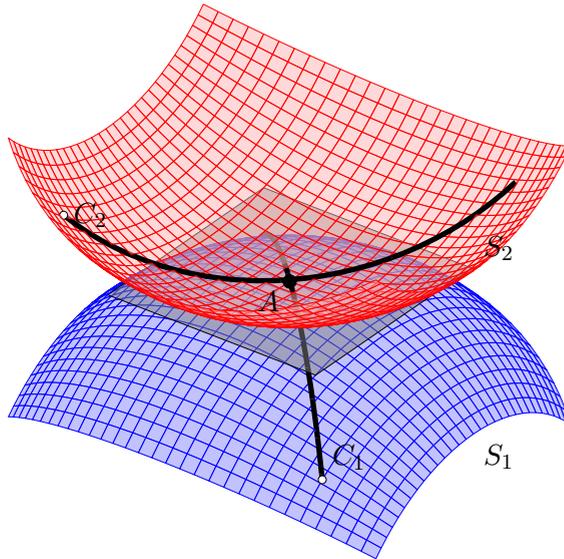


Figura 6.14: Huella dejada por el punto de contacto  $A$  sobre los sólidos tangentes  $S_1$  y  $S_2$ .

geométrico  $A$  en cada sistema:

$$\mathbf{v}_{\text{abs}} = \mathbf{v}_{\text{arr}} + \mathbf{v}_{\text{rel}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_{A|1} = \mathbf{v}_{\text{arr}} + \mathbf{v}_{A|2} \tag{6.43}$$

$\mathbf{v}_{A|1}$  es tangente a  $C_1$ , y  $\mathbf{v}_{A|2}$  lo es a  $C_2$ . A su vez, ambas velocidades pertenecen al plano tangente común. Por lo tanto,  $\mathbf{v}_{\text{arr}} = \mathbf{v}_{A|1} - \mathbf{v}_{A|2}$  (velocidad del punto del sólido  $S_2$  que coincide con  $A$  en un instante dado) ha de ser tangente a ambos sólidos. Esta velocidad se llama *velocidad de deslizamiento*:  $\mathbf{v}_d \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{v}_{A|1} - \mathbf{v}_{A|2}$ .

El movimiento (relativo) en el punto de contacto se puede reducir entonces a una velocidad de deslizamiento  $\mathbf{v}_d$  y una rotación de velocidad instantánea  $\mathbf{\Omega}$ , cuyo eje pasa por el punto de tangencia.

En un caso general,  $\mathbf{\Omega}$  tendrá una proyección sobre el plano tangente, llamada velocidad de rodadura  $\mathbf{\Omega}_r$ , y otra normal al mismo, llamada velocidad de pivotamiento  $\mathbf{\Omega}_p$  (figura 6.15). Denominando  $\mathbf{N}$  a la normal común en el

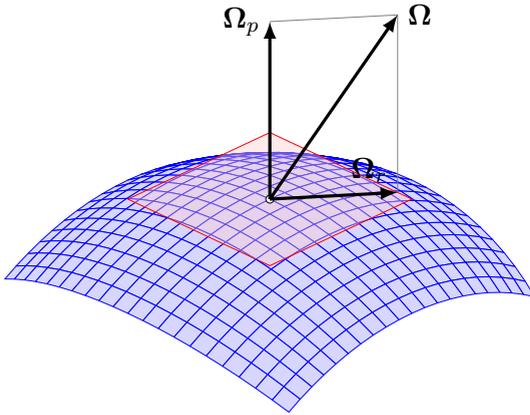


Figura 6.15: Componentes de rodadura y pivotamiento de la velocidad de rotación,  $\Omega = \Omega_p + \Omega_r$ .

punto de tangencia,

$$\Omega_p \stackrel{\text{def}}{=} (\Omega \cdot N)N$$

$$\Omega_r \stackrel{\text{def}}{=} \Omega - \Omega_p$$

Cuando la velocidad relativa en el punto de contacto es nula ( $\mathbf{v}_d = \mathbf{0}$ ) no hay deslizamiento entre ambos sólidos. Se dice entonces que un sólido «rueda sin deslizar» sobre el otro. Este término no implica, por lo general, que la rodadura se efectúe sin pivotamiento, sino tan sólo la ausencia de deslizamiento.

EJEMPLO 6.8: Un cilindro recto de radio  $r$  se mueve manteniéndose tangente a un cono fijo, de radio de la base  $r$  y semiángulo  $\alpha$ , de forma que comparten en todo momento una generatriz. Una base del cilindro rueda con velocidad uniforme sin deslizar sobre la base del cono, de forma que realiza una revolución completa alrededor del eje del cono en un tiempo  $\tau$ . La otra base del cilindro se mantiene en contacto con el vértice del cono. Obtener las expresiones de:

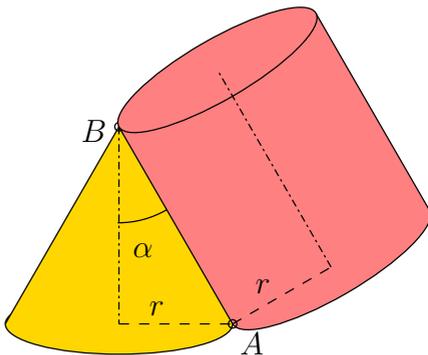


Figura 6.16: Ejemplo 6.8; sección del cono y cilindro por el plano meridional.

- a. velocidad de rotación del cilindro, calculando la componente de pivota-  
miento;
- b. axoides del movimiento y aceleración angular del cilindro;
- c. aceleración del punto  $A$  de la base del cilindro en contacto con la base  
del cono.

(Examen parcial, 3/2/1995)

*Solución.*

a.— En la figura se muestra una sección por el plano meridional, que contiene a los ejes del del cono ( $BC$ ) y del cilindro ( $QM$ ), así como a la generatriz común  $AB$ . El punto  $A$  de contacto entre las bases tiene velocidad nula, debido a la condición de rodadura. Asimismo, el punto  $O$  de corte del eje del cilindro con el eje del cono es un punto fijo del movimiento. Por lo tanto, el movimiento instantáneo es una rodadura alrededor del eje  $OA$ . A su vez,

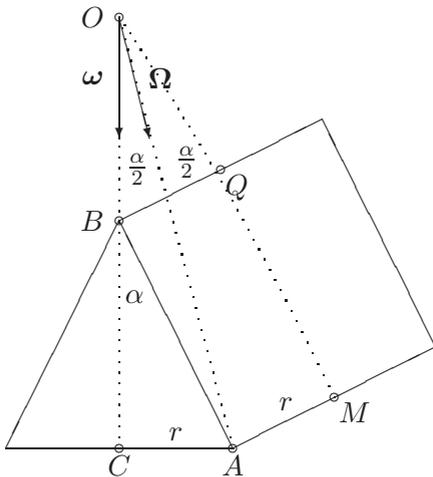


Figura 6.17: *Ejemplo 6.8; eje instantáneo de rotación y descomposición del vector  $\Omega$*

en los sucesivos instantes del movimiento, el plano meridional de la figura va girando alrededor del eje  $OC$ . En consecuencia, a lo largo del movimiento el eje instantáneo  $OA$  define un cono de eje  $OC$ .

En la figura observamos que el ángulo  $\widehat{COM} = \alpha$ . Asimismo, los triángulos rectángulos  $AOC$  y  $AOM$  son iguales por compartir hipotenusa y tener un cateto igual ( $r$ ), por lo que los ángulos  $\widehat{AOC} = \widehat{AOM} = \alpha/2$  son iguales.

El punto  $Q$  del eje del cilindro desarrolla un movimiento circular, alrededor del eje  $OC$ . Su velocidad es

$$v_Q = \frac{2\pi}{\tau} r \cos \alpha;$$

por otra parte, interpretando el movimiento como rotación de velocidad  $\Omega$  alrededor del eje  $OA$

$$v_Q = \Omega \cdot \overline{OQ} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \Omega r \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$$

Igualando ambas expresiones, y en función del versor  $\mathbf{u} = \mathbf{r}_{OA}/|\mathbf{r}_{OA}|$ , se obtiene

$$\Omega = \frac{4\pi}{\tau} \cos \frac{\alpha}{2} \mathbf{u}.$$

La componente de pivotamiento es la proyección sobre la normal a  $AB$ :

$$\Omega_p = \Omega \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \Omega_p = \frac{2\pi}{\tau} \operatorname{sen} \alpha.$$

b.— En el movimiento, el eje  $OA$  gira alrededor del eje  $OC$  con velocidad angular  $\boldsymbol{\omega} = (2\pi/\tau)\mathbf{k}$ , siendo  $\mathbf{k} = \mathbf{r}_{OC}/|\mathbf{r}_{OC}|$ . Por tanto los axoides son:

*Axoide fijo:* cono de eje  $OC$ , vértice  $O$ , semiángulo  $\alpha/2$ .

*Axoide móvil:* cono de eje  $OM$ , vértice  $O$ , semiángulo  $\alpha/2$ .

La aceleración angular, al ser constante el módulo de  $\Omega$ , proviene de la rotación  $\boldsymbol{\omega}$ :

$$\dot{\Omega} = \boldsymbol{\omega} \wedge \Omega = \frac{4\pi^2}{\tau^2} \operatorname{sen} \alpha \mathbf{j}.$$

siendo  $\mathbf{j}$  el versor normal al plano de la figura.

c.— Para obtener la aceleración de  $A$  se aplica la expresión general

$$\mathbf{a}_A = \underbrace{\mathbf{a}_O}_{=0} + \dot{\Omega} \wedge \mathbf{r}_{OA} + \Omega \wedge \underbrace{(\Omega \wedge \mathbf{r}_{OA})}_{=0}$$

obteniéndose

$$\mathbf{a}_A = \frac{4\pi^2}{\tau^2} r \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \mathbf{v} = \frac{8\pi^2}{\tau^2} r \cos \frac{\alpha}{2} \mathbf{v}.$$

siendo  $\mathbf{v}$  el versor perpendicular a  $OA$  dentro del plano de la figura.  $\square$

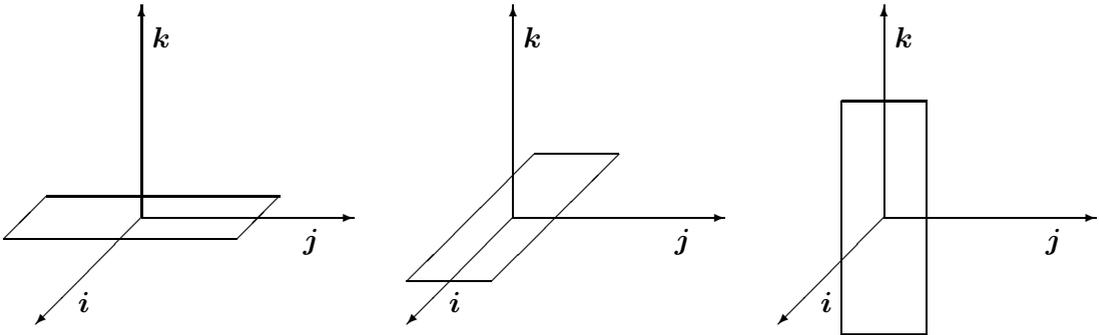
## 6.3. Rotación finita del sólido

### 6.3.1. Composición de rotaciones finitas

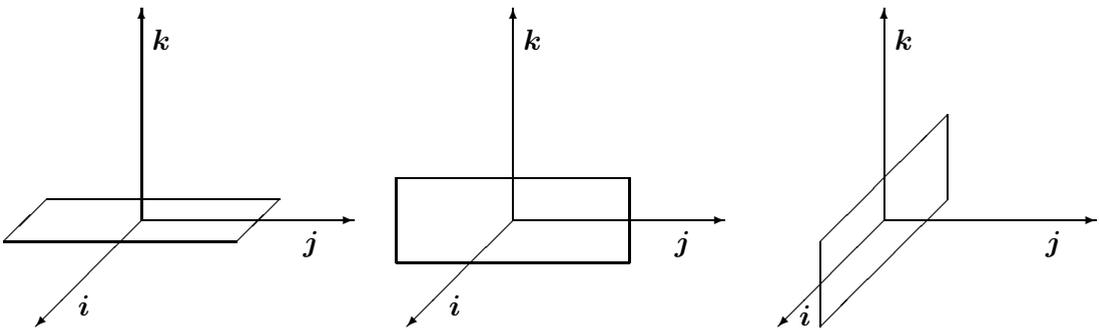
Como se ha visto antes (sección 6.2.1) la composición de rotaciones infinitesimales es conmutativa, el resultado es independiente del orden en que se

produzcan dichas rotaciones. Este resultado es relevante para la expresión del campo de velocidades a partir de la velocidad de rotación.

Al contrario que para las rotaciones infinitesimales, *la composición de rotaciones finitas no es una operación conmutativa*. Esto se puede comprobar fácilmente mediante un ejemplo significativo, aplicando sucesivamente a un sólido dos rotaciones finitas elementales según ejes distintos, en diferente orden (figura 6.18). Esta falta de conmutatividad se debe a que, como se verá a con-



a) rotación  $\frac{\pi}{2}\mathbf{k}$  seguida de  $\frac{\pi}{2}\mathbf{j}$ .



b) rotación  $\frac{\pi}{2}\mathbf{j}$  seguida de  $\frac{\pi}{2}\mathbf{k}$ .

Figura 6.18: *Las rotaciones finitas no son conmutativas: en el caso a) se realiza primero la rotación  $(\pi/2)\mathbf{k}$  seguida de  $(\pi/2)\mathbf{j}$ ; en el caso b)  $(\pi/2)\mathbf{j}$  seguida de  $(\pi/2)\mathbf{k}$ , siendo el resultado claramente diferente.*

tinuación, las rotaciones finitas se caracterizan como un tensor de rotación. De forma equivalente, en componentes sería el producto de la matriz de componentes del tensor por el vector posición. La composición de rotaciones equivale pues al producto de tensores (o de matrices en componentes), operación que

no es conmutativa.

### 6.3.2. La Rotación finita como cambio de base

Comenzaremos por desarrollar una interpretación matricial de la rotación finita a través del cambio de base asociado. Sea  $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  una base ortonormal ligada al sólido (*triedro del cuerpo*) y  $(O; \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$  una base ortonormal fija (*triedro fijo*). Se puede interpretar la rotación del sólido a partir del cambio de base entre ambos triedros. Supongamos este cambio definido por una matriz  $[\mathbf{R}]$ , de forma que<sup>12</sup>:

$$(\mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k}) = (\mathbf{I} \mathbf{J} \mathbf{K}) [\mathbf{R}]. \quad (6.44)$$

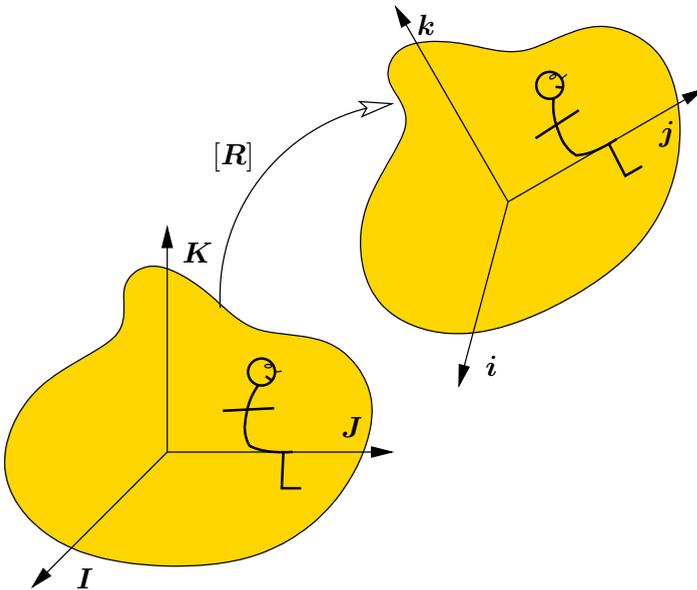


Figura 6.19: La rotación finita equivale a un cambio de base definido por la matriz  $[\mathbf{R}]$ , que permita pasar del triedro fijo  $(\mathbf{I} \mathbf{J} \mathbf{K})$  al triedro del cuerpo  $(\mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k})$

La relación de cambio de coordenadas asociada, denominando  $(X, Y, Z)$  a las coordenadas en el triedro fijo y  $(x, y, z)$  las del triedro del cuerpo, es

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = [\mathbf{R}] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}. \quad (6.45)$$

<sup>12</sup>Recordemos que, según A.5, otra manera de definir el cambio de base es mediante las siguientes expresiones de transformación de los vectores de la misma:  $\mathbf{i} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{I}$ ;  $\mathbf{j} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{J}$ ;  $\mathbf{k} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{K}$ , donde el tensor  $\mathbf{R}$  es aquel cuya matriz de coordenadas en la base  $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$  es precisamente  $[\mathbf{R}]$ , la misma matriz de la expresión (6.44).

La rotación del sólido puede por tanto interpretarse como un cambio de base, definido por la matriz  $[\mathbf{R}]$ , que multiplica al vector columna de coordenadas «convectivas»  $(x y z)^T$  para obtener las nuevas coordenadas  $(X Y Z)^T$ . En esta interpretación, se trataría de distintas coordenadas (según dos triedros diferentes) para un mismo vector.

La superposición de dos rotaciones sucesivas, asociadas a dos matrices  $[\mathbf{R}_1]$  y  $[\mathbf{R}_2]$ , equivale al producto de las mismas<sup>13</sup>,  $[\mathbf{R}_2][\mathbf{R}_1]$ . Como se sabe, el producto de matrices *no es una operación conmutativa*:  $[\mathbf{R}_1][\mathbf{R}_2] \neq [\mathbf{R}_2][\mathbf{R}_1]$ .

La condición de que ambos triedros sean ortonormales obliga a que la matriz de cambio sea ortogonal,  $[\mathbf{R}]^T = [\mathbf{R}]^{-1}$  (cf. apéndice A). La matriz  $[\mathbf{R}]$  es de dimensión  $3 \times 3$  y tiene por tanto 9 componentes, pero la propiedad de ortogonalidad impone 6 condiciones escalares:

$$\sum_{k=1}^3 R_{ik} R_{jk} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3; i \leq j), \quad (6.46)$$

por lo que el conjunto de componentes de dicha matriz se podrá por tanto representar mediante  $9 - 6 = 3$  parámetros independientes. De esta manera, la orientación del triedro del cuerpo  $(i j k)$  queda definida por tres grados de libertad. Estos caracterizan el cambio del triedro fijo  $(I J K)$  al triedro del cuerpo  $(i j k)$ , que se mueve con el sólido y define por tanto su orientación.

### 6.3.3. La Rotación finita como transformación ortogonal

El movimiento más general de un sólido rígido con un punto fijo se representa mediante una transformación lineal  $\mathbf{R}$ , es decir, un tensor de orden dos (cf. apéndice A). Veremos además que este tensor es ortogonal propio.

Sea  $\mathbf{x}^\circ$  el vector posición de una partícula del sólido, medido desde el punto fijo  $O$ , en un instante inicial que tomaremos como *configuración de referencia*. Este vector  $\mathbf{x}^\circ$  se denomina *convectivo*, siendo constante a lo largo del movimiento para una partícula dada del sólido (representa el vector posición en la configuración de referencia). De forma equivalente,  $\mathbf{x}^\circ$  puede considerarse como el vector posición medido por un observador móvil con el sólido, para el que la situación de los puntos materiales del sólido es fija.

Por otra parte, sea  $\mathbf{x}$  el vector posición de un punto del sólido, para un observador fijo o inercial, en un instante genérico del movimiento, que denominaremos *configuración rotada*. La relación con el vector posición convectivo

<sup>13</sup>En efecto, si  $\{\mathbf{x}^1\} = [\mathbf{R}_1]\{\mathbf{x}^0\}$ ,  $\{\mathbf{x}^2\} = [\mathbf{R}_2]\{\mathbf{x}^1\} = [\mathbf{R}_2][\mathbf{R}_1]\{\mathbf{x}^0\}$

$\mathbf{x}^\circ$  se establece mediante un tensor<sup>14</sup>  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}^\circ \quad \Rightarrow \quad x_i = R_{ij} x_j^\circ. \quad (6.47)$$

Es fácil comprobar porqué esta transformación debe ser ortogonal: al tratarse de un sólido rígido, la distancia al punto fijo tiene que coincidir en ambas configuraciones, la inicial y la rotada; desarrollando esta condición,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} &= (\mathbf{x}^\circ \cdot \mathbf{R}^\mathbf{T}) \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{x}^\circ) = \mathbf{x}^\circ \cdot ((\mathbf{R}^\mathbf{T} \cdot \mathbf{R}) \cdot \mathbf{x}^\circ) \\ &= \mathbf{x}^\circ \cdot \mathbf{x}^\circ. \end{aligned}$$

Se deduce por tanto que el tensor  $\mathbf{R}$  debe cumplir la condición de ortogonalidad (cf. apéndice A):

$$\mathbf{R}^\mathbf{T} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^\mathbf{T}. \quad (6.48)$$

Tomando determinantes en la expresión anterior,

$$\det(\mathbf{R}^\mathbf{T}) \det(\mathbf{R}) = (\det(\mathbf{R}))^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{R}) = \pm 1. \quad (6.49)$$

De las dos posibilidades que se ofrecen para el signo del determinante, debe tomarse +1, lo que corresponde a una *transformación ortogonal propia*. Las transformaciones ortogonales cuyo determinante vale  $-1$  se denominan impropias, y producen, además de una rotación, una inversión en los ejes equivalente a la imagen reflejada en un espejo, lo que conllevaría inversión de los volúmenes.

Resumiendo lo expuesto en este apartado y el anterior (6.3.2), es posible interpretar la rotación  $\mathbf{R}$  desde dos puntos de vista distintos:

1. *Rotación activa*: El tensor  $\mathbf{R}$  transforma el vector  $\mathbf{x}^\circ$  en otro vector distinto  $\mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}^\circ$ .
2. *Rotación pasiva*: El tensor  $\mathbf{R}$ , o su matriz de coordenadas asociada  $[\mathbf{R}] = [R_{ij}]$ , define un cambio de base, del triedro fijo  $(\mathbf{E}_i) \equiv (\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$  al triedro del cuerpo  $(\mathbf{e}_i) \equiv (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ , según las relaciones de cambio (6.44):  $\mathbf{e}_i = \mathbf{R} \cdot \mathbf{E}_i = R_{ji} \mathbf{E}_j$ . Denominando  $\{\mathbf{x}\}^\circ = (x y z)^\mathbf{T}$  a las coordenadas del vector posición de un punto en el triedro del cuerpo y  $\{\mathbf{x}\} = (X Y Z)^\mathbf{T}$  a las del triedro fijo, la relación entre éstas debe ser (6.45):  $\{\mathbf{x}\} = [\mathbf{R}]\{\mathbf{x}\}^\circ$ .

<sup>14</sup>Puede demostrarse que esta transformación es necesariamente lineal, teniendo en cuenta en primer lugar la conservación de las distancias relativas entre  $\mathbf{x}$  y su producto por un escalar  $\alpha \mathbf{x}$ , que conduce a  $\mathbf{R}(\alpha \mathbf{x}) = \alpha \mathbf{R}(\mathbf{x})$ ; por otra parte, la conservación de los ángulos entre  $\mathbf{x}_1$  y  $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$  conduce a  $\mathbf{R}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{R}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{R}(\mathbf{x}_2)$ , por lo que se puede identificar con un tensor.

Nótese que en la acepción como rotación pasiva, se consideran distintas coordenadas (es decir, en dos bases distintas) para un mismo vector: el sólido permanece mientras es el triedro de referencia el que rota. Por el contrario, la interpretación activa de la rotación considera dos vectores distintos: es el propio sólido el que rota.

La interpretación según uno u otro punto de vista es equivalente en cuanto a las expresiones en coordenadas, pudiendo adoptarse la que más convenga en cada caso. En lo que sigue consideraremos en principio la interpretación *activa*.

Por último, añadamos que una forma explícita de obtener el tensor de rotación, a partir de los vectores unitarios de los triedros fijo y rotado, es mediante el producto tensorial o diádico de los vectores de los triedros (ver apéndice A):

$$\mathbf{R} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{E}_k \otimes \mathbf{e}_k = \mathbf{I} \otimes \mathbf{i} + \mathbf{J} \otimes \mathbf{j} + \mathbf{K} \otimes \mathbf{k}. \quad (6.50)$$

#### 6.3.4. Ángulos de Euler

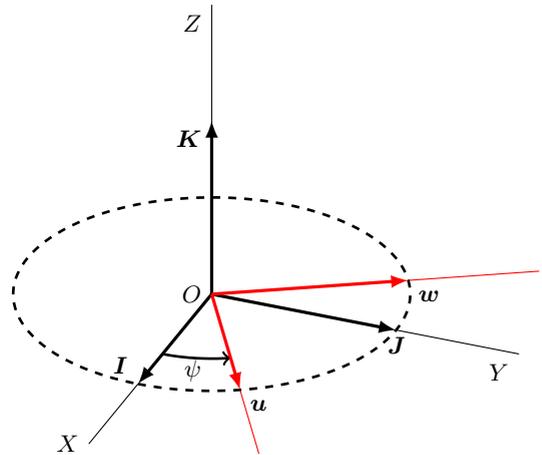
Como se ha dicho (sección 6.3.2), el movimiento de rotación de un sólido tiene tres grados de libertad, revistiendo especial interés la definición de unos parámetros adecuados que los caractericen. Hay diversas opciones para ello, unas basadas en la elección de tres parámetros libres, otras basadas en un conjunto mayor de parámetros pero sujetos a restricciones. Un ejemplo de esta última opción son los *cuaternios* formados por los parámetros de Euler. En este curso emplearemos por el contrario la opción más directa de elegir tres parámetros, que serán los denominados *ángulos de Euler*.

Definiremos los ángulos de Euler a partir de tres rotaciones elementales, que interpretaremos como sucesivos cambios de base (apartado 6.3.2), partiendo del triedro fijo  $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ , hasta obtener el triedro del cuerpo  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ . Estos cambios son rotaciones del triedro efectuadas por orden según el esquema «313»: primer giro respecto del eje 3, seguido de un giro respecto del eje transformado 1, y por último un nuevo giro alrededor del nuevo eje 3.

**Precesión,  $\psi\mathbf{K}$ .**— En primer lugar se efectúa un giro de ángulo  $\psi$  en torno al eje  $\mathbf{K}$ , pasando del triedro  $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$  al triedro  $(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{K})$ . Refiriéndose a la figura 6.20, las expresiones de los vectores del nuevo triedro son:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{I} \cos \psi + \mathbf{J} \operatorname{sen} \psi, \\ \mathbf{w} &= -\mathbf{I} \operatorname{sen} \psi + \mathbf{J} \cos \psi. \end{aligned}$$

Figura 6.20: rotación  $\psi \mathbf{K}$  (precesión)



La expresión matricial equivalente es

$$(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{K}) = (\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}) \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \psi & -\operatorname{sen} \psi & 0 \\ \operatorname{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{[\mathbf{R}_\psi]}.$$

La matriz de rotación inversa es:

$$[\mathbf{R}_\psi]^{-1} = [\mathbf{R}_\psi]^T = \begin{pmatrix} \cos \psi & \operatorname{sen} \psi & 0 \\ -\operatorname{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

equivalente a un giro de  $(-\psi)$  alrededor de  $\mathbf{K}$ .

**Nutación,  $\theta \mathbf{u}$ .**— Se define como un giro de ángulo  $\theta$  en torno al nuevo eje  $\mathbf{u}$ , obteniendo a partir del triedro  $(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{K})$  el llamado *triedro intermedio*,  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k})$ . La operación queda ilustrada en la figura 6.21, siendo la expresión matricial del cambio:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{K}) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ 0 & \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}}_{[\mathbf{R}_\theta]}.$$

**Rotación propia,  $\varphi \mathbf{k}$ .**— La última operación consiste en un giro de ángulo  $\varphi$  alrededor del eje  $\mathbf{k}$ , obteniendo finalmente a partir del triedro intermedio  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k})$  el *triedro del cuerpo*  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  (figura 6.22). La expresión matricial es:

Figura 6.21: rotación  $\theta \mathbf{u}$  (nutación)

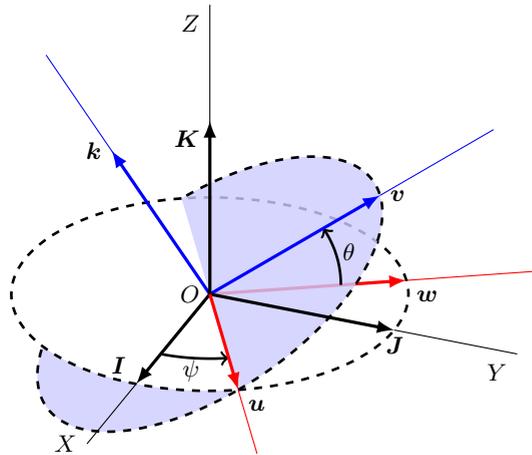
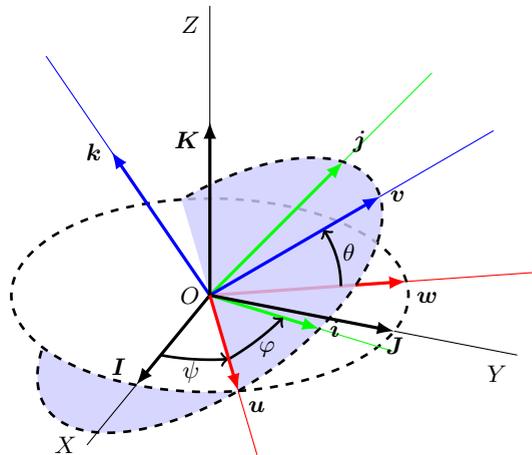


Figura 6.22: rotación  $\varphi \mathbf{k}$  (rotación propia)



$$(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\text{sen } \varphi & 0 \\ \text{sen } \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{[\mathbf{R}_\varphi]}.$$

La rotación total hasta obtener finalmente el triedro del cuerpo será la composición ordenada de las tres rotaciones consecutivas:

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{K}) &= (\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}) \cdot [\mathbf{R}_\psi] \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}) &= (\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{K}) \cdot [\mathbf{R}_\theta] \\ (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) &= (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}) \cdot [\mathbf{R}_\varphi] \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = (\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}) \cdot [\mathbf{R}_\psi] \cdot [\mathbf{R}_\theta] \cdot [\mathbf{R}_\varphi],$$

por tanto la matriz de rotación total es<sup>15</sup>

$$[\mathbf{R}] = [\mathbf{R}_\psi] \cdot [\mathbf{R}_\theta] \cdot [\mathbf{R}_\varphi].$$

Su expresión en función de los ángulos de Euler resulta

$$[\mathbf{R}] = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \operatorname{sen} \psi \cos \theta \operatorname{sen} \varphi; & -\cos \psi \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \psi \cos \theta \cos \varphi; & \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \operatorname{sen} \varphi; & -\operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi; & -\cos \psi \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi; & \operatorname{sen} \theta \cos \varphi; & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (6.51)$$

Dejamos como ejercicio sugerido al lector la comprobación de que se verifica la condición de ortogonalidad,  $[\mathbf{R}]^{-1} = [\mathbf{R}]^T$ .

De los triedros definidos anteriormente los más utilizados a efectos prácticos son el *triedro fijo*  $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$  y el *triedro del cuerpo*  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ . A veces interesa también emplear también el denominado *triedro intermedio*,  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k})$  cuya relación con el triedro fijo viene dada por

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}) = (\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}) \cdot [\mathbf{R}_\psi] \cdot [\mathbf{R}_\theta].$$

La matriz de transformación correspondiente al triedro intermedio es

$$[\mathbf{R}_{\text{int}}] = [\mathbf{R}_\psi] \cdot [\mathbf{R}_\theta] = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\operatorname{sen} \psi \cos \theta & \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \psi & \cos \psi \cos \theta & -\cos \psi \operatorname{sen} \theta \\ 0 & \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Para calcular las matrices inversas haremos uso en general de la condición de ortogonalidad, evaluando en su lugar las traspuestas:

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}_{\text{int}}]^{-1} &= ([\mathbf{R}_\psi] \cdot [\mathbf{R}_\theta])^T = [\mathbf{R}_\theta]^T \cdot [\mathbf{R}_\psi]^T; \\ [\mathbf{R}]^{-1} &= ([\mathbf{R}_\psi] \cdot [\mathbf{R}_\theta] \cdot [\mathbf{R}_\varphi])^T = [\mathbf{R}_\varphi]^T \cdot [\mathbf{R}_\theta]^T \cdot [\mathbf{R}_\psi]^T. \end{aligned}$$

Hacemos notar que una rotación general siempre se puede descomponer de esta manera, por lo que los ángulos de Euler  $(\psi, \theta, \varphi)$  son una parametrización adecuada de las rotaciones.

Sin embargo, existen posiciones singulares en las que la representación mediante ángulos de Euler no es única. Por ejemplo, basta considerar los casos  $\theta = 0$  ó  $\theta = \pi$ , correspondientes a rotaciones alrededor del eje  $(O, \mathbf{k})$ , en los que la descomposición del giro entre  $\psi$  y  $\varphi$  no es unívoca.

<sup>15</sup>La interpretación de esta rotación como transformación *activa* indica que sobre el sólido se efectúa primero  $\mathbf{R}_\varphi$  seguida de  $\mathbf{R}_\theta$  y por último  $\mathbf{R}_\psi$ . Por el contrario para la interpretación *pasiva* como cambios del triedro o base sigue el orden inverso, en el que el primer cambio ha sido  $[\mathbf{R}_\psi]$  seguido de  $[\mathbf{R}_\theta]$  y de  $[\mathbf{R}_\varphi]$ .

### 6.3.5. Expresiones de la velocidad de rotación

Interesa expresar la velocidad de rotación  $\boldsymbol{\Omega}$  a través de sus expresiones en alguno de los triedros descritos en el apartado anterior, especialmente en el del sólido  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ , intermedio  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k})$  o fijo  $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ . Según la definición realizada de los ángulos de Euler en el apartado anterior,  $\boldsymbol{\Omega}$  se puede descomponer según las tres direcciones correspondientes a éstos como<sup>16</sup>:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi} \mathbf{K} + \dot{\theta} \mathbf{u} + \dot{\varphi} \mathbf{k}. \quad (6.52)$$

Las componentes de esta expresión no están definidas según direcciones ortonormales, es decir  $(\mathbf{K}, \mathbf{u}, \mathbf{k})$  no forman triedro, por lo que resulta conveniente desarrollarlas en alguno de los triedros definidos anteriormente. En cualquier caso debemos notar que las distintas expresiones de  $\boldsymbol{\Omega}$  que se desarrollan a continuación se refieren siempre a la velocidad de rotación *total* o *absoluta* del sólido, no se trata en ningún caso de la velocidad de rotación relativa a uno u otro triedro.

#### Expresión de $\boldsymbol{\Omega}$ en el triedro del cuerpo

Denominamos  $(p, q, r)$  a las componentes de  $\boldsymbol{\Omega}$  en este triedro:

$$\boldsymbol{\Omega} = p \mathbf{i} + q \mathbf{j} + r \mathbf{k}$$

Para obtenerlas desarrollamos  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{u}$  en la expresión (6.52). La expresión de  $\mathbf{K}$  se obtiene de

$$(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}) = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \cdot ([\mathbf{R}_\psi] \cdot [\mathbf{R}_\theta] \cdot [\mathbf{R}_\varphi])^{-1}$$

resultando

$$\mathbf{K} = \text{sen } \theta \text{ sen } \varphi \mathbf{i} + \text{sen } \theta \text{ cos } \varphi \mathbf{j} + \text{cos } \theta \mathbf{k}. \quad (6.53)$$

La expresión de  $\mathbf{u}$  se obtiene de

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}) = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \cdot [\mathbf{R}_\varphi]^{-1},$$

resultando

$$\mathbf{u} = \text{cos } \varphi \mathbf{i} - \text{sen } \varphi \mathbf{j}.$$

Se obtiene finalmente:

$$\begin{cases} p = \dot{\theta} \text{ cos } \varphi + \dot{\psi} \text{ sen } \theta \text{ sen } \varphi, \\ q = -\dot{\theta} \text{ sen } \varphi + \dot{\psi} \text{ sen } \theta \text{ cos } \varphi, \\ r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \text{ cos } \theta. \end{cases} \quad (6.54)$$

<sup>16</sup>En esta expresión se ha tenido en cuenta que, al referirse la velocidad a rotaciones infinitesimales ( $d\psi = \dot{\psi} dt, \dots$ ), éstas sí se pueden sumar vectorialmente al contrario de lo que ocurre para rotaciones finitas.

### Expresión de $\Omega$ en el triedro intermedio

En este caso denotamos las componentes por  $(p', q', r')$  :

$$\Omega = p'\mathbf{u} + q'\mathbf{v} + r'\mathbf{k}.$$

Desarrollamos  $\mathbf{K}$  en la expresión (6.52) mediante

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{K}) \cdot [\mathbf{R}_\theta],$$

resultando<sup>17</sup>

$$\mathbf{K} = \text{sen } \theta \mathbf{v} + \text{cos } \theta \mathbf{k}.$$

Se obtiene así

$$\begin{cases} p' = \dot{\theta}, \\ q' = \dot{\psi} \text{sen } \theta, \\ r' = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \text{cos } \theta \quad [= r]. \end{cases} \quad (6.55)$$

La expresión anterior prodría haberse deducido también de particularizar (6.54) para  $\varphi = 0$ , ya que el triedro intermedio no es sino el triedro del cuerpo anulando la rotación propia,  $\varphi \mathbf{k}$ .

### Expresión de $\Omega$ en el Triedro Fijo

Por último, si llamamos  $(P, Q, R)$  a las componentes en este triedro:

$$\Omega = P\mathbf{I} + Q\mathbf{J} + R\mathbf{K},$$

la expresión de las mismas resulta

$$\begin{cases} P = \dot{\varphi} \text{sen } \psi \text{sen } \theta + \dot{\theta} \text{cos } \psi, \\ Q = -\dot{\varphi} \text{cos } \psi \text{sen } \theta + \dot{\theta} \text{sen } \psi, \\ R = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \text{cos } \theta. \end{cases} \quad (6.56)$$

La comprobación de estas expresiones queda propuesta como ejercicio al lector.

### Expresión de la velocidad de rotación a partir de la matriz de rotación $\mathbf{R}$

Podemos derivar la transformación de rotación (6.47), en función del vector material o convectivo  $\mathbf{x}^\circ$  que como sabemos es constante:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}^\circ \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{x}^\circ \quad (6.57)$$

<sup>17</sup>También puede obtenerse este resultado mediante proyección directa en la figura 6.21

y teniendo en cuenta la relación inversa  $\mathbf{x}^\circ = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{x}$ ,

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{x}. \quad (6.58)$$

Se puede comprobar fácilmente<sup>18</sup> que la expresión  $\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T$  define un tensor hemisimétrico, por lo que definiremos

$$\widehat{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T. \quad (6.59)$$

Esta ecuación servirá para obtener las componentes de  $\boldsymbol{\Omega}$ , teniendo en cuenta su equivalencia con el operador hemisimétrico (6.9):

$$[\widehat{\boldsymbol{\Omega}}] = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} = [\dot{\mathbf{R}}] \cdot [\mathbf{R}]^T. \quad (6.60)$$

En esta expresión, los términos  $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$  indican las componentes en el triedro que se escoja, equivaliendo a  $(p, q, r)$  en el triedro del cuerpo,  $(p', q', r')$  en el intermedio o  $(P, Q, R)$  si se emplea el fijo. Particularizando en los distintos triedros puede comprobarse la equivalencia con las expresiones de las componentes de  $\boldsymbol{\Omega}$  obtenidas anteriormente por métodos vectoriales (respectivamente (6.54), (6.55) y (6.56)).

---

<sup>18</sup>Basta para ello derivar la expresión  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = 1$ , obteniendo  $\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}^T = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T + (\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T)^T = 0$



## CAPÍTULO 7

---

# Ecuaciones de la dinámica del sólido rígido

### Índice

---

<b>7.1. Conceptos generales</b> . . . . .	<b>232</b>
7.1.1. Concepto de sólido rígido . . . . .	232
7.1.2. Ecuaciones cardinales de la dinámica . . . . .	235
<b>7.2. Expresión de las magnitudes cinéticas</b> . . . . .	<b>237</b>
7.2.1. Movimiento de rotación instantánea . . . . .	237
7.2.2. Movimiento general (rotación y traslación) . . . . .	238
7.2.3. Dinámica del sólido con un eje fijo . . . . .	239
<b>7.3. El tensor de inercia</b> . . . . .	<b>240</b>
7.3.1. Concepto y expresiones del tensor de inercia . . . . .	240
7.3.2. Momentos y productos de inercia . . . . .	244
7.3.3. Elipsoide de inercia . . . . .	247
7.3.4. Ejes principales de inercia . . . . .	247
7.3.5. Simetrías de masas . . . . .	251
7.3.6. Campo tensorial de inercia . . . . .	254
<b>7.4. Ecuaciones de la dinámica</b> . . . . .	<b>258</b>
7.4.1. Ecuaciones de Euler . . . . .	258
7.4.2. Ecuaciones de Euler empleando el triedro intermedio . . . . .	260
7.4.3. Ecuaciones de Lagrange . . . . .	261
7.4.4. Cálculo de reacciones en los enlaces . . . . .	262

---

## 7.1. Conceptos generales

### 7.1.1. Concepto de sólido rígido

Se llama «sólido rígido» a un conjunto de partículas, de número finito o infinito, que a lo largo del movimiento mantengan invariables las distancias entre cada dos de ellas, de manera que se conserve la forma geométrica del sistema y la distribución espacial de su masa.

Es posible caracterizar un sólido rígido  $\mathcal{B}$  de dos maneras distintas: como un conjunto de masas puntuales discretas, o mediante una distribución continua de masa. El sólido con *masas discretas* está constituido por un número finito partículas ( $m_i, i = 1, \dots, N$ ) unidas rígidamente entre sí. Este modelo es el seguido en el apartado 1.3 para el estudio de sistemas mecánicos generales. Por otra parte, el sólido con *distribución continua de masa* estará formado por un número infinito de partículas, pudiendo idealizarse como un medio continuo que supondremos además diferenciable. Es decir, se considera el sólido  $\mathcal{B}$  como un dominio infinitamente subdivisible en el sentido del cálculo diferencial, mediante elementos infinitesimales de volumen  $dV$  en cada partícula del dominio  $X \in \mathcal{B}$  y de superficie  $dS$  en cada punto del contorno  $\partial\mathcal{B}$  (figura 7.1). Admitiremos también que existe una función de densidad de masa  $\rho$  que permite expresar las masas elementales como  $dm = \rho dV$ . En los temas anteriores se ha empleado preferentemente la descripción de los sistemas como masas discretas, sin embargo en este se preferirá el modelo de medio continuo.

De esta forma, la masa total del sólido y el centro de masa se expresa en el modelo discreto como

$$M = \sum_{i=1}^N m_i, \quad \mathbf{r}_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i, \quad (7.1)$$

mientras que en el modelo continuo es

$$M = \int_{\mathcal{B}} \rho dV, \quad \mathbf{r}_G = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \rho dV. \quad (7.2)$$

Análogamente se pueden expresar en ambos modelos las resultantes de fuerzas y momentos en un punto; según se expuso en el apartado 1.3 para el modelo de masas discretas se consideran solo las fuerzas externas sobre cada partícula,

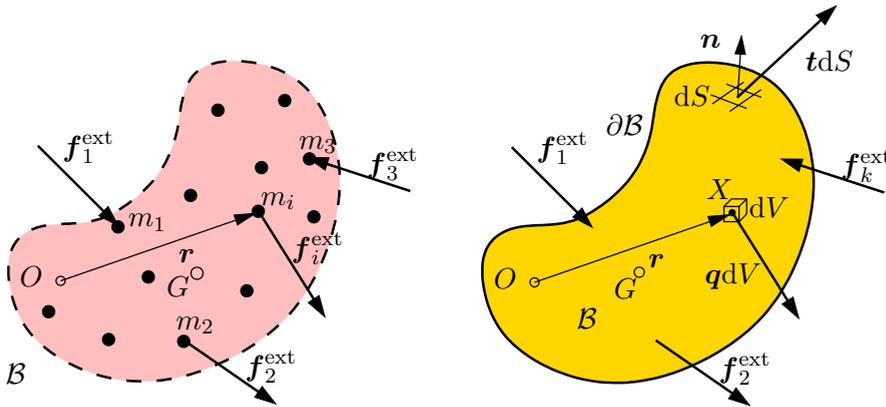


Figura 7.1: *Dos modelos de sólido: mediante partículas discretas con masas  $m_i$  (izquierda) o como medio continuo con masas elementales  $dm = \rho dV$  (derecha). En ambos casos la distancia entre cada dos partículas se debe mantener constante.*

siendo las expresiones

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^{\text{ext}}, \quad \mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{f}_i^{\text{ext}}. \quad (7.3)$$

Por otra parte, para el sólido como un medio continuo pueden actuar varios tipos de fuerzas exteriores, como se indica en la figura 7.1: las fuerzas distribuidas  $\mathbf{q}$  por unidad de volumen en los puntos del interior del dominio  $\mathcal{B}$ , las fuerzas aplicadas  $\mathbf{t}$  por unidad de superficie en el contorno  $\partial\mathcal{B}$ , y posiblemente otras fuerzas que se puedan suponer concentradas o puntuales  $\mathbf{f}_k^{\text{ext}}$ . Así las resultantes se expresan como

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{q} dV + \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t} dS + \sum_k \mathbf{f}_k^{\text{ext}}, \\ \mathbf{M}_O &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge \mathbf{q} dV + \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge \mathbf{t} dS + \sum_k \mathbf{r}_k \wedge \mathbf{f}_k^{\text{ext}}, \end{aligned} \quad (7.4)$$

El ejemplo más común de fuerzas distribuidas es la gravedad, en cuyo caso vale  $\mathbf{q} = \rho\mathbf{g}$ . Las resultantes debidas a la gravedad se obtienen fácilmente mediante la primera integral de las expresiones (7.4), siendo  $\mathbf{F} = M\mathbf{g}$  y  $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_G \wedge M\mathbf{g}$ . Es decir, se puede considerar su efecto como el del peso del sólido  $M\mathbf{g}$  situado en su centro de masa  $G$ . También pueden producirse fuerzas de tipo inercial (p.ej. centrífugas) o de otro tipo que no resulten uniformes. En

cuanto a fuerzas de superficie  $\mathbf{t}$  pueden tratarse de fuerzas debidas a la acción de fluidos circundantes como hidrostáticas o aerodinámicas, contacto y fricción entre superficies etc. En el caso de la presión hidrostática estas fuerzas serán normales a la superficie en cada punto, pero no será necesariamente así en otros casos.

También interesa expresar las magnitudes cinéticas. La expresión de la cantidad de movimiento y del momento cinético con la distribución discreta de masas sería

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i = M \mathbf{v}_G, \quad \mathbf{H}_O = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \wedge \dot{\mathbf{r}}_i, \quad (7.5)$$

mientras que con la distribución continua

$$\mathbf{P} = \int_{\mathcal{B}} m_i \dot{\mathbf{r}} \rho dV = M \mathbf{v}_G, \quad \mathbf{H}_O = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}} \rho dV. \quad (7.6)$$

Por último, las expresiones de la energía cinética para ambos modelos son

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2, \quad T = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} v^2 \rho dV. \quad (7.7)$$

Como se vió en el ejemplo 1.3 (figura 1.13), un sólido rígido libre posee seis grados de libertad. Estos se pueden descomponer en dos grupos: tres parámetros que definen la traslación del sólido, (por ejemplo, las coordenadas del centro de masa,  $X_G, Y_G, Z_G$ ), y tres parámetros angulares que definen la orientación del sólido alrededor de  $G$  (por ejemplo, los ángulos de Euler  $(\psi, \theta, \varphi)$  definidos en el apartado 6.3.4).

Las ecuaciones de la dinámica pueden obtenerse aplicando los principios y teoremas generales enunciados en el capítulo 1. En particular, el movimiento se puede resolver aplicando las ecuaciones que se deducen a partir de los principios de la cantidad de movimiento (1.37), momento cinético (1.51) y energía cinética (1.44). Para el movimiento del sólido libre en tres dimensiones, se necesitarán al menos seis ecuaciones independientes. Un procedimiento general para obtener las ecuaciones necesarias y suficientes es la aplicación del principio de D'Alembert, como se ve a continuación.

Quedan fuera del alcance de este capítulo los *sólidos deformables*, como es el caso de los materiales elásticos. La consideración de la deformabilidad de los medios continuos exige introducir medidas de la deformación interna (tensor de deformaciones), así como de las fuerzas internas entre las partículas

del sólido (tensor de tensiones) y las ecuaciones que ligan ambas (ecuaciones constitutivas), lo que excede los objetivos de este curso<sup>1</sup>.

### 7.1.2. Ecuaciones cardinales de la dinámica

Supondremos un sólido rígido con distribución continua de masa, y libre sin enlaces exteriores que restrinjan su movimiento, siendo las únicas ligaduras las internas del propio sólido, de distancia constante. Consideramos desplazamientos virtuales infinitesimales compatibles con estos enlaces. Las expresiones se pueden deducir de forma similar a la ecuación (6.20), aplicada a través del movimiento relativo a  $G$ . Para cada partícula  $X \in \mathcal{B}$ ,

$$\delta \mathbf{r}(X) = \delta \boldsymbol{\theta} \wedge (\mathbf{r}(X) - \mathbf{r}_G) + \delta \mathbf{r}_G, \quad \forall (\delta \mathbf{r}_G, \delta \boldsymbol{\theta}). \quad (7.8)$$

En esta expresión  $\delta \mathbf{r}_G$  responde a desplazamientos virtuales del centro de masa y  $\delta \boldsymbol{\theta}$  a rotaciones infinitesimales, siendo ambos vectores arbitrarios.

El principio de D'Alembert (1.94) se expresa resumidamente como

$$\delta W + \delta W^{\text{iner}} = 0, \quad \forall \{\delta \mathbf{r}(X)\} \text{ comp.} \quad (7.9)$$

siendo

$$\delta W = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{r} \, dV + \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{r} \, dS + \sum_k \mathbf{f}_k^{\text{ext}} \cdot \delta \mathbf{r}_k \quad (7.10)$$

$$\delta W^{\text{iner}} = - \int_{\mathcal{B}} \rho \ddot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} \, dV \quad (7.11)$$

Al desarrollar estas expresiones empleando (7.8), por ejemplo en la primera integral de (7.10), se puede emplear la propiedad cíclica del producto mixto de vectores,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{r} \, dV &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{r}_G \, dV + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{q} \cdot [\delta \boldsymbol{\theta} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}_G)] \, dV \\ &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{r}_G \, dV + \int_{\mathcal{B}} [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_G) \wedge \mathbf{q}] \cdot \delta \boldsymbol{\theta} \, dV \\ &= \left( \int_{\mathcal{B}} \mathbf{q} \, dV \right) \cdot \delta \mathbf{r}_G + \left( \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_G) \wedge \mathbf{q} \, dV \right) \cdot \delta \boldsymbol{\theta}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Operando de forma similar con los demás términos se obtiene

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}_G + \mathbf{M}_G \cdot \delta \boldsymbol{\theta} \quad (7.13)$$

<sup>1</sup>Véase por ejemplo *Mecánica de medios continuos para ingenieros*, X. Oliver y C. Agelet, Ediciones UPC, Barcelona 2002

siendo  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{M}_G$  las resultantes de fuerzas externas y momentos en  $G$ , que se expresan de la misma forma que (7.4) salvo que se toman momentos en  $G$ . De forma análoga, desarrollando (7.11) se obtiene

$$\delta W^{\text{iner}} = -M\mathbf{a}_G \cdot \delta \mathbf{r}_G - \left( \frac{d}{dt} \mathbf{H}_G \right) \cdot \delta \boldsymbol{\theta}, \quad (7.14)$$

siendo  $\mathbf{H}_G$  el momento cinético del sólido en  $G$  que se expresa de igual manera que (7.6<sub>2</sub>) pero tomando los momentos en  $G$ .

Sustituyendo las expresiones (7.13) y (7.14) en (7.9),

$$(\mathbf{F} - M\mathbf{a}_G) \cdot \delta \mathbf{r}_G + (\mathbf{M}_G - \frac{d}{dt} \mathbf{H}_G) \cdot \delta \boldsymbol{\theta} = 0 \quad \forall (\delta \mathbf{r}_G, \delta \boldsymbol{\theta}). \quad (7.15)$$

Considerando que en esta ecuación  $(\delta \mathbf{r}_G, \delta \boldsymbol{\theta})$  son arbitrarios, ya que corresponden a los grados de libertad del sólido, se deducen las denominadas *ecuaciones cardinales* de la dinámica del sólido:

$$\begin{cases} \mathbf{F} = M\mathbf{a}_G; \\ \mathbf{M}_G = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_G. \end{cases} \quad (7.16)$$

Se trata de dos ecuaciones vectoriales que en el espacio tridimensional equivalen a seis ecuaciones escalares. Al derivarse del principio de D'Alembert, deducimos que son necesarias y suficientes para determinar los seis grados de libertad del movimiento del sólido.

En el caso particular de un sólido con un punto  $O$  fijo, los desplazamientos virtuales equivalentes a (7.8) serían  $\delta \mathbf{r}(X) = \delta \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{r}(X)$  (tomando en  $O$  el origen de coordenadas), y la ecuación del movimiento se reduce a

$$\mathbf{M}_O = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_O. \quad (7.17)$$

Si se admite que la resultante de las fuerzas exteriores,  $\mathbf{F}$ , no depende de la orientación del sólido, sino tan sólo de la posición del centro de masas  $\mathbf{r}_G$  y posiblemente del tiempo, la integración de la ecuación (7.16<sub>1</sub>) permitiría calcular la trayectoria del centro de masas como si se tratase de una partícula, de forma desacoplada de la ecuación (7.16<sub>2</sub>). El movimiento del CDM  $G$  se limita por tanto al estudio desacoplado de la ecuación (7.16<sub>1</sub>) que es un problema que ya se ha tratado con anterioridad en la dinámica de la partícula (apartado 1.1).

Sería un error sin embargo considerar que el movimiento del sólido se limita a definir el movimiento del centro de masas. Para definir completamente el movimiento faltaría determinar su orientación, mediante la ecuación (7.16<sub>2</sub>), ó (7.17) en el caso del sólido con un punto fijo.

En este capítulo trataremos sobre el planteamiento y resolución de las ecuaciones (7.16<sub>2</sub>) ó (7.17). Ambas ecuaciones son formalmente idénticas, definen el mismo tipo de problema: el movimiento de orientación o rotación del sólido alrededor de un punto que puede considerarse fijo, sea éste  $G$  u  $O$ .

## 7.2. Expresión de las magnitudes cinéticas

### 7.2.1. Movimiento de rotación instantánea

Consideremos un sólido  $\mathcal{B}$  con un movimiento instantáneo de rotación, alrededor de un eje  $(O, \mathbf{e})$  (figura 7.2), siendo  $\mathbf{e}$  un vector unitario, con velocidad angular  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}$ . El eje de rotación  $(O, \mathbf{e})$  de dicho movimiento será en general

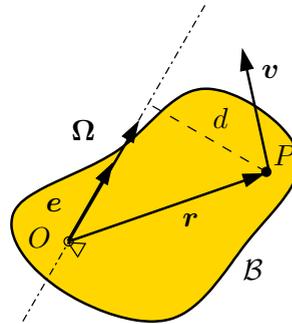


Figura 7.2: Sólido  $\mathcal{B}$  girando alrededor de un eje dado  $(O, \mathbf{e})$ .

variable a lo largo del tiempo<sup>2</sup>. Al tratarse de una rotación instantánea la velocidad de los puntos del eje es nula, por lo que tomando origen de coordenadas en  $O$  la velocidad de un punto  $P$  cualquiera del sólido con vector posición  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$  es

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}. \tag{7.18}$$

El momento cinético conjunto del cuerpo se puede expresar, sustituyendo (7.18) en la expresión (7.6<sub>2</sub>), como

$$\mathbf{H}_O = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) \rho dV = \int_{\mathcal{B}} [r^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{r}] \rho dV. \tag{7.19}$$

Proyectando sobre el vector unitario  $\mathbf{e}$  obtenemos el *momento cinético áxico*:

$$\begin{aligned} H_{O,e} &= \mathbf{e} \cdot \mathbf{H}_O = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{e} \cdot [\mathbf{r} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r})] \rho dV \\ &= \int_{\mathcal{B}} \Omega (\mathbf{e} \wedge \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{e} \wedge \mathbf{r}) \rho dV = \Omega \int_{\mathcal{B}} d_e^2 \rho dV \end{aligned} \tag{7.20}$$

<sup>2</sup>En caso contrario se trataría de la rotación de un sólido alrededor de un eje fijo, que da lugar como se sabe a un movimiento plano.

donde se ha empleado la propiedad cíclica del producto mixto de vectores, y se denomina  $d_e \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{e} \wedge \mathbf{r}|$  a la distancia de cada punto al eje de rotación  $(O, \mathbf{e})$ .

En la expresión anterior, la integral que aparece se define como *momento de inercia* del sólido<sup>3</sup> respecto al eje  $(O, \mathbf{e})$ :

$$I_{O,e} \stackrel{\text{def}}{=} \int_B d_e^2 \rho \, dV, \quad (7.21)$$

resultando por tanto a partir de (7.20) la expresión

$$H_{O,e} = I_{O,e} \Omega. \quad (7.22)$$

De la misma manera, la energía cinética, a partir de (7.7<sub>2</sub>), resulta

$$\begin{aligned} T &= \int_B \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r})^2 \rho \, dV = \frac{1}{2} \Omega^2 \int_B d_e^2 \rho \, dV \\ &= \frac{1}{2} I_{O,e} \Omega^2. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Las expresiones anteriores del momento cinético áxico (7.22) y energía cinética (7.23) resultan muy compactas, en función del momento de inercia  $I_{O,e}$  respecto del eje instantáneo de rotación. Sin embargo, debe advertirse que al ser este eje  $(O, \mathbf{e})$  variable, el momento de inercia no será tampoco constante, por lo que la utilidad práctica para un movimiento general de dichas expresiones es limitada. Para un caso general es conveniente una descripción de la geometría de masas que permita expresar las magnitudes cinéticas para cualquier orientación del sólido. Esto es precisamente lo que se consigue con el tensor de inercia, tal como se explicará en el apartado 7.3 (expresiones (7.31) y (7.42)).

### 7.2.2. Movimiento general (rotación y traslación)

En el caso más general en que el movimiento no sea una rotación instantánea sino un movimiento general sin puntos de velocidad nula, el campo de velocidades se puede desarrollar en general a partir del centro de masas  $(G)$ . Definiendo la posición relativa al mismo por  $\mathbf{r}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r} - \mathbf{r}_G$ , y suponiendo que la velocidad instantánea de rotación es  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}$ ,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}'. \quad (7.24)$$

<sup>3</sup>En el caso de un sólido discreto, la expresión del momento de inercia sería  $I_{O,e} = \sum_{i=1}^N m_i d_{e,i}^2$ .

El momento cinético resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_G &= \int_B \mathbf{r}' \wedge (\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}') \rho dV \\ &= \int_B \mathbf{r}' \wedge \mathbf{v}_G \rho dV + \int_B \mathbf{r}' \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}') \rho dV. \end{aligned} \tag{7.25}$$

Proyectando sobre el versor  $\mathbf{e}$  de la velocidad de rotación,

$$H_{G,e} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{H}_G = \int_B \mathbf{e} \cdot [\mathbf{r}' \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}')] \rho dV = I_{G,e} \Omega, \tag{7.26}$$

donde  $I_{G,e}$  es el momento de inercia respecto del eje  $(G, \mathbf{e})$ , que se define análogamente a (7.21), empleando aquí las distancias al eje por  $G$ .

El desarrollo de la energía cinética es en este caso

$$\begin{aligned} T &= \int_B \frac{1}{2} (\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}')^2 \rho dV \\ &= \int_B \frac{1}{2} v_G^2 \rho dV + \int_B \mathbf{v}_G \cdot (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}') \rho dV + \int_B \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}')^2 \rho dV \\ &= \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_{G,e} \Omega^2. \end{aligned} \tag{7.27}$$

Es decir, la energía cinética es la suma de dos términos, la que corresponde a la traslación  $\mathbf{v}_G$  de su CDM  $G$  y la que corresponde a la rotación  $\boldsymbol{\Omega}$  del sólido alrededor de un eje por  $G$ . Esta expresión es la aplicación del teorema de König (1.53) al caso del sólido.

Debe realizarse aquí la misma advertencia que se hizo al final del apartado anterior, en relación con el valor variable en general del momento de inercia  $I_{G,e}$  a emplear en las fórmulas (7.26) y (7.27<sub>3</sub>).

### 7.2.3. Dinámica del sólido con un eje fijo

De las expresiones anteriores se puede obtener de forma directa la ecuación dinámica del caso más sencillo de movimiento de rotación de un sólido, que es cuando el eje de rotación  $(O, \mathbf{e})$  es fijo. Puesto que se trata de un sólido rígido,  $I_{O,e}$  es una constante que refleja la distribución de masas del sólido alrededor de dicho eje fijo. Teniendo en cuenta esto, si se deriva (7.22) y empleando (7.17) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H_{O,e} &= I_{O,e} \dot{\Omega} = \frac{d}{dt} (\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{e}) = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e} = M_{O,e} \\ &\Downarrow \\ M_{O,e} &= I_{O,e} \dot{\Omega}. \end{aligned} \tag{7.28}$$

En la expresión anterior  $M_{O,e} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}$  es el momento áxico de las fuerzas. Al derivar para obtener esta expresión se ha tenido en cuenta que, el eje  $(O, \mathbf{e})$  es fijo, tanto respecto al sólido como a la referencia absoluta, por lo que el momento de inercia  $I_{O,e}$  se mantiene constante, ya que la distribución de masa no sufre distorsión.

La expresión (7.28) define la dinámica de la rotación en torno a un eje fijo. Es similar a la ley «Fuerza = Masa  $\times$  Aceleración» (1.2) para dinámica de traslación de partículas, cumpliendo aquí  $\dot{\Omega}$  el papel de aceleración (variación del movimiento),  $M_{O,e}$  el papel de fuerza (causante de la variación) e  $I_{O,e}$  el papel de masa (inercia a la variación).

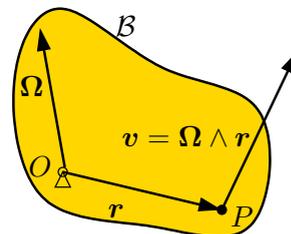
### 7.3. El tensor de inercia

#### 7.3.1. Concepto y expresiones del tensor de inercia

Para el caso más general de la dinámica del sólido, en lo que sigue nos limitaremos a la ecuación (7.16<sub>2</sub>), o bien directamente a la ecuación (7.17) en el caso en que el sólido tenga un punto fijo  $O$  —dando por resuelta la solución de la ecuación (7.16<sub>1</sub>) que gobierna la traslación—. Como se ha dicho, las dos ecuaciones son formalmente idénticas, expresando ambas la dinámica de la rotación alrededor de un punto que se pueda suponer fijo, sea este punto  $G$  u  $O$ . Por tanto en lo que sigue desarrollaremos el caso del movimiento alrededor de  $O$  fijo (ecuación (7.17)) sabiendo que las ecuaciones son igualmente válidas para el movimiento alrededor de  $G$ .

Para poder expresar dicha ecuación en un caso general en que el eje de rotación no sea fijo, es preciso en primer lugar desarrollar las expresiones de las magnitudes cinéticas (momento cinético, energía cinética) de forma intrínseca, sin referirse al eje de rotación, lo que dará lugar al denominado *tensor de inercia*. Como veremos, este tensor constituye la descripción más general de la inercia de un sólido a la variación de su movimiento, generalizando el concepto de momento de inercia que se emplea para la rotación alrededor de un eje.

Figura 7.3: *Movimiento del sólido  $\mathcal{B}$  con un punto fijo  $O$ , dotado de velocidad de rotación  $\Omega$ .*



**Expresión del Momento Cinético.**— El momento cinético de un sólido  $\mathcal{B}$  con un punto fijo  $O$ , cuya velocidad de rotación instantánea sea  $\boldsymbol{\Omega}$ , viene dado por (7.19):

$$\mathbf{H}_O = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) \rho dV = \int_{\mathcal{B}} [r^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{r}] \rho dV. \quad (7.29)$$

Se comprueba fácilmente que esta expresión es lineal en  $\boldsymbol{\Omega}$ ; por tanto define el vector  $\mathbf{H}_O$  como una aplicación lineal del vector  $\boldsymbol{\Omega}$ , que identificaremos con un tensor de segundo orden<sup>4</sup>  $\mathbf{I}_O$ ,

$$\mathbf{I}_O : \boldsymbol{\Omega} \mapsto \mathbf{H}_O(\boldsymbol{\Omega}) = \int_{\mathcal{B}} [r^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{r}] \rho dV. \quad (7.30)$$

Denominamos a  $\mathbf{I}_O$  *tensor de inercia* del sólido  $\mathcal{B}$  en el punto  $O$ . La aplicación o actuación de  $\mathbf{I}_O$  sobre  $\boldsymbol{\Omega}$  se expresa mediante la notación siguiente:

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (7.31)$$

donde el operador  $(\cdot)$  indica la aplicación del tensor sobre un vector, obteniéndose como resultado otro vector<sup>5</sup>.

**Componentes del tensor de inercia.**— Para clarificar el significado del tensor de inercia, desarrollemos las componentes cartesianas de la expresión vectorial (7.29):<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} (H_O)_i &= \int_{\mathcal{B}} [r^2 \Omega_i - (r_j \Omega_j) r_i] \rho dV \\ &= \left[ \int_{\mathcal{B}} (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j) \rho dV \right] \Omega_j \\ &= (I_O)_{ij} \Omega_j. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Los coeficientes  $(I_O)_{ij}$  corresponden a las componentes del tensor de inercia  $\mathbf{I}_O$  y quedan definidos por

$$(I_O)_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{B}} (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j) \rho dV. \quad (7.33)$$

<sup>4</sup>Se define un tensor de orden dos como «una función lineal que aplica cada vector a un vector», ver apéndice A

<sup>5</sup>En este texto se empleará el punto  $(\cdot)$  para significar esta aplicación de un tensor sobre un vector, que no debe confundirse con el producto escalar entre dos vectores. Otros autores indican la aplicación de un tensor sin ningún símbolo, es decir  $\mathbf{I}_O \boldsymbol{\Omega}$

<sup>6</sup>En estas expresiones y en lo sucesivo del capítulo se aplica el convenio del sumatorio implícito, es decir se sobreentiende que se efectúa la suma sobre los índices repetidos en un monomio sobre su rango de variación

La ecuación (7.32) permite interpretar la actuación del tensor de inercia  $I_O$  como el producto tensorial contraído<sup>7</sup> con  $\boldsymbol{\Omega}$ .

En notación tensorial, a partir de (7.29) y teniendo en cuenta la definición del producto tensorial o diádico ( $\otimes$ , véase apéndice A) se obtiene  $\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}) = (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\Omega}$ . Por tanto el tensor de inercia se puede expresar de manera intrínseca (independiente de coordenadas) mediante

$$I_O = \int_{\mathcal{B}} (r^2 \mathbf{1} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \rho \, dV. \quad (7.34)$$

En esta expresión  $\mathbf{1}$  es el tensor identidad, de componentes  $\delta_{ij}$  (deltas de Kronecker) en una base ortonormal. Se comprueba por otro lado a partir de (7.34) que las componentes cartesianas (7.33) para una base ortonormal  $(\mathbf{e}_i) = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  se pueden obtener igualmente mediante las expresiones

$$(I_O)_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (I_O \cdot \mathbf{e}_j). \quad (7.35)$$

**Cambio de coordenadas.**— Una de las propiedades esenciales de los tensores es el comportamiento de sus coordenadas frente a un cambio de base (apartado A.5 en apéndice A).

En este caso, tiene especial interés considerar el cambio de coordenadas desde el triedro fijo  $(O, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$  al triedro del cuerpo  $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ , cuya matriz de cambio es precisamente la matriz de rotación del sólido  $[\mathbf{R}]$ . En el triedro del cuerpo, un punto material del sólido tiene coordenadas constantes<sup>8</sup> a lo largo del movimiento:

$$\mathbf{r} = x^\circ \mathbf{i} + y^\circ \mathbf{j} + z^\circ \mathbf{k}, \quad \text{con } (x^\circ, y^\circ, z^\circ) \text{ constantes.} \quad (7.36)$$

Las componentes del tensor de inercia en el triedro del cuerpo, a partir de (7.33), deben ser igualmente constantes. Empleando la notación indicial para las coordenadas,  $(r_1^\circ, r_2^\circ, r_3^\circ) = (x^\circ, y^\circ, z^\circ)$ , estas componentes son

$$I_{O,ij}^\circ = \int_{\mathcal{B}} (r^2 \delta_{ij} - r_i^\circ r_j^\circ) \rho \, dV \quad (\text{constantes}) \quad (7.37)$$

Consideremos ahora el cambio de base que relaciona el triedro del cuerpo  $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  con el triedro fijo  $(O, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ <sup>9</sup>,

$$(\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}) = (\mathbf{I} \ \mathbf{J} \ \mathbf{K}) [\mathbf{R}]. \quad (7.38)$$

<sup>7</sup>es decir, realizando el sumatorio en el índice contiguo entre ambos

<sup>8</sup>Este tipo de coordenadas ligadas al movimiento se denominan en ocasiones *coordenadas convectivas*.

<sup>9</sup>Emplearemos la siguiente notación en este curso para las expresiones matriciales:  $\{\mathbf{x}\} \equiv \{x_i\}$ ,  $\{\mathbf{r}\} \equiv \{r_i\}$  (entre llaves) para matrices columna  $(n \times 1)$ ,  $(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}\}^T \equiv (x_i)$ ,  $(\mathbf{r}) =$

(El triedro fijo puede definirse como aquél que coincide con la posición del triedro del cuerpo en el instante de referencia o inicial,  $[\mathbf{R}]_{t=0} = [\mathbf{1}]$ .)

Considerando (7.38) y según la convención empleada en el apartado A.5 la matriz de cambio de base es directamente  $[\mathbf{A}] = [\mathbf{R}]$ , estando el cambio de coordenadas del tensor viene definido por (A.43). La relación entre las componentes del tensor de inercia en ambos triedros es por tanto

$$[\mathbf{I}_O]^\circ = [\mathbf{R}]^T [\mathbf{I}_O] [\mathbf{R}], \quad (7.39)$$

donde  $[\mathbf{I}_O]^\circ$  son las componentes (constantes) del tensor de inercia en el triedro del cuerpo, e  $[\mathbf{I}_O]$  las componentes (variables) en el triedro fijo. Teniendo en cuenta por la propiedad de ortogonalidad que  $[\mathbf{R}]^T = [\mathbf{R}]^{-1}$ , la relación anterior se puede invertir resultando

$$[\mathbf{I}_O] = [\mathbf{R}] [\mathbf{I}_O]^\circ [\mathbf{R}]^T. \quad (7.40)$$

Esta expresión matricial define las componentes del tensor de inercia en una base fija (inercial) a lo largo del movimiento, en función de la matriz de rotación  $[\mathbf{R}]$ . Se puede comprender fácilmente que las coordenadas  $[\mathbf{I}_O]$  por lo general no serán constantes. Si se desea evitar tener que considerar dicha variación en el cálculo, deberá expresarse el tensor de inercia en un triedro ligado al sólido ( $[\mathbf{I}_O]^\circ$ ).

**Expresión de la Energía Cinética.**— La expresión de la energía cinética (7.23) se puede desarrollar como:

$$\begin{aligned} T &= \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) \rho \, dV \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) \rho \, dV = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{H}_O. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Considerando (7.31) puede escribirse en función del tensor de inercia,

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}). \quad (7.42)$$

---

$\{\mathbf{r}\}^T \equiv (r_i)$  para matrices fila ( $1 \times n$ ), y  $[\mathbf{R}] \equiv [R_{ij}]$ ,  $[\mathbf{A}] \equiv [A_{ij}]$ ,  $[\mathbf{I}] \equiv [I_{ij}]$  (entre corchetes) para matrices de 2 índices (rectangulares  $n \times m$  o cuadradas  $n \times n$ ). Reservaremos las letras «negritas matemáticas» ( $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{I}$ ) para vectores o tensores. Procuraremos distinguir de esta manera entre el tensor  $\mathbf{R}$  y la matriz de componentes del mismo en un triedro dado,  $[\mathbf{R}] \equiv [R_{ij}]$ .

Otras maneras de expresar esta ecuación<sup>10</sup> son:

$$T = \frac{1}{2} \Omega_i (I_O)_{ij} \Omega_j \quad (\text{notación indicial}); \quad (7.43)$$

$$= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega}) [\mathbf{I}_O] \{\boldsymbol{\Omega}\} \quad (\text{notación matricial}). \quad (7.44)$$

La ecuación (7.42) es una expresión tensorial cuyo resultado es un tensor de orden cero, es decir, un escalar. Por lo tanto, el valor de  $T$  es un invariante intrínseco del movimiento, que no depende del sistema de coordenadas elegido. En efecto, realizando el cambio de coordenadas definido por la matriz de cambio  $[\mathbf{A}] = [\mathbf{R}]$  según (A.35) y (A.43) y teniendo en cuenta la ortogonalidad de  $[\mathbf{R}]$ :

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega}') [\mathbf{I}_O'] \{\boldsymbol{\Omega}'\}' \\ &= \frac{1}{2} ((\boldsymbol{\Omega}) [\mathbf{A}]) ([\mathbf{A}]^T [\mathbf{I}_O] [\mathbf{A}]) ([\mathbf{A}]^T \{\boldsymbol{\Omega}\}) \\ &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega}) [\mathbf{I}_O] \{\boldsymbol{\Omega}\} = T. \end{aligned} \quad (7.45)$$

En definitiva, el tensor de inercia así definido,

1. caracteriza de forma completa la inercia a rotación de un sólido rígido;
2. permite calcular las magnitudes cinéticas ( $\mathbf{H}_O, T$ ) para establecer las ecuaciones de la dinámica aunque el eje de rotación varíe a lo largo del movimiento.

### 7.3.2. Momentos y productos de inercia

Sea un eje  $(O, \mathbf{u})$  correspondiente a un versor  $\mathbf{u}$  pasando por el punto  $O \in \mathcal{B}$ . La distancia al eje de un punto cualquiera  $P \in \mathcal{B}$  definido por  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$  es  $d = |\mathbf{u} \wedge \mathbf{r}|$ . Según la definición de momento de inercia (7.21),

$$\begin{aligned} I_u &= \int_{\mathcal{B}} d^2 \rho \, dV = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{r}) \rho \, dV \\ &= \mathbf{u} \cdot \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{r}) \rho \, dV. \end{aligned} \quad (7.46)$$

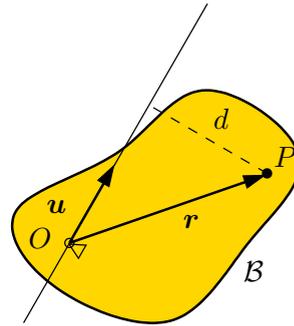
<sup>10</sup>En la expresión (7.42) el primer punto  $(\cdot)$  indica producto escalar entre vectores y el segundo la aplicación del tensor sobre un vector. En algunos textos se emplea la notación del producto de un tensor  $\mathbf{B}$  por un vector  $\mathbf{x}$  por la izquierda como  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{B} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{x}$ , o en índices  $x_i B_{ij}$ , con lo que la ecuación anterior puede expresarse también sin paréntesis como  $\frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}$

La integral que aparece es análoga a la (7.29), que sirvió para definir el tensor de inercia, ocupando aquí  $\mathbf{u}$  el lugar de  $\boldsymbol{\Omega}$ . Por tanto,

$$I_u = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{u}) \tag{7.47}$$

Esta expresión define el momento de inercia como una forma cuadrática fun-

Figura 7.4: Momento de inercia del sólido  $\mathcal{B}$  respecto de un eje  $(O, \mathbf{u})$ .



ción de  $\mathbf{u}$ , y permite calcular el momento de inercia para un eje cualquiera por  $O$ .

Las componentes cartesianas  $(I_O)_{ij}$  del tensor de inercia se pueden obtener mediante las expresiones (7.33) o de forma general (7.35). En concreto, tomando las direcciones de los versores del triedro  $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ , las componentes de la diagonal principal de la matriz de componentes son los *momentos de inercia* según las direcciones del triedro:

$$I_{xx} = \mathbf{i} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{i}) = \int_{\mathcal{B}} (y^2 + z^2) \rho \, dV, \tag{7.48}$$

$$I_{yy} = \mathbf{j} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{j}) = \int_{\mathcal{B}} (x^2 + z^2) \rho \, dV, \tag{7.49}$$

$$I_{zz} = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{k}) = \int_{\mathcal{B}} (x^2 + y^2) \rho \, dV. \tag{7.50}$$

Asimismo, se definen los *productos de inercia*:

$$P_{xy} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{B}} xy \rho \, dV; \quad P_{yz} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{B}} yz \rho \, dV; \quad P_{zx} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{B}} zx \rho \, dV. \tag{7.51}$$

La matriz de componentes del tensor de inercia se puede expresar como

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{I}_O] &= \begin{pmatrix} \int_{\mathcal{B}}(y^2 + z^2)\rho \, dV & -\int_{\mathcal{B}} xy\rho \, dV & -\int_{\mathcal{B}} zx\rho \, dV \\ -\int_{\mathcal{B}} yx\rho \, dV & \int_{\mathcal{B}}(z^2 + x^2)\rho \, dV & -\int_{\mathcal{B}} yz\rho \, dV \\ -\int_{\mathcal{B}} zx\rho \, dV & -\int_{\mathcal{B}} yz\rho \, dV & \int_{\mathcal{B}}(x^2 + y^2)\rho \, dV \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} I_{xx} & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_{yy} & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (7.52)
 \end{aligned}$$

De la expresión (7.34) es inmediato comprobar que  $\mathbf{I}_O$  es un tensor simétrico, por lo que para definirlo en un caso general bastarán 6 componentes (3 momentos de inercia y 3 productos de inercia).

Además, el tensor  $\mathbf{I}_O$  es siempre definido positivo. Esto se deduce de forma inmediata de (7.42) que expresa  $T$  como una forma cuadrática de  $\boldsymbol{\Omega}$  definida por  $\mathbf{I}_O$ , ya que la energía cinética  $T$ , por su propia definición, es esencialmente positiva para cualquier movimiento de rotación no nulo ( $\boldsymbol{\Omega} \neq \mathbf{0}$ ). Análogamente, los momentos de inercia definidos por la forma cuadrática (7.47) deben ser mayores que cero, anulándose únicamente para sólidos degenerados (rectas o puntos, sin dimensión transversal).

Otras propiedades del tensor de inercia de fácil demostración son las siguientes:

- La *traza* o contracción de un tensor de 2.<sup>o</sup> orden es un invariante escalar. Por tanto

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(\mathbf{I}_O) &= I_{kk} = I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} \\
 &= 2 \int_{\mathcal{B}} (x^2 + y^2 + z^2)\rho \, dV \\
 &= 2 \int_{\mathcal{B}} r^2\rho \, dV = 2I_O,
 \end{aligned}$$

donde  $I_O$  es el denominado *momento de inercia polar*, invariante de  $\mathcal{B}$  para un punto  $O$  dado.

- Se verifica la propiedad triangular, es decir, un momento de inercia es menor que la suma de los otros dos, pero mayor que su diferencia. Se

comprueba inmediatamente,

$$I_{yy} + I_{zz} = \int_{\mathcal{B}} (2x^2 + y^2 + z^2) \rho \, dV = I_{xx} + \underbrace{2 \int_{\mathcal{B}} x^2 \rho \, dV}_{>0},$$

$$I_{yy} - I_{zz} = \int_{\mathcal{B}} (z^2 - y^2) \rho \, dV = I_{xx} - \underbrace{2 \int_{\mathcal{B}} y^2 \rho \, dV}_{>0}.$$

### 7.3.3. Elipsoide de inercia

Consideremos el haz de ejes que pasan por un punto  $O$ , con direcciones arbitrarias definidas por el versor unitario  $\mathbf{e}$ . Definimos para cada dirección un punto situado sobre el eje  $(O, \mathbf{e})$  a una distancia  $(I_e)^{-1/2}$  de  $O$ :

$$\mathbf{r} = \pm \frac{\mathbf{e}}{\sqrt{I_e}}.$$

Si expresamos la forma cuadrática en  $\mathbf{r}$  definida por  $\mathbf{I}_O$ ,

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{e} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e})}{I_e} = 1. \quad (7.53)$$

El lugar geométrico de los puntos definidos por esta ecuación es una cuádrica con centro en  $O$ . La expresión (7.53) es una forma cuadrática definida positiva (en todos los casos de sólidos no degenerados), por lo que geoméricamente se trata de un elipsoide, llamado *elipsoide de inercia*. Su expresión desarrollada es

$$I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 - 2P_{xy}xy - 2P_{yz}yz - 2P_{zx}zx = 1$$

El elipsoide de inercia ofrece una manera alternativa de estudiar el movimiento del sólido, a través de procedimientos *geométricos*, en lugar de los procedimientos *algebraicos* mediante el tensor de inercia.

### 7.3.4. Ejes principales de inercia

En un caso general, los vectores velocidad instantánea de rotación  $\boldsymbol{\Omega}$  y el momento cinético  $\mathbf{H}_O = \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}$  no serán paralelos. Sin embargo, existen algunas direcciones privilegiadas de  $\boldsymbol{\Omega}$  en las que sí se cumple esta condición; estas se llaman *direcciones principales de inercia*. Estas direcciones principales dependen del punto considerado para el tensor de inercia, siendo distintas para el tensor en otro punto distinto  $Q \neq O$ .

Si  $\boldsymbol{\Omega}$  es paralela a una dirección principal de inercia, esto quiere decir que existirá un escalar  $\lambda$  que exprese la proporcionalidad,

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} = \lambda \boldsymbol{\Omega};$$

si tomamos el vector unitario  $\mathbf{e}$  correspondiente a esta dirección ( $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}$ ), se cumplirá

$$I_e = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}) = \mathbf{e} \cdot (\lambda \mathbf{e}) = \lambda;$$

es decir, el coeficiente de proporcionalidad es precisamente el momento de inercia según la dirección principal,  $\lambda = I_e$ . Estos coeficientes se denominan *momentos principales de inercia*.

La obtención de las direcciones principales y momentos principales asociados a un tensor  $\mathbf{I}_O$  constituye un *problema de autovalores*: Se trata de encontrar una dirección  $\mathbf{e}$  tal que, para algún  $\lambda$ , verifique

$$\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e} = \lambda \mathbf{e}. \quad (7.54)$$

Introduciendo el tensor unidad  $\mathbf{1}$ , cuyas componentes cartesianas son las deltas de Kronecker ( $\delta_{ij}$ ), resulta la igualdad

$$(\mathbf{I}_O - \lambda \mathbf{1}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{0}. \quad (7.55)$$

Esta expresión corresponde a un sistema de ecuaciones lineal y homogéneo, de incógnitas  $\mathbf{e} \equiv (e_1 \ e_2 \ e_3)$ . Para que exista solución no trivial ( $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ ), la matriz de coeficientes de (7.55) ha de ser singular:

$$\det(\mathbf{I}_O - \lambda \mathbf{1}) = 0, \quad (7.56)$$

expresión que constituye la denominada *ecuación característica* del problema de autovalores (7.54). Se trata de una ecuación cúbica en  $\lambda$ , que posee en general tres raíces, *momentos principales de inercia* ( $\lambda_I = A$ ,  $\lambda_{II} = B$ ,  $\lambda_{III} = C$ ). Al ser  $\mathbf{I}_O$  simétrico, estas tres raíces deben ser reales; como además es definido positivo, las tres serán además positivas.

Cada momento principal de inercia está asociado a una dirección principal de inercia, solución de (7.55) con el valor de  $\lambda$  del momento principal correspondiente: ( $\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}$ ). Admitamos en primer lugar que la ecuación característica tiene tres raíces distintas ( $A \neq B \neq C$ ), las tres direcciones principales se obtienen respectivamente de

$$\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}_I = A \mathbf{e}_I \quad (7.57)$$

$$\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}_{II} = B \mathbf{e}_{II} \quad (7.58)$$

$$\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}_{III} = C \mathbf{e}_{III} \quad (7.59)$$

### Ortogonalidad de los ejes principales de inercia

Una propiedad esencial de las direcciones principales es que, si corresponden a autovalores distintos, han de ser mutuamente ortogonales. En efecto, multiplicando escalarmente (7.57) por  $\mathbf{e}_{\text{II}}$  y (7.58) por  $\mathbf{e}_{\text{I}}$ ,

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{\text{II}} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}_{\text{I}}) &= A\mathbf{e}_{\text{II}} \cdot \mathbf{e}_{\text{I}} \\ \mathbf{e}_{\text{I}} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}_{\text{II}}) &= B\mathbf{e}_{\text{I}} \cdot \mathbf{e}_{\text{II}}\end{aligned}$$

restando estas dos expresiones y haciendo uso de la simetría del tensor de inercia, se obtiene

$$0 = (A - B)\mathbf{e}_{\text{I}} \cdot \mathbf{e}_{\text{II}}.$$

Esta expresión indica la ortogonalidad entre ambas direcciones, ya que por hipótesis antes realizada  $(A - B) \neq 0$ . Por lo tanto, el triedro de referencia  $(O, \mathbf{e}_{\text{I}}, \mathbf{e}_{\text{II}}, \mathbf{e}_{\text{III}})$  formado por las tres direcciones principales en  $O$  constituye una base ortonormal ligada al sólido, denominada *triedro principal de inercia*. Las componentes del tensor de inercia en esta base son

$$(\mathbf{I}_O)_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}_j) = \lambda_i \delta_{ij} \quad (i \text{ no sumado}),$$

lo que equivale a una matriz de componentes diagonal:

$$[\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}.$$

Los ejes principales de inercia corresponden a los ejes geométricos del elipsoide de inercia, cuya expresión en este triedro sería

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

ecuación que corresponde a un elipsoide de semiejes  $(1/\sqrt{A}, 1/\sqrt{B}, 1/\sqrt{C})$ .

### Tensores de inercia cilíndricos o esféricos

En el caso en que existiera una raíz doble en la ecuación característica (7.56), habría dos momentos principales iguales. Los ejes principales de inercia estarán constituidos por el correspondiente a la raíz única y otros dos ejes cualesquiera en el plano normal al primero y que sean ortogonales entre sí, adoptando entonces la matriz de componentes del tensor de inercia la forma

$$[\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}.$$

En este caso es inmediato comprobar que cualquier dirección del plano  $(O, \mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II})$  ortogonal al tercer vector (es decir, un vector  $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{e}_I + \beta\mathbf{e}_{II}$  para  $\alpha$  y  $\beta$  arbitrarias) es también dirección principal de inercia. Estamos ante un tensor de inercia *cilíndrico*. Como ejemplo, este es el caso de un sólido de revolución o un prisma cuya sección sea un polígono regular.

Por último, en el caso en que exista una única raíz triple, análogamente al caso anterior, cualquier dirección del espacio es principal. Podremos escoger como ejes principales tres direcciones ortogonales cualesquiera. Diremos que el tensor de inercia es *esférico*, siendo su expresión en cualquier sistema cartesiano de coordenadas la misma:

$$[\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}.$$

Este es, por ejemplo, el caso de una esfera o de un cubo.

### Máximos y mínimos de los momentos de inercia

Veamos ahora que los momentos de inercia correspondientes a las direcciones principales son los máximos y mínimos de los momentos de inercia para cualquier dirección. Basta plantear el problema de máximos/mínimos condicionados en el que se buscan los extremos de la función

$$I_e(\mathbf{e}) = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}), \quad (7.60)$$

sujetos a la ligadura

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = 1, \quad (7.61)$$

puesto que el versor  $\mathbf{e}$  debe tener módulo unidad. El problema se soluciona mediante el método de los multiplicadores de Lagrange. Tomando una variación infinitesimal de la primera expresión e igualando a cero, la condición de extremo (7.60) queda expresada como

$$2\mathbf{e} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \delta\mathbf{e}) = 0.$$

(donde se ha empleado la simetría de  $\mathbf{I}_O$ .) Multiplicando la ecuación de ligadura (7.61) por un multiplicador arbitrario  $\lambda$ , y tomando igualmente su variación,

$$2\lambda\mathbf{e} \cdot \delta\mathbf{e} = 0.$$

Restando ahora ambas expresiones,

$$(\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e} - \lambda\mathbf{e}) \cdot \delta\mathbf{e} = 0,$$

lo que, al ser  $\delta \mathbf{e}$  arbitrario, obliga a

$$\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e} = \lambda \mathbf{e}. \quad (7.62)$$

Es decir,  $\mathbf{e}$  debe ser una dirección principal, como queríamos demostrar. Por lo tanto, de las tres direcciones principales, una corresponderá al máximo momento de inercia, otra al mínimo, y la tercera a un valor intermedio.

### 7.3.5. Simetrías de masas

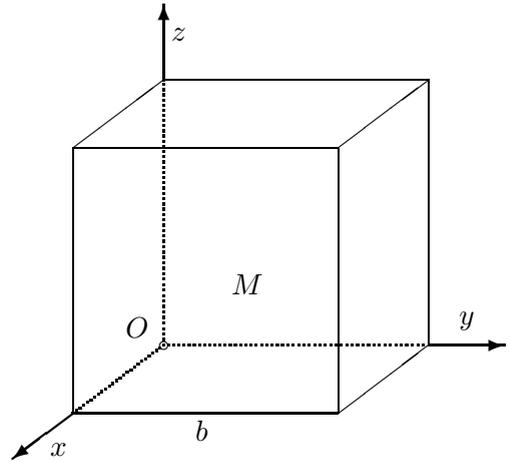
La existencia de simetrías en la distribución de masas simplifica de manera considerable el cálculo del tensor de inercia. En la práctica es conveniente emplear estas simplificaciones siempre que sea posible. Se discuten a continuación algunos de los casos más comunes.

- Plano de Simetría.* Por ejemplo, si  $(Oxy)$  es un plano de simetría del sólido, cualquier partícula de coordenadas  $(x, y, z)$  posee una simétrica  $(x, y, -z)$ . Así,  $P_{xz} = \int_{\mathcal{B}} xz\rho dV = 0$ ,  $P_{yz} = \int_{\mathcal{B}} yz\rho dV = 0$ . En la expresión de la matriz de inercia (7.52), la tercera fila y la tercera columna se anulan, por lo que el eje  $Oz$  (perpendicular al plano de simetría) es un eje principal de inercia.
- Eje de Simetría.* Sea este, ejemplo el eje  $Oz$ . Para toda partícula en  $(x, y, z)$  existe otra en  $(-x, -y, z)$ . Por tanto  $P_{xz} = P_{yz} = 0$ , y el eje de simetría  $Oz$  es también eje principal de inercia.
- Eje de Revolución.* Sea este por ejemplo el eje  $Oz$ . El eje de revolución es también eje de simetría, por lo que  $Oz$  será eje principal. Por otra parte, existe simetría respecto de cualquier plano que contenga al eje de revolución, por lo que todo eje  $\in Oxy$  es principal de inercia. Estaremos por tanto ante un tensor de inercia cilíndrico,

$$[\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}.$$

**EJEMPLO 7.1:** Sea un cubo homogéneo, de masa  $M$  y arista  $b$ . Se desea calcular las componentes del tensor de inercia referido a un vértice del cubo con ejes paralelos a las aristas, así como los ejes principales de inercia.

Figura 7.5: Obtención del tensor de inercia de un cubo respecto del vértice  $O$ , con ejes  $(x, y, z)$  paralelos a las aristas



Calculamos directamente las integrales que definen las componentes del tensor de inercia (7.52) en ejes cartesianos ortonormales (7.52):

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \iiint_V (y^2 + z^2) \rho \, dx \, dy \, dz = \rho \int_0^b dz \int_0^b (y^2 + z^2) \, dy \int_0^b dx \\ &= \rho b \int_0^b dz \int_0^b (y^2 + z^2) \, dy = \rho b \int_0^b \left( \frac{b^3}{3} + bz^2 \right) dz \\ &= \rho b \left( \frac{b^4}{3} + \frac{b^4}{3} \right) = \frac{2}{3} Mb^2, \end{aligned}$$

ya que  $M = b^3 \rho$ . Análogamente

$$I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3} Mb^2.$$

Los productos de inercia valen

$$\begin{aligned} P_{xy} &= \iiint_V xy \rho \, dx \, dy \, dz = \rho \int_0^b dx \int_0^b xy \, dy \int_0^b dz \\ &= \rho b \int_0^b dx \int_0^b xy \, dy = \rho \frac{b^3}{2} \int_0^b x \, dx \\ &= \rho \frac{b^3}{2} \frac{b^2}{2} = \frac{1}{4} Mb^2 \end{aligned}$$

y de igual manera

$$P_{yz} = P_{zx} = \frac{1}{4} Mb^2.$$

Por lo tanto, las componentes del tensor de inercia son

$$[\mathbf{I}_O] = Mb^2 \begin{pmatrix} 2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 \end{pmatrix}. \quad (7.63)$$

Calculemos ahora los ejes principales de inercia. La ecuación característica es:

$$\det(\mathbf{I}_O - \lambda \mathbf{1}) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}\beta - \lambda & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta - \lambda & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

donde se denomina  $Mb^2 = \beta$  para abreviar. Desarrollando el determinante,

$$\det(\mathbf{I}_O - \lambda \mathbf{1}) = \left( \frac{11}{12}\beta - \lambda \right) \left[ \left( \frac{5}{12}\beta - \lambda \right) \left( \frac{2}{3}\beta - \lambda \right) - \frac{1}{8}\beta^2 \right] = 0,$$

cuyas soluciones son  $\lambda = (1/6)\beta$  y  $\lambda = (11/12)\beta$  (doble).

Por lo tanto el tensor de inercia es cilíndrico; expresado en los ejes principales sería

$$[\mathbf{I}_O] = Mb^2 \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 11/12 & 0 \\ 0 & 0 & 11/12 \end{pmatrix}$$

Para obtener las direcciones principales, sustituimos en (7.62) cada autovalor  $\lambda$  solución de la ecuación característica, y resolviendo para  $\mathbf{e}$  obtendremos la dirección principal asociada. Conviene recordar que al ser la matriz de coeficientes singular, estas direcciones principales quedan indeterminadas en función de al menos un parámetro, lo que nos permite elegir las soluciones normalizadas, correspondientes a versores de módulo unidad.

Sustituyendo el primer autovalor ( $\lambda = \beta/6$ ) en (7.62) y simplificando resulta:

$$\begin{aligned} 2e_1 - e_2 - e_3 &= 0, \\ -e_1 + 2e_2 - e_3 &= 0, \\ -e_1 - e_2 + 2e_3 &= 0. \end{aligned}$$

La solución —función de un parámetro indeterminado  $\mu$  ya que las tres ecuaciones no son independientes— es  $\mu(1, 1, 1)$ , que corresponde a la diagonal del cubo.

Las otras dos direcciones principales hay que buscarlas en el plano normal a ésta. Como el otro autovalor es una solución doble, serán cualesquiera dos direcciones de este plano que sean normales entre sí (el tensor de inercia es cilíndrico).

### 7.3.6. Campo tensorial de inercia

Tal y como se ha definido en el apartado 7.3.1, el tensor de inercia es un *tensor de punto*, ligado al punto material  $O$  que se ha tomado como origen de coordenadas. Por lo tanto, al variar dicho punto, se obtendrá un tensor distinto, con lo que se define un *campo tensorial*: a cada punto  $O \in \mathcal{B}$  le corresponde un tensor  $\mathbf{I}_O$ . Si se toma como referencia el centro de masas  $G$ , obtendremos el llamado *tensor central de inercia*,  $\mathbf{I}_G$ :

$$\mathbf{I}_G = \int_{\mathcal{B}} (r_{GP}^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_{GP} \otimes \mathbf{r}_{GP}) \rho dV \quad (7.64)$$

Donde  $\mathbf{r}_{GP} \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{GP}$ , vector posición desde  $G$  a un punto genérico  $P \in \mathcal{B}$ .

Calculemos la expresión del tensor en un punto distinto  $\mathbf{I}_O$  en función del tensor central  $\mathbf{I}_G$ ; empleando la descomposición<sup>11</sup>  $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}_{GP}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_O &= \int_{\mathcal{B}} (r_P^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_P \otimes \mathbf{r}_P) \rho dV \\ &= \int_{\mathcal{B}} (r_G^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G) \rho dV + \int_{\mathcal{B}} (r_{GP}^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_{GP} \otimes \mathbf{r}_{GP}) \rho dV \\ &\quad + 2 \cdot \mathbf{1} \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r}_G \cdot \mathbf{r}_{GP}) \rho dV - \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_{GP} + \mathbf{r}_{GP} \otimes \mathbf{r}_G) \rho dV \end{aligned}$$

Las dos últimas integrales se anulan debido a que se reducen a factores constantes por integrales del tipo  $\int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}_{GP} \rho dV = \mathbf{0}$ . Por lo tanto la expresión del campo tensorial de inercia resulta

$$\mathbf{I}_O = \mathbf{I}_G + M(r_G^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G). \quad (7.65)$$

Desarrollando esta expresión en componentes:

$$(I_O)_{ij} = (I_G)_{ij} + M[r_G^2 \delta_{ij} - (r_G)_i (r_G)_j],$$

o matricialmente:

$$[\mathbf{I}_O] = [\mathbf{I}_G] + M(r_G^2 [\mathbf{1}] - \{\mathbf{r}_G\} \{\mathbf{r}_G\}^T).$$

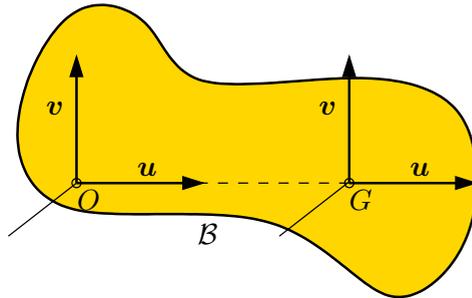
<sup>11</sup>empleamos la notación  $\mathbf{r}_P \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{OP}$  para denotar al vector posición desde el origen  $O$  a un punto  $P$  explicitado en el subíndice

**Propiedades del campo tensorial de inercia**

a. *Ejes principales de inercia*

Sea un punto  $O$  sobre uno de los ejes principales de inercia en  $G$ . Entonces, tanto la dirección principal  $\mathbf{u} \parallel \mathbf{r}_G$  como las otras dos direcciones principales perpendiculares a  $\mathbf{u}$  son también principales en  $O$ . Para comprobar esto, distinguiamos los dos casos, según que la direc-

Figura 7.6: *ejes principales de inercia en un punto  $O$  sito sobre uno de los ejes principales por  $G$*



ción sea la del vector unitario  $\mathbf{u}$  o perpendicular a éste. En el primero,  $\mathbf{r}_G = \overline{OG} \mathbf{u} = r_G \mathbf{u}$ ; aplicando (7.65):

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_O \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{I}_G \cdot \mathbf{u} + M[r_G^2 \mathbf{u} - (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \cdot (r_G^2 \mathbf{u})] \\ &= \lambda \mathbf{u} + M[r_G^2 \mathbf{u} - r_G^2 \underbrace{(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}}_{=1}] \\ &= \lambda \mathbf{u} \end{aligned}$$

En el caso de una dirección  $\mathbf{v}$  normal a  $\mathbf{r}_G$ , tal que  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$ , aplicando de nuevo (7.65) para  $\mathbf{I}_O$ ,

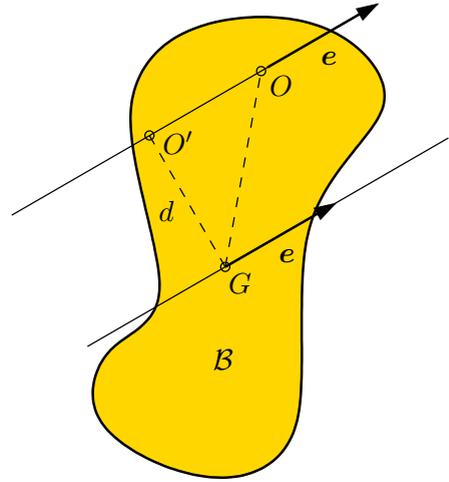
$$\begin{aligned} \mathbf{I}_O \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{I}_G \cdot \mathbf{v} + M[r_G^2 \mathbf{v} - (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \cdot (r_G^2 \mathbf{v})] \\ &= \lambda \mathbf{v} + M[r_G^2 \mathbf{v} - r_G^2 (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}] \\ &= (\lambda + M r_G^2) \mathbf{v} \end{aligned}$$

En ambos casos la dirección principal de  $\mathbf{I}_G$  lo vuelve a ser de  $\mathbf{I}_O$ , con el mismo momento principal de inercia en el primer caso ( $\mathbf{u}$  paralela a  $\mathbf{r}_G$ ), y con el momento aumentado ( $I_{O,v} = I_{G,v} + M r_G^2$ ) en el segundo caso ( $\mathbf{v}$  perpendicular a  $\mathbf{r}_G$ ).

b. *Teorema de Steiner*

Sea un eje por el centro de masas ( $G, \mathbf{e}$ ) en el cual conocemos el momento

Figura 7.7: *Teorema de Steiner: momento de inercia para un eje  $(O, \mathbf{e})$  paralelo a  $(G, \mathbf{e})$*



de inercia  $I_{G,e}$ . El momento de inercia respecto de un eje  $(O, \mathbf{e})$  paralelo por otro punto  $O$  y que diste  $d$  del primero (figura 7.7) será

$$\begin{aligned}
 I_{O,e} &= \mathbf{e} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}) \\
 &= \mathbf{e} \cdot ([\mathbf{I}_G + M(r_G^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G)] \cdot \mathbf{e}) \\
 &= \mathbf{e} \cdot (\mathbf{I}_G \cdot \mathbf{e}) + M[r_G^2(\mathbf{e} \cdot (\mathbf{1} \cdot \mathbf{e})) - \mathbf{e} \cdot ((\mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G) \cdot \mathbf{e})] \\
 &= I_{G,e} + M \underbrace{[r_G^2 - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}_G)(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}_G)]}_{\overline{OO'}^2} \\
 &= I_{G,e} + M d^2.
 \end{aligned}$$

Se obtiene por tanto la expresión del *Teorema de Steiner*:

$$I_{O,e} = I_{G,e} + M d^2.$$

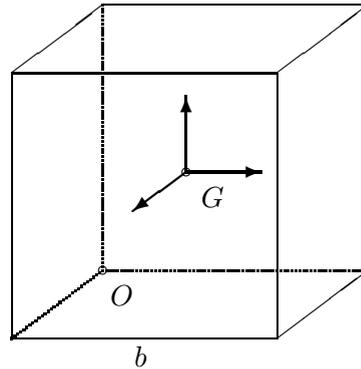
Es inmediato ver que, para una dirección  $\mathbf{e}$  dada, el momento de inercia mínimo es el correspondiente al eje  $(G, \mathbf{e})$  que pasa por  $G$ .

**EJEMPLO 7.2:** Continuando con el cubo del ejemplo 7.1 anterior se pretende ahora hallar el tensor de inercia en el centro de masas, respecto a unos ejes paralelos a las aristas del cubo, a partir del tensor de inercia obtenido antes en un vértice (7.63).

Aplicamos la expresión (7.65) del campo tensorial de inercia:

$$\mathbf{I}_G = \mathbf{I}_O - M(r_G^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G).$$

Figura 7.8: Obtención del tensor central de inercia de un cubo respecto de su centro  $G$



El vector  $\mathbf{r}_G$  vale:

$$(\mathbf{r}_G) = (b/2, b/2, b/2) \Rightarrow \begin{cases} r_G^2 = \frac{3b^2}{4}; \\ r_{G,i} r_{G,j} = \frac{b^2}{4} \quad (\forall i, j). \end{cases}$$

luego:

$$[M(r_G^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G)]_{ij} = M(r_G^2 \delta_{ij} - r_{G,i} r_{G,j}),$$

y su matriz de componentes es

$$M \frac{b^2}{4} \begin{pmatrix} 3-1 & -1 & -1 \\ -1 & 3-1 & -1 \\ -1 & -1 & 3-1 \end{pmatrix} = M \frac{b^2}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, a partir de (7.63),

$$\begin{aligned} [\mathbf{I}_G] &= Mb^2 \begin{pmatrix} 2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 \end{pmatrix} - M \frac{b^2}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= Mb^2 \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se comprueba pues que el triedro formado por las direcciones de las aristas es un triedro principal en  $G$ . Lo mismo se podría haber deducido por simetrías, ya que la dirección de cada arista en  $G$  es un eje de simetría.

De hecho, por ser el tensor esférico (los tres momentos principales son iguales), la matriz de componentes es diagonal y cualquier eje es principal en  $G$ . El resultado habría sido el mismo para cualquier triedro de referencia cartesiano por el centro. En definitiva, el comportamiento de un cubo respecto al giro alrededor de su centro de masas es por lo tanto idéntico al de una esfera.

## 7.4. Ecuaciones de la dinámica

En lo que antecede se han desarrollado los conceptos necesarios de cinemática de la rotación (rotaciones finitas y su parametrización mediante los ángulos de Euler) y de cinética y geometría de masas (tensor de inercia, momentos de inercia, expresiones generales del momento cinético y energía cinética). Pasaremos ahora a plantear las ecuaciones de la dinámica del sólido con un punto fijo, debidas a Euler. Partimos para ello de la ecuación del momento cinético, que tomará la forma (7.17) si se aplica en un punto propiamente fijo o (7.16<sub>2</sub>) si se aplica en  $G$  para un movimiento general.

### 7.4.1. Ecuaciones de Euler

Según hemos visto, el momento cinético  $\mathbf{H}_O$  viene expresado por (7.31), en función del tensor de inercia  $\mathbf{I}_O$ , que define la geometría de masas del sólido respecto a  $O$ . El tensor de inercia será *constante* para un observador ligado al movimiento del cuerpo; en cambio, respecto del sistema de referencia fijo, sería necesario considerar la variación de sus componentes, como se comprueba en (7.40). Así, la derivada (absoluta) de  $\mathbf{H}_O$  conviene realizarla a través del observador ligado al sólido, añadiendo después el término complementario correspondiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= \frac{d}{dt}(\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) \\ &= \left( \frac{d}{dt}(\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) \right)_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la constancia de  $\mathbf{I}_O$  para la derivada relativa al sólido, resulta la denominada *ecuación de Euler* de la dinámica, en su expresión vectorial:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}). \quad (7.66)$$

Hacemos notar que esta ecuación es una expresión vectorial *intrínseca*, es decir, independiente del sistema en el que se expresen sus coordenadas (que podrían desarrollarse en el triedro fijo, el intermedio o el triedro del sólido).

Observamos además que en esta expresión la derivada de  $\boldsymbol{\Omega}$  es indiferente realizarla de forma absoluta o relativa al movimiento del cuerpo:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\Omega}} &= \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \left( \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right)_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega}^0 \\ &= \dot{p}\mathbf{i} + \dot{q}\mathbf{j} + \dot{r}\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Desarrollemos ahora las componentes de la expresión vectorial (7.66) en el triedro del cuerpo. Suponiendo que hemos escogido este según las direcciones principales de inercia<sup>12</sup>,

$$[\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} = Ap \mathbf{i} + Bq \mathbf{j} + Cr \mathbf{k};$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ p & q & r \\ Ap & Bq & Cr \end{vmatrix} \\ &= -(B - C)qr \mathbf{i} - (C - A)pr \mathbf{j} - (A - B)pq \mathbf{k}; \end{aligned}$$

por lo que la expresión en componentes de las *ecuaciones de Euler* resulta:

$$\begin{cases} M_x = A\dot{p} - (B - C)qr, \\ M_y = B\dot{q} - (C - A)rp, \\ M_z = C\dot{r} - (A - B)pq. \end{cases} \quad (7.67)$$

Para desarrollar el planteamiento completo de las ecuaciones dinámicas en función de las coordenadas sería necesario sustituir en la expresión anterior los valores de  $(p, q, r)$  y de sus derivadas en función de los ángulos de Euler (6.54), que repetimos a continuación

$$\begin{cases} p = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi, \\ q = -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi, \\ r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta. \end{cases} \quad (7.68)$$

Eliminando  $(p, q, r)$  entre estas ecuaciones se podría obtener un conjunto de 3 ecuaciones diferenciales de 2.º orden en función de los ángulos de Euler  $(\psi, \theta, \varphi)$ . Sin embargo, estas ecuaciones resultan excesivamente farragosas y se suele preferir plantear los dos conjuntos de 3 ecuaciones de primer orden de manera simultánea, lo que es equivalente.

El conjunto de 6 ecuaciones diferenciales de primer orden (7.67) y (7.68) queda planteado en función de las 6 variables,  $(\psi, \theta, \varphi)$  y  $(p, q, r)$ . Su resolución puede llevarse a cabo por métodos analíticos (en el capítulo 8 se discute la solución para algunas aplicaciones concretas), o bien por métodos numéricos (por ejemplo mediante el método de integración paso a paso en el tiempo de Runge-Kutta).

<sup>12</sup>obviamente las direcciones principales de inercia son ejes materiales fijos ligados al sólido, y al ser ortogonales entre sí forman un triedro.

### 7.4.2. Ecuaciones de Euler empleando el triedro intermedio

Cuando se trata de un sólido de revolución puede ser conveniente expresar las ecuaciones dinámicas realizando la derivada relativa respecto al denominado *triedro intermedio* (apartado 6.3.4). La velocidad de rotación de este sistema respecto al fijo<sup>13</sup> es  $(\boldsymbol{\Omega} - \dot{\varphi}\mathbf{k})$ :

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{I}_O \cdot \left( \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right)_{\text{rel}} + (\boldsymbol{\Omega} - \dot{\varphi}\mathbf{k}) \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega})$$

Al tomar la derivada relativa en la ecuación anterior respecto a un observador ligado al triedro intermedio, se ha tenido en cuenta que, al ser el sólido de revolución su tensor de inercia permanece inalterado por la rotación propia, por tanto  $\mathbf{I}_O$  no se deriva.

Desarrollando la ecuación en componentes, suponiendo que se ha elegido el triedro principal de inercia con momentos principales  $(A, A, C)$ :

$$\mathbf{I}_O \cdot \left( \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right)_{\text{rel}} = A\dot{p}'\mathbf{u} + A\dot{q}'\mathbf{v} + C\dot{r}'\mathbf{k}$$

$$(\boldsymbol{\Omega} - \dot{\varphi}\mathbf{k}) \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \begin{vmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{k} \\ p' & q' & r' - \dot{\varphi} \\ Ap' & Aq' & Cr' \end{vmatrix}$$

resulta:

$$\begin{cases} M_u = A\dot{p}' - (A - C)q'r' + Aq'\dot{\varphi} \\ M_v = A\dot{q}' - (C - A)r'p' - Ap'\dot{\varphi} \\ M_z = C\dot{r}' \end{cases} \quad (7.69)$$

Observamos además que se verifica  $r' = r$ , por lo que no hace falta la distinción entre ambas variables. Estas ecuaciones se complementan con las que expresan las componentes  $(p', q', r)$  obtenidas anteriormente (6.55) y que repetimos aquí:

$$\begin{cases} p' = \dot{\theta}, \\ q' = \dot{\psi} \sin \theta, \\ r' = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \quad [= r]. \end{cases} \quad (7.70)$$

Las 6 ecuaciones (7.69) y (7.70) definen en este caso el problema en función de las 6 variables  $(\psi, \theta, \varphi)$  y  $(p', q', r)$ . En este caso es más sencillo la eliminación

<sup>13</sup>No debe confundirse esta *velocidad de rotación relativa* con las componentes de la *velocidad de rotación absoluta* en el triedro intermedio, deducidas en el apartado 6.3.5.

de las componentes de la velocidad de rotación, dando lugar a las 3 ecuaciones de la dinámica directamente en función de los 3 ángulos de Euler  $(\psi, \theta, \varphi)$ :

$$\begin{cases} M_u = A\ddot{\theta} - A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + Cr\dot{\psi} \sin \theta, \\ M_v = A\ddot{\psi} \sin \theta + 2A\dot{\psi}\dot{\theta} \cos \theta - Cr\dot{\theta}, \\ M_z = C\dot{r}. \end{cases} \quad (7.71)$$

De la tercera ecuación en (7.69<sub>3</sub>) se observa que, para sólidos de revolución, si el momento  $M_z$  según el eje de revolución se anula, la velocidad de rotación según dicho eje se conserva:  $M_z = 0 \Rightarrow r = r' = \text{cte}$ . Conviene notar que esta propiedad sólo se verifica para un tensor cilíndrico en que los momentos de inercia según dos ejes perpendiculares al eje  $z$  sean iguales, como es el caso en un sólido de revolución.

### 7.4.3. Ecuaciones de Lagrange

Las ecuaciones de Euler la dinámica (7.67) ó (7.69) se han obtenido antes por los procedimientos vectoriales (Newton-Euler). A partir de la dinámica analítica se podrían haber obtenido también tres ecuaciones dinámicas, que cabría esperar que fueran equivalentes a las ecuaciones de Euler. En realidad, tan sólo una de las ecuaciones así obtenidas coincide directamente con alguna de las ecuaciones de Euler: se trata de la ecuación de Lagrange en  $\varphi$ , que viene a ser la misma que la ecuación en (7.67<sub>3</sub>), es decir la ecuación de Euler correspondiente al movimiento de giro alrededor del eje  $Oz$  del triedro móvil. Las otras dos ecuaciones, aunque no son directamente iguales, como veremos forman un conjunto equivalente a las ecuaciones de Euler.

Obtenemos la ecuación de Lagrange en dirección  $\varphi$  desarrollando los términos de (2.12). Para ello expresamos las derivadas mediante la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial T}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \dot{\varphi}} \right] = C\dot{r} \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= \frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{\partial T}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \varphi} + \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \varphi} \\ &= Ap \underbrace{(\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi)}_q + Bq \underbrace{(-\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi - \dot{\theta} \cos \varphi)}_{-p} \\ &= (A - B)pq. \end{aligned}$$

siendo por tanto la ecuación resultante

$$Q_\varphi = C\dot{r} - (A - B)pq.$$

Se observa la identidad de ésta con (7.67<sub>3</sub>), teniendo la fuerza generalizada  $Q_\varphi$  la interpretación física de la componente  $M_z$  del momento. Por permutación cíclica, cambiando los papeles de los ejes  $(x, y, z)$ , sería posible deducir las otras dos ecuaciones de Euler expresadas en (7.67).

También se pueden obtener directamente las ecuaciones de Lagrange relativas a las variables  $\psi$  y  $\theta$ . No detallaremos aquí el desarrollo y daremos únicamente el resultado, quedando propuesta la deducción como ejercicio al lector:

$$\begin{aligned} Q_\psi &= A\dot{p} \sin \theta \sin \varphi + Ap(\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi) + B\dot{q} \sin \theta \cos \varphi \\ &\quad + Bq(\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi) + C\dot{r} \cos \theta - Cr\dot{\theta} \sin \theta \\ Q_\theta &= A\dot{p} \cos \varphi - Ap(\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi) - B\dot{q} \sin \varphi \\ &\quad - Bq(\dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi) + Cr\dot{\psi} \sin \theta \end{aligned}$$

Conviene recalcar que, aunque las ecuaciones de Lagrange en función de las coordenadas generalizadas  $(\psi, \theta, \varphi)$  no son las mismas ecuaciones que las de Euler (7.67), son combinación lineal de ellas y en conjunto constituyen un sistema equivalente. Es fácil, obteniendo los coeficientes de esta combinación lineal, expresar los momentos generalizados  $(Q_\psi, Q_\theta, Q_\varphi)$  a partir de los momentos «físicos»  $(M_x, M_y, M_z)$ :

$$\begin{aligned} Q_\psi &= M_x \sin \theta \sin \varphi + M_y \sin \theta \cos \varphi + M_z \cos \theta \\ Q_\theta &= M_x \cos \varphi - M_y \sin \varphi \\ Q_\varphi &= M_z. \end{aligned}$$

#### 7.4.4. Cálculo de reacciones en los enlaces

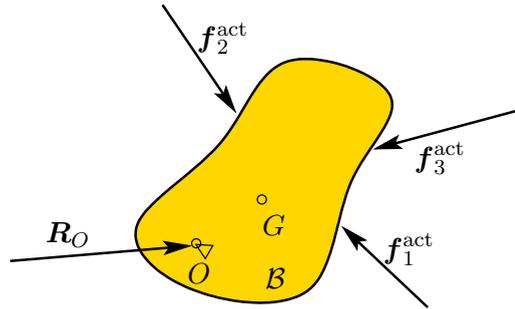
##### Sólido con un punto fijo

Como es lógico, en la ligadura del punto fijo se produce una fuerza de reacción. Esta será un vector  $\mathbf{R}_O$  de dirección en principio arbitraria, aplicada en  $O$ .

La reacción se puede calcular fácilmente a través de la expresión del balance de la cantidad de movimiento (7.16<sub>1</sub>), descomponiendo las fuerzas en activas y reactivas:

$$\mathbf{F}^{\text{act}} + \mathbf{R}_O = M\mathbf{a}_G$$

Figura 7.9: Fuerza de reacción  $R_O$  de un sólido con un punto  $O$  fijo



siendo  $F^{\text{act}} = \sum_i f_i^{\text{act}}$  la resultante de las fuerzas externas activas aplicadas al sólido.

Por cinemática sabemos que

$$a_G = \dot{\Omega} \wedge r_{OG} + \Omega \wedge (\Omega \wedge r_{OG})$$

de donde

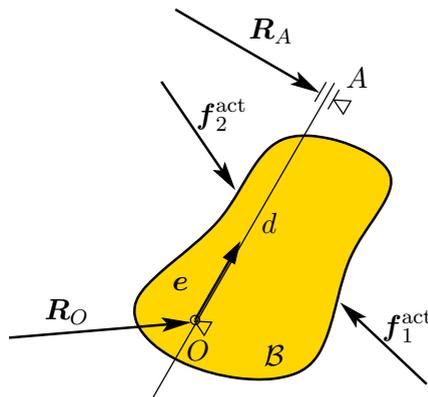
$$R_O = M[\dot{\Omega} \wedge r_{OG} + \Omega \wedge (\Omega \wedge r_{OG})] - F^{\text{act}}. \tag{7.72}$$

Los valores de  $\dot{\Omega}$  y  $\Omega$  se obtendrían de resolver las ecuaciones de Euler (7.66). En el caso en que el punto fijo sea precisamente  $G$ , la ecuación anterior (7.72) se reduce a la expresión trivial  $R_G = -F^{\text{act}}$ .

### Sólido con un eje fijo (2 puntos fijos)

Suponemos ahora que el eje fijo se materializa mediante un punto fijo ( $O$ ) y otro punto  $A$  cuyo movimiento está restringido en dirección normal a  $OA$  (en la propia dirección de  $OA$  no es necesario restringir ya que el sólido es rígido). El momento de las fuerzas en  $O$  es el de las fuerzas exteriores activas, más el

Figura 7.10: Fuerzas de reacción de un sólido con un eje fijo, materializado mediante un punto  $O$  fijo y otro punto  $A$  que sólo permite movimiento en la dirección del eje.



de la reacción en  $A$ ; planteando así las ecuaciones de Euler (7.66)

$$\mathbf{M}_O^{\text{act}} + \mathbf{r}_{OA} \wedge \mathbf{R}_A = \mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) \quad (7.73)$$

donde  $\mathbf{r}_{OA} = d\mathbf{e}$ , y al ser  $\mathbf{e}$  un vector fijo,

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{e}, \quad \dot{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\Omega}\mathbf{e}.$$

La expresión (7.73) es una ecuación vectorial que permite calcular  $\mathbf{R}_A$ . Recordemos que en el apartado 6.1.2 ya se estudiaron este tipo de ecuaciones, en el contexto de la cinemática. Para que exista solución, la condición de compatibilidad exige que  $\mathbf{e}$  sea normal al término independiente:

$$\mathbf{e} \cdot [\mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) - \mathbf{M}_O^{\text{act}}] = I_{O,e} \dot{\Omega} - M_e = 0,$$

condición que como vemos efectivamente se cumple (recuérdese (7.28)). Despejando pues  $\mathbf{R}_A$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_A &= \frac{[\mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) - \mathbf{M}_O^{\text{act}}] \wedge d\mathbf{e}}{d^2} \\ &= \frac{[\dot{\Omega}\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e} + \Omega^2\mathbf{e} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}) - \mathbf{M}_O^{\text{act}}] \wedge \mathbf{e}}{d} \end{aligned}$$

En el caso particular en que se cumpla  $\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e} = I_{O,e}\mathbf{e}$  (es decir si  $\mathbf{e}$  es un eje principal), entonces la expresión anterior resulta

$$\mathbf{R}_A = \frac{\mathbf{e} \wedge \mathbf{M}_O^{\text{act}}}{d}.$$

Es inmediato comprobar que este valor es el mismo que se produciría en situación estática, por lo que en este caso particular no se producen efectos dinámicos sobre la reacción.

Una vez calculada  $\mathbf{R}_A$ , la reacción en el otro punto,  $\mathbf{R}_O$ , se calcula de igual manera que en (7.72):

$$\mathbf{R}_O = M\mathbf{a}_G - \mathbf{F}^{\text{act}} - \mathbf{R}_A.$$

# Aplicaciones de la dinámica del sólido

## Índice

---

<b>8.1. El péndulo esférico</b> . . . . .	<b>265</b>
<b>8.2. Movimiento por inercia</b> . . . . .	<b>269</b>
8.2.1. Propiedades del movimiento; construcción de Poinsot	269
8.2.2. Ejes permanentes de rotación . . . . .	274
8.2.3. Ecuaciones del movimiento . . . . .	277
<b>8.3. La peonza simétrica</b> . . . . .	<b>280</b>
8.3.1. Ecuaciones del movimiento de una peonza . . . . .	280
8.3.2. Estabilidad de la peonza dormida . . . . .	285
<b>8.4. Efecto giroscópico</b> . . . . .	<b>286</b>
<b>8.5. Dinámica del sólido en sistemas no inerciales</b> . . . . .	<b>291</b>

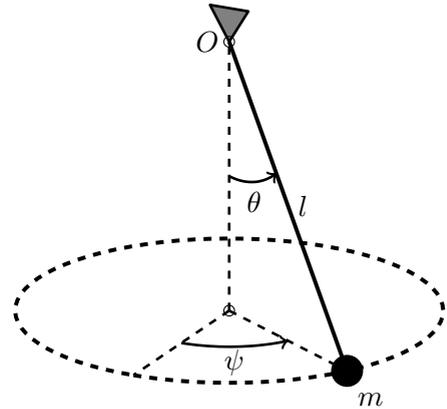
---

## 8.1. El péndulo esférico

En este capítulo se describen algunos ejemplos significativos de aplicación de las ecuaciones de la dinámica de sólidos rígidos en movimiento tridimensional. En primer lugar se trata el caso del denominado *péndulo esférico* que al no tener rotación propia se caracteriza únicamente por dos grados de libertad y resulta más sencillo.

Sea una masa puntual  $m$  sujeta a un extremo de una varilla rígida y sin masa de longitud  $l$ , cuyo otro extremo ( $O$ ) está fijo. El sistema rígido así

Figura 8.1: Un péndulo esférico consiste en una masa puntual  $m$  unida por una varilla rígida a un punto fijo  $O$ , pudiéndose mover en cualquier dirección del espacio.



definido no tiene dimensión transversal a la varilla/partícula, que consideramos alineada con el eje  $Oz$  (versor  $\mathbf{k}$ ) del *triedro del cuerpo*. No existe inercia a la *rotación propia* alrededor de dicho eje, por lo que no tiene sentido definir este grado de libertad. El movimiento queda caracterizado únicamente por dos ángulos:  $\psi$  (*precesión*) y  $\theta$  (*nutación*) (figura 8.1). Es inmediato ver que el triedro del cuerpo, cualesquiera que sean las orientaciones de los otros dos ejes  $Ox$  y  $Oy$  normales a  $Oz$ , es principal. Las componentes del tensor de inercia en  $O$  son

$$[\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particular, consideraremos el eje  $Ox$  horizontal y normal al plano formado por la varilla y la vertical por  $O$ , es decir, tangente a la circunferencia dibujada en la figura 8.1, y el eje  $Oy$  normal a la varilla y contenido en dicho plano vertical. Las componentes de la velocidad de rotación según estos ejes son respectivamente  $p = \dot{\theta}$  y  $q = \dot{\psi} \sin \theta$  (según el eje  $Oz$  como ya se ha comentado no se considera rotación,  $r = 0$ ). Puede comprobarse que estos valores resultan de particularizar las componentes de (6.54) para  $\varphi = 0$ , o bien de tomar directamente las componentes en el triedro intermedio (6.55). La Lagrangiana vale por tanto

$$L = \frac{1}{2}ml^2(p^2 + q^2) + mgl \cos \theta = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + mgl \cos \theta.$$

Podemos expresar dos integrales primeras. En primer lugar  $\psi$  es una coordenada cíclica puesto que no aparece en la Lagrangiana ( $\partial L / \partial \psi = 0$ ):

$$H = ml^2 \dot{\psi} \sin^2 \theta. \quad (8.1)$$

Por otra parte, la energía total se conserva, al ser las únicas fuerzas las del campo gravitatorio conservativo:

$$E = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \text{sen}^2 \theta) - mgl \cos \theta. \quad (8.2)$$

De (8.1) despejamos la velocidad de precesión:

$$\dot{\psi} = \frac{H}{ml^2 \text{sen}^2 \theta},$$

de donde se desprende que  $\dot{\psi}$  nunca cambia de signo, ya que en el lado derecho de la igualdad el único término que no es constante ( $\text{sen}^2 \theta$ ) es siempre positivo. Eliminando  $\dot{\psi}$  en la ecuación (8.2), se obtiene:

$$E = \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{H^2}{2ml^2 \text{sen}^2 \theta} - mgl \cos \theta,$$

y despejando  $\dot{\theta}^2$ ,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2E}{ml^2} - \frac{H^2}{m^2 l^4 \text{sen}^2 \theta} + \frac{2g}{l} \cos \theta.$$

Se puede ahora realizar el cambio

$$u = \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}^2 = \frac{\dot{u}^2}{1 - u^2},$$

obteniéndose al eliminar  $\theta$  una ecuación cúbica en  $u$ :

$$f(u) = \dot{u}^2 = (1 - u^2) \left( \frac{2E}{ml^2} + \frac{2g}{l} u \right) - \frac{H^2}{m^2 l^4}. \quad (8.3)$$

Para que el movimiento físico sea real debe ser  $f(u) = \dot{u}^2 \geq 0$ , con lo cual se puede delimitar el rango de valores de  $u$  en el que se desarrolla dicho movimiento. La ecuación (8.3) es un polinomio cúbico que posee tres soluciones reales para  $f(u) = 0$ , correspondientes a puntos de máximo o mínimo de  $u$ , ya que en ellas vale  $\dot{u} = 0$ . De ellas, dos y sólo dos están comprendidas entre  $u = 1$  y  $u = -1$ , rango de validez del cambio de variable anterior. En efecto, para  $u = \pm 1$  se comprueba fácilmente que  $f(u) < 0$  (el primer sumando de la ecuación (8.3) se anula y sólo queda el segundo que es negativo); luego para que efectivamente exista un movimiento real con  $f(u) > 0$  dentro del intervalo considerado, debe haber dos puntos ( $u_1, u_2$ ) en que la curva  $f(u)$  cruce el eje  $f(u) = 0$  (figura 8.2). Por ello la nutación  $\theta$  oscilará comprendida entre dos valores extremos  $\theta_{\min} = \arccos u_1$  y  $\theta_{\max} = \arccos u_2$  correspondientes a las dos soluciones citadas (figura 8.3).

Figura 8.2: Gráfico de la ecuación cúbica  $f(u)$  obtenida a partir de la integral primera de la energía, en función de  $u = \cos \theta$ . Las raíces  $f(u) = 0$  corresponden a los valores extremos de la nutación, existiendo dos en el rango de validez del parámetro ( $-1 < u < +1$ ). El movimiento se desarrolla con  $f(u) > 0$  y por tanto la nutación estará comprendida entre estas soluciones:  $\theta_1 = \arccos u_1$  y  $\theta_2 = \arccos u_2$ . El valor  $u_1 \in [0, 1]$  corresponde al mínimo de la nutación  $\theta_1 = \theta_{\min} \in [0, \pi/2]$ .

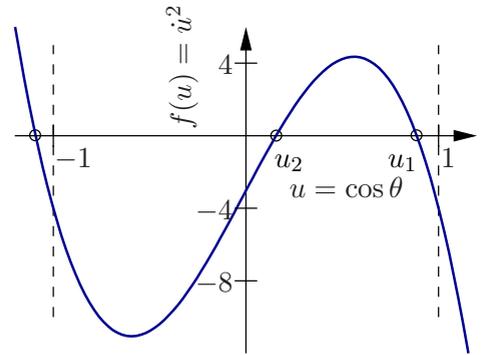
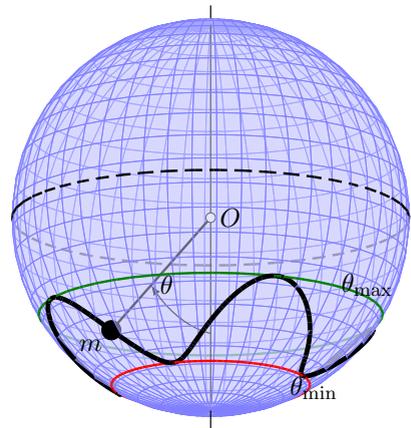


Figura 8.3: La trayectoria del péndulo esférico se sitúa entre dos valores extremos, máximo y mínimo, de la nutación. El mínimo (punto más bajo de la trayectoria) está necesariamente por debajo del punto  $O$ , es decir, por debajo del ecuador de la esfera ( $\theta_{\min} \in [0, \pi/2]$ ).



Se puede demostrar que en el péndulo el mínimo de  $\theta$  necesariamente debe estar por debajo del punto de apoyo  $O$ , es decir,  $0 \leq \theta_{\min} \leq \pi/2$ . En efecto, obtengamos la ecuación de Lagrange en  $\theta$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2 \ddot{\theta}; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2 \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta - mgl \sin \theta,$$

resultando

$$ml^2 \ddot{\theta} = ml^2 \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta - mgl \sin \theta.$$

Para  $\pi/2 < \theta < \pi$  se verifica  $\sin \theta > 0$ ,  $\cos \theta < 0$ ; por tanto de la ecuación de Lagrange anterior se deduce que en este intervalo  $\ddot{\theta} < 0$ , lo que hace imposible que exista un mínimo dentro de él (en el mínimo debe ser  $\ddot{\theta} > 0$ ). Por tanto

$\theta_{\min}$  ha de estar necesariamente entre 0 y  $\pi/2$ , como queríamos demostrar (figura 8.3).

## 8.2. Movimiento por inercia

### 8.2.1. Propiedades del movimiento; construcción de Poincot

Cuando un sólido con un punto fijo no tiene fuerzas aplicadas o estas son tales que su momento respecto del punto fijo es nulo ( $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ ), el movimiento se produce únicamente por la inercia del mismo, las fuerzas (si existen) no juegan ningún papel. Este *movimiento por inercia* tiene varias propiedades notables, que estudiaremos a continuación.

a) *El momento cinético  $\mathbf{H}_O$  es constante.*

Se deduce inmediatamente de la nulidad del momento de las fuerzas,

$$\mathbf{M}_O = \frac{d}{dt}(\mathbf{H}_O); \quad \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{H}_O = \text{cte.} \quad \square \quad (8.4)$$

Por tanto  $\mathbf{H}_O$  define un vector de módulo y dirección constantes en el espacio. Convencionalmente, escogeremos esta *dirección invariante* como versor  $\mathbf{K}$  del *triedro fijo*, y llamaremos  $H$  al módulo:

$$\mathbf{H}_O = H\mathbf{K}. \quad (8.5)$$

b) *La Energía Cinética  $T$  es constante.*

Si no hay fuerzas aplicadas o si estas no desarrollan trabajo en el movimiento alrededor de un punto fijo, es obvio que la única componente de la energía mecánica es la cinética y que esta debe por tanto conservarse.

También puede desarrollarse una demostración más «formal». Para ello se parte de la constancia de  $\mathbf{H}_O$ ,

$$\mathbf{0} = \frac{d}{dt}\mathbf{H}_O = \mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}); \quad (8.6)$$

premultiplicando escalarmente por  $\boldsymbol{\Omega}$ , que es perpendicular al segundo sumando de la expresión anterior, resulta:

$$0 = \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}); \quad (8.7)$$

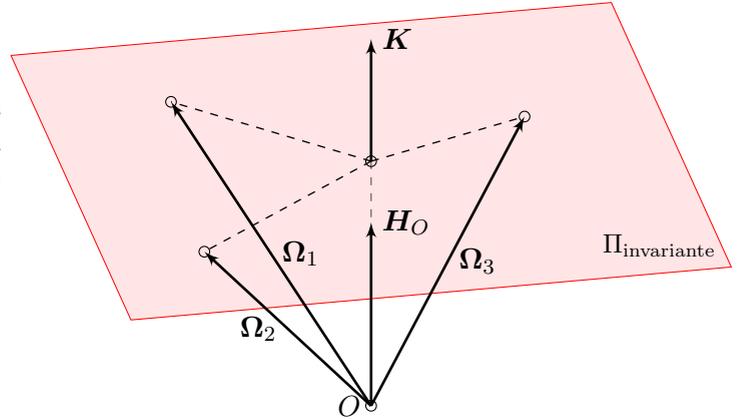
por otra parte, considerando la simetría de  $\mathbf{I}_O$ :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) \right] = \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}) = 0. \quad \square \quad (8.8)$$

Como corolario de esta última propiedad, se puede afirmar que

«la proyección de  $\boldsymbol{\Omega}$  sobre la dirección invariante  $\mathbf{K} = \mathbf{H}_O/H$  es constante.»

Figura 8.4: En el movimiento por inercia la proyección de  $\boldsymbol{\Omega}$  sobre la dirección fija de  $\mathbf{H}_O$  es constante, estando el extremo del vector  $\boldsymbol{\Omega}$  situado sobre el plano invariante.



En efecto,

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{H}_O = \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) = 2T \quad (\text{cte.}) \quad (8.9)$$

Este resultado admite una interpretación geométrica: el extremo del vector  $\boldsymbol{\Omega}$ , supuesto su origen en  $O$ , pertenece a un plano fijo, perpendicular a  $\mathbf{H}_O$  y situado a una distancia  $2T/H$ , denominado *plano invariante* (figura 8.4).

c) De la expresión de  $\mathbf{H}_O$  se obtiene una constante:

$$H^2 = \mathbf{H}_O \cdot \mathbf{H}_O = (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O^2 \cdot \boldsymbol{\Omega}), \quad (8.10)$$

donde se ha tenido en cuenta la simetría de  $\mathbf{I}_O$ . Por otra parte, de la expresión de  $T$  se obtiene otra constante:

$$2T = \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}). \quad (8.11)$$

Multiplicando (8.10) por  $2T$ , (8.11) por  $H^2$  y restando ambas términos a término:

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot (H^2 \mathbf{I}_O - 2T \mathbf{I}_O^2) \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0. \quad (8.12)$$

Esta ecuación define una forma cuadrática degenerada, en función de la matriz de coeficientes constante  $[\mathbf{A}] = H^2[\mathbf{I}_O] - 2T[\mathbf{I}_O]^2$ . Esta forma es la expresión general de un *cono cuádrico*<sup>1</sup>, es decir un cono cuya sección

<sup>1</sup>La ecuación general de un cono cuádrico en ejes principales es  $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$ , siendo  $a$  y  $b$  los semiejes de la sección recta elíptica. Como caso particular  $a = b$  se obtiene el cono recto circular,  $x^2/a^2 + y^2/a^2 - z^2/c^2 = 0$ . Es posible comprobar, desarrollando las componentes en ejes principales de la matriz  $[\mathbf{A}]$  que se obtiene una ecuación de este tipo, y que si el tensor de inercia es cilíndrico será un cono recto circular.

recta es en general una elipse, siendo  $\Omega$  una generatriz del cono. Este cono se denomina *cono del cuerpo*, y a lo largo del movimiento rueda sin deslizar sobre el *cono fijo*, superficie que describe  $\Omega$  en relación al triedro fijo. Este último es también un cono, al pasar su generatriz  $\Omega$  siempre por el punto  $O$ , aunque por lo general no es cuádrico. Ambos conos corresponden, respectivamente, a los axoides móvil y fijo del movimiento del sólido (apartado 6.1.2).

d) La constancia de la energía cinética permite escribir:

$$\Omega \cdot \left( \frac{I_O}{2T} \cdot \Omega \right) = 1,$$

expresión que es enteramente análoga a (7.53) que define el elipsoide de inercia, sin más que aplicar el factor de escala  $r = \Omega/\sqrt{2T}$  (recordemos que  $T$  es constante). Por lo tanto, el lugar geométrico definido por el vector  $\Omega/\sqrt{2T}$  es precisamente el elipsoide de inercia<sup>2</sup>.

La normal a este elipsoide viene definida por el gradiente de la superficie:

$$\frac{\partial}{\partial \Omega} \left[ \Omega \cdot \left( \frac{I_O}{2T} \cdot \Omega \right) \right] = \frac{I_O}{T} \cdot \Omega = \frac{H_O}{T}, \quad (8.13)$$

es decir, coincide con la dirección invariante, normal al plano invariante. Comprobamos por tanto que este elipsoide en el punto definido por  $\Omega$  es tangente precisamente al plano invariante definido en la propiedad b).

En resumen, las propiedades anteriores del movimiento por inercia permiten la siguiente construcción geométrica debida a Poincot que lo define:

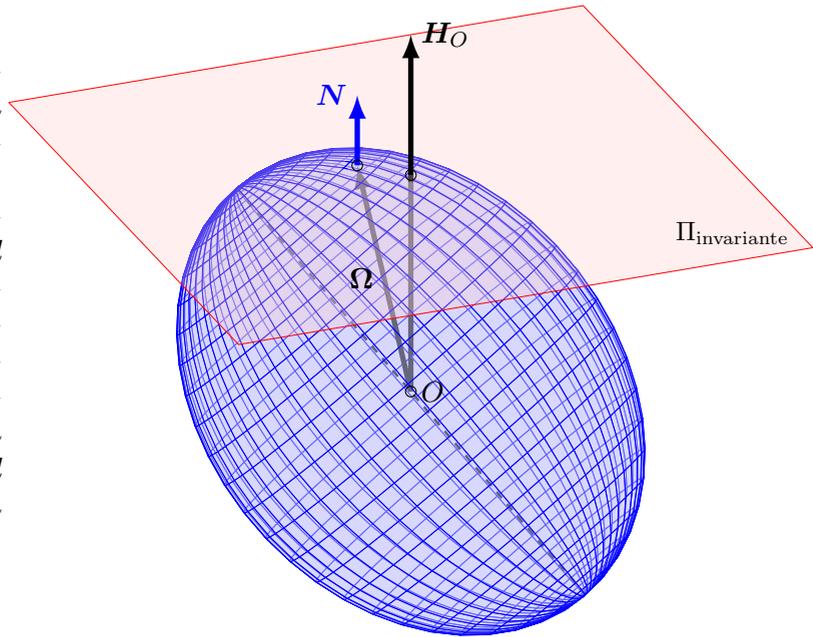
1. El vector  $\Omega$  pertenece a un *elipsoide* homotético al de inercia (de razón  $\sqrt{2T}$ ), con centro en  $O$ , que permanece tangente a lo largo del movimiento al *plano invariante*, plano perpendicular a  $H_O$  y situado a una distancia  $2T/H$  de  $O$ . Al ser nula la velocidad de todos los puntos del sólido sobre el eje  $(O, \Omega)$ , el movimiento es una *rodadura sin deslizamiento* del elipsoide sobre el plano invariante<sup>3</sup>.
2. Considerando un sólido con simetría de revolución<sup>4</sup> el vector  $\Omega$  genera en el sistema de referencia del cuerpo un lugar geométrico que es un cono

<sup>2</sup>Otra manera de expresar lo mismo es diciendo que  $\Omega$  define un elipsoide homotético al de inercia, de razón  $\sqrt{2T}$ .

<sup>3</sup>El lugar geométrico que define el punto de contacto (definido por  $\Omega$ ) sobre el elipsoide se denomina *Polodia*, mientras que el correspondiente lugar geométrico sobre el plano invariante se llama *Herpolodia*.

<sup>4</sup>En realidad basta con que el tensor de inercia sea cilíndrico

Figura 8.5: El extremo de  $\Omega$ , en relación con el sistema de referencia del cuerpo, está sobre un elipsoide, homotético al de inercia. Este elipsoide es además tangente en todo instante al plano invariante (su normal común es  $\mathbf{N}$ ), sobre el cual rueda (y pivota) sin deslizar.



recto circular (*cono del cuerpo*). En una referencia fija, genera otro cono recto circular (*cono fijo*). El movimiento del sólido se puede interpretar como el cono del cuerpo rodando sin deslizar sobre el cono fijo (figura 8.6).

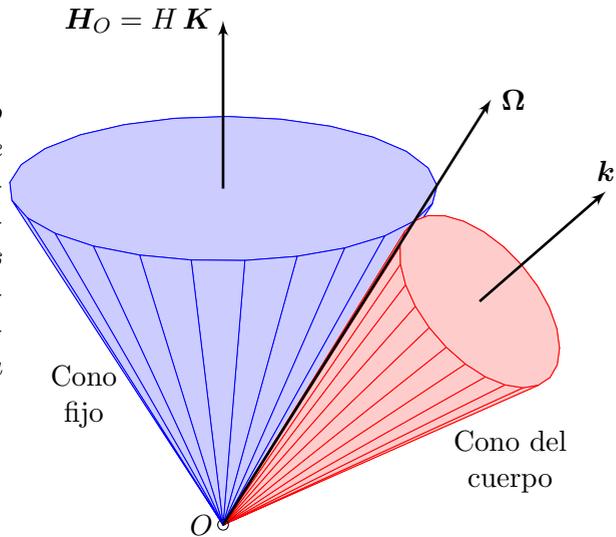
Estos dos conos son precisamente los denominados *axoide móvil* (6.25) y *axoide fijo* (6.26) en el estudio del campo de velocidades.

OBSERVACIONES.-

- En general  $\Omega$  no es constante ni en módulo ni en dirección, a pesar de que  $\mathbf{H}_O$  sí lo sea.
- En el caso particular de un sólido de revolución (tensor de inercia cilíndrico), el módulo  $\Omega = |\Omega|$  sí será constante, aunque su dirección varíe según la generatriz del cono.

EJEMPLO 8.1: Sea un cilindro macizo homogéneo de radio  $r$ , altura  $h$  y masa  $m$ , que se mueve libremente en el campo gravitatorio simplificado. Se le pone en movimiento comunicándole una velocidad inicial de rotación que forma  $45^\circ$  con el eje del cilindro, y cuya componente según dicho eje vale  $\omega$ . Describir el movimiento del sólido.

Figura 8.6: El movimiento por inercia es análogo al de un cono móvil con el cuerpo, que rueda sin deslizar sobre un cono fijo. Ambos conos son los axoides del movimiento, y comparten en todo instante una generatriz, definida por el vector  $\Omega$ .



SOLUCIÓN: Los momentos principales de inercia son:

$$A = B = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2; \quad C = \frac{1}{2}mr^2.$$

La velocidad de rotación inicial es  $\Omega_0 = (\omega, 0, \omega)$ , luego

$$\begin{aligned} H_O &= A\omega \mathbf{i} + C\omega \mathbf{k}; & T &= \frac{1}{2}(A\omega^2 + C\omega^2); \\ H &= \omega\sqrt{A^2 + C^2}; & \mathbf{K} &= \frac{1}{\sqrt{A^2 + C^2}}(A \mathbf{i} + C \mathbf{k}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz de coeficientes del cono del cuerpo (cf. ecuación (8.12)) es

$$\mathbf{A} = 2T\mathbf{I}_O^2 - H^2\mathbf{I}_O = AC(A - C)\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se trata de un cono de revolución, con vértice en el centro del cilindro y cuyo eje lleva la dirección  $\mathbf{k}$ . El semiángulo cónico es

$$\cos \alpha_1 = \mathbf{k} \cdot \frac{\Omega_0}{\Omega_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{4}.$$

Por otra parte, el cono fijo es igualmente un cono de revolución, cuyo eje lleva la dirección de  $\mathbf{K}$  y el semiángulo cónico es

$$\cos \alpha_1 = \mathbf{K} \cdot \frac{\Omega_0}{\Omega_0} = \frac{A + C}{\sqrt{2}\sqrt{A^2 + C^2}}.$$

A su vez, el elipsoide de inercia será de revolución con semiejes  $(1/\sqrt{A}, 1/\sqrt{C})$ , siendo su ecuación  $Ax^2 + Ay^2 + Cz^2 = 1$ . El vector velocidad angular, en el sistema de referencia del cuerpo, permanece sobre un elipsoide homotético al de inercia, de ecuación

$$Ap^2 + Aq^2 + Cr^2 = 2T,$$

donde  $(p, q, r)$  son las componentes de  $\boldsymbol{\Omega}$ .

### 8.2.2. Ejes permanentes de rotación

En el apartado anterior hemos observado que el vector velocidad de rotación  $\boldsymbol{\Omega}$  no tiene porqué ser constante, ni en dirección ni en módulo, en un caso general de movimiento por inercia. Se plantea ahora obtener las condiciones para que la dirección de  $\boldsymbol{\Omega}$  pueda permanecer constante. Se denomina *eje permanente de rotación* de un sólido aquél que, para un movimiento por inercia con velocidad de rotación inicial alrededor de dicho eje, se mantenga invariante la dirección de rotación.

Sea el eje  $(O, \mathbf{e})$ , y una velocidad de rotación inicial  $\boldsymbol{\Omega}_0 = \Omega_0 \mathbf{e}$ . Suponemos que la dirección de  $\boldsymbol{\Omega}$  permanece según la misma dirección  $\mathbf{e}$  a lo largo del movimiento. En primer lugar, observemos que puesto que la energía  $T$  es constante,

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \frac{\Omega^2}{2} I_e = \text{cte},$$

siendo  $I_e = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e})$ , momento de inercia respecto al eje  $(O, \mathbf{e})$ . Al ser éste constante se deduce que el módulo de  $\boldsymbol{\Omega}$  tampoco varía:  $\Omega = \Omega_0$ .

Por otra parte, de la ecuación de Euler (7.66), al ser  $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{0}$ ,

$$\mathbf{0} = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_O = \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}).$$

Se deduce por tanto que  $\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}$  ha de ser paralelo a  $\boldsymbol{\Omega}$ , es decir la dirección  $\mathbf{e}$  debe ser principal de inercia en  $O$ . Por tanto, un eje permanente de rotación será *necesariamente un eje principal de inercia del sólido*.

Esta condición, que es necesaria, no basta sin embargo para garantizar la *estabilidad* del eje permanente de rotación. Para analizar este aspecto, elegiremos unos ejes del cuerpo de forma que  $\mathbf{k}$  corresponda con la dirección principal que se desea estudiar, según la cual se imprime una velocidad de rotación  $\boldsymbol{\Omega}$ . Supongamos que se producen unas inevitables perturbaciones pequeñas en las otras dos direcciones perpendiculares, con lo que la velocidad angular es:

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv (\epsilon_p, \epsilon_q, r) \quad \text{siendo } \epsilon_p, \epsilon_q \ll r$$

La estabilidad de  $\Omega$  como dirección permanente de rotación equivale a garantizar que las perturbaciones introducidas  $(\epsilon_p, \epsilon_q)$  se mantengan pequeñas (acotadas) a lo largo del movimiento. Si por el contrario estas perturbaciones crecen sin estar acotadas, el movimiento de rotación alrededor de dicho eje será inestable.

Analicemos por tanto la evolución de  $(\epsilon_p, \epsilon_q)$ . Desarrollando para este caso las ecuaciones de Euler (7.67) con  $M_O = \mathbf{0}$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= A\dot{\epsilon}_p - (B - C)\epsilon_q r \\ 0 &= B\dot{\epsilon}_q - (C - A)r\epsilon_p \\ 0 &= C\dot{r} - (A - B)\epsilon_p\epsilon_q \simeq C\dot{r} \end{aligned} \quad (8.14)$$

De la ecuación (8.14<sub>3</sub>), despreciando infinitésimos de orden superior, se deduce que  $r = \text{cte}$ . Derivando (8.14<sub>1</sub>),

$$0 = A\ddot{\epsilon}_p - (B - C)\dot{\epsilon}_q r;$$

despejando de (8.14<sub>2</sub>) ( $\dot{\epsilon}_q = (C - A)r\epsilon_p/B$ ) y eliminando en la ecuación anterior se obtiene finalmente:

$$A\ddot{\epsilon}_p + \frac{(C - B)(C - A)}{B} r^2 \epsilon_p = 0.$$

Se trata de una ecuación diferencial de segundo grado en función exclusivamente de  $\epsilon_p$ . Es una ecuación similar a la del oscilador armónico simple (apartado 4.1),

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

Como se vió esta ecuación tiene solución armónica (acotada) para  $x$  si  $k > 0$ , mientras que tendrá una solución exponencial (monótona creciente, no acotada) si  $k < 0$ . Así, la condición de estabilidad para que  $\epsilon_p$  se mantenga pequeña es:

$$(C - B)(C - A) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{bien} & C > B \text{ y } C > A, \\ \text{ó bien} & C < B \text{ y } C < A. \end{cases}$$

Por lo tanto para que el eje principal sea estable como eje permanente ha de corresponder bien al máximo, bien al mínimo, de los momentos principales de inercia. En el caso en que corresponda al intermedio, no podrá ser eje permanente, siendo en este caso el movimiento inestable.

La propiedad anterior se puede confirmar experimentalmente con numerosos objetos de uso cotidiano, arrojándolos al aire con una velocidad de rotación inicial, en caída libre. Es fácil verificar que sometido únicamente a su propio

peso, para un objeto en caída libre el momento en el centro de masa  $G$  es nulo<sup>5</sup>, por lo que experimenta un movimiento por inercia alrededor de  $G$ .

Podemos realizar el experimento con una caja rectangular de cartón fácil de encontrar en cualquier domicilio u oficina. Admitiendo que la caja es sensiblemente plana, como se muestra en la figura 8.7, dos momentos principales de inercia corresponden a los dos ejes de simetría dentro del plano  $A$  y  $B$ . La planitud de la caja permite deducir que para la tercera dirección principal, normal al plano, el momento de inercia será suma de los otros dos ( $C = A + B$ ) y por tanto el máximo. Por otra parte, el momento del eje paralelo al lado menor del rectángulo ( $B$  en la figura) será mayor que el otro ( $A$ ), por lo que  $B$  será el intermedio y  $A$  el mínimo. Si se lanza la caja al aire girando alrededor de los ejes  $C$  o  $A$ , permanecerá en rotación estable, mientras que la rotación alrededor del eje  $B$  es inestable.

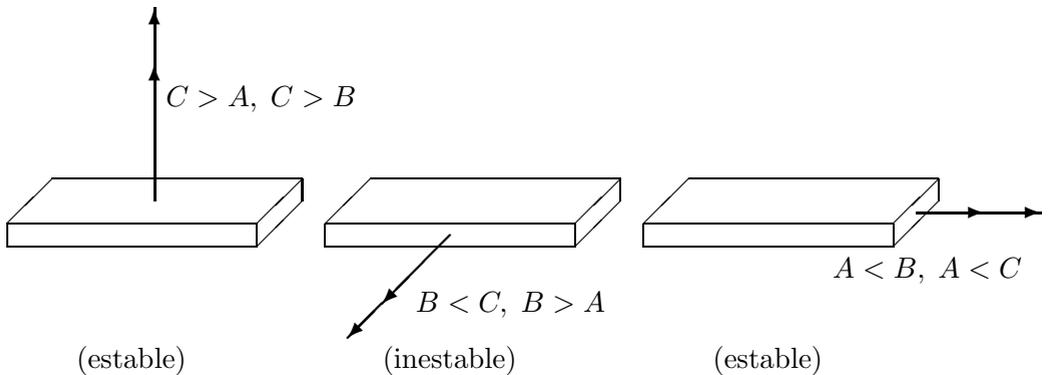


Figura 8.7: Los ejes de momento de inercia máximo ( $C$ ) y mínimo ( $A$ ) permiten movimientos de rotación permanente estables, mientras que el intermedio ( $B$ ) es inestable.

Análogamente podríamos probar con una raqueta de tenis o de ping-pong. En este caso el momento de inercia mínimo corresponde al eje del mango, y el máximo al eje perpendicular al plano de la raqueta<sup>6</sup>.

<sup>5</sup>En efecto, para un cuerpo  $\mathcal{B}$  de masa  $M$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_G &= \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_G) \wedge (-g\mathbf{k}) \rho dV = - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge g\mathbf{k} \rho dV + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}_G \wedge g\mathbf{k} \rho dV \\ &= -M\mathbf{r}_G \wedge g\mathbf{k} + \mathbf{r}_G \wedge Mg\mathbf{k} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Como receta, es válido suponer que un campo de fuerzas uniforme y paralelo como el gravitatorio simplificado produce en el sólido el mismo efecto que su resultante ( $-Mg\mathbf{k}$ ) “aplicada” en el CDM ( $G$ ).

<sup>6</sup>Algún autor denomina este resultado como el *teorema de la raqueta de tenis* (E. Neal

### 8.2.3. Ecuaciones del movimiento

Veremos a continuación las ecuaciones concretas que gobiernan la evolución de los ángulos de Euler y las velocidades angulares para el movimiento de Poincot descrito geoméricamente en el apartado 8.2.1. Plantearemos primero el caso general y a continuación el caso particular en que dos momentos principales sean iguales (sólido de revolución), en que la solución se simplifica considerablemente y se puede integrar directamente.

**Caso general.**— Las componentes de la velocidad de rotación en el triedro del cuerpo son  $\boldsymbol{\Omega} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}$ , cuya expresión en función de los ángulos de Euler es (6.54):

$$p = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi \quad (8.15)$$

$$q = -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi \quad (8.16)$$

$$r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta. \quad (8.17)$$

La expresión del momento cinético es, a partir de (8.5) y (6.53)

$$\mathbf{H}_O = H\mathbf{K} = H(\sin \theta \sin \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \cos \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}). \quad (8.18)$$

Es posible obtener otra expresión del momento cinético en el triedro del cuerpo aplicando directamente (7.31). Supondremos para ello, sin pérdida de generalidad, que los ejes son los principales de inercia, con momentos de inercia  $(A, B, C)$ :

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} = A p \mathbf{i} + B q \mathbf{j} + C r \mathbf{k}. \quad (8.19)$$

Igualando componentes entre (8.18) y (8.19),

$$p = \frac{H}{A} \sin \theta \sin \varphi; \quad (8.20)$$

$$q = \frac{H}{B} \sin \theta \cos \varphi; \quad (8.21)$$

$$r = \frac{H}{C} \cos \theta. \quad (8.22)$$

De (8.22) se puede despejar

$$\cos \theta = \frac{Cr}{H}; \quad (8.23)$$

y del cociente término a término entre las ecuaciones (8.20) y (8.21)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Ap}{Bq}. \quad (8.24)$$

Sumando la ecuación (8.15) multiplicada por  $\sin \varphi$  a la (8.16) multiplicada por  $\cos \varphi$ , se puede despejar  $\dot{\psi}$ :

$$\dot{\psi} = \frac{p \sin \varphi + q \cos \varphi}{\sin \theta};$$

eliminando de (8.20)  $\sin \varphi = \frac{pA}{H \sin \theta}$  y de (8.21)  $\cos \varphi = \frac{qB}{H \sin \theta}$ , obtenemos:

$$\dot{\psi} = \frac{Ap^2 + Bq^2}{H \sin^2 \theta},$$

y por último, eliminando  $\sin^2 \theta$  en virtud de (8.23),

$$\dot{\psi} = \frac{Ap^2 + Bq^2}{H \left(1 - \frac{C^2 r^2}{H^2}\right)} = H \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2 p^2 + B^2 q^2} \quad (8.25)$$

Las ecuaciones (8.23, 8.24, 8.25), junto con las tres ecuaciones de Euler,

$$0 = A\dot{p} - (B - C)qr \quad (8.26)$$

$$0 = B\dot{q} - (C - A)rp \quad (8.27)$$

$$0 = C\dot{r} - (A - B)pq \quad (8.28)$$

forma un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas:  $(\psi, \theta, \varphi, p, q, r)$ , que se puede resolver de manera autónoma.

**Sólido de revolución.**— Sea el caso particular de un sólido de revolución<sup>7</sup>. Según se sabe (apartado 7.3.5) un eje de revolución es siempre principal de inercia. Todos los ejes normales a éste son también principales y tienen igual momento de inercia. Tomaremos convencionalmente la dirección  $\mathbf{k}$  según el eje de revolución; los momentos de inercia serán  $C$  (según  $\mathbf{k}$ ) y  $A = B$  (según direcciones perpendiculares a  $\mathbf{k}$ ).

En la tercera ecuación de Euler (8.28) el segundo sumando se anula, por lo que:

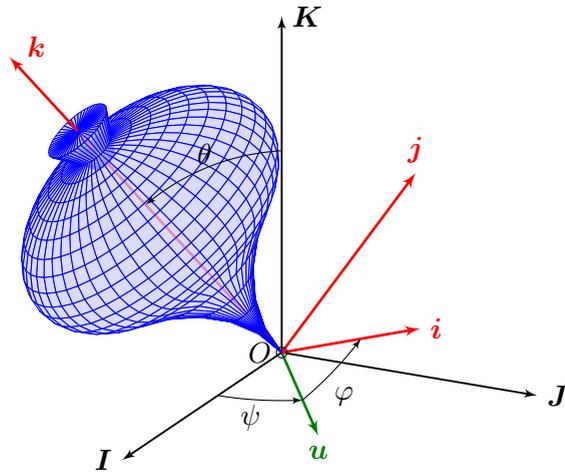
$$C\dot{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \text{cte.}$$

De la igualdad (8.23) con  $r$  constante, se deduce que la nutación es también constante:

$$\cos \theta = \frac{Cr}{H} \quad \Rightarrow \quad \theta = \text{cte.}$$

La interpretación geométrica de la nutación (figura 8.8) es el ángulo que forma el eje del cuerpo ( $\mathbf{k}$ ) con el eje invariante ( $\mathbf{K}$ ) (recuérdese que en el movimiento

Figura 8.8: Interpretación geométrica de los ángulos de Euler para el movimiento de Poinsot de un sólido con simetría de revolución.



por inercia se ha tomado convencionalmente  $\mathbf{K}$  según la dirección fija de  $\mathbf{H}_O$ ).

De la ecuación (8.25) con  $A = B$  se obtiene:

$$\dot{\psi} = H \frac{Ap^2 + Aq^2}{A^2p^2 + A^2q^2} \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{H}{A} \quad (\text{cte}).$$

Por último, a partir de este último resultado y las ecuaciones (8.17) y (8.23),

$$\dot{\varphi} = \frac{A - C}{A} r \quad (\text{cte}).$$

Por tanto, en el caso en que el sólido sea de revolución, en el movimiento por inercia el eje del cuerpo  $\mathbf{k}$  describe un cono circular alrededor de la dirección invariante (nutación  $\theta$  constante). El movimiento de precesión de dicho eje  $\mathbf{k}$  alrededor de la dirección invariante  $\mathbf{K}$  tiene velocidad  $\dot{\psi}$  constante, y adicionalmente una velocidad de rotación propia  $\dot{\varphi}$  alrededor de  $\mathbf{k}$  asimismo constante. El cono del cuerpo es de revolución, con semiángulo cónico dado por  $\alpha = \arctg\left(\frac{C}{A} \operatorname{tg} \theta\right)$ . El cono fijo es también de revolución, con semiángulo  $\beta = \theta \pm \alpha$  (dos casos posibles).

---

<sup>7</sup>No es necesario estrictamente que el sólido sea de revolución, basta con que el tensor de inercia sea cilíndrico, es decir, con dos momentos principales iguales ( $A = B$ ).

### 8.3. La peonza simétrica

#### 8.3.1. Ecuaciones del movimiento de una peonza

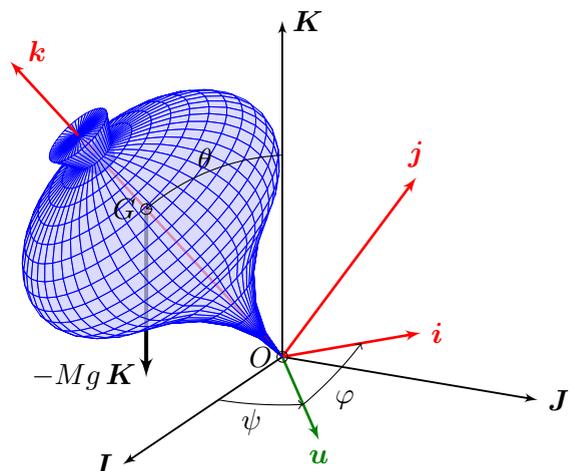
Consideramos ahora un caso algo más completo, el de un sólido simétrico<sup>8</sup>, sometido a su propio peso (en un campo gravitacional constante) y con un punto de su eje de simetría fijo. Supondremos además que tiene una velocidad de rotación propia alrededor de su eje suficientemente elevada. Este caso corresponde a la peonza de los juegos infantiles (figura 8.9), pero también sirve para explicar el comportamiento de los giróscopos empleados en la navegación inercial de naves y el control de la orientación de sofisticados instrumentos como los telescopios espaciales. Como veremos, el movimiento de la peonza introduce algunas interesantes paradojas debidas al denominado *efecto giroscópico*.

Figura 8.9: Peonza simétrica sometida a su propio peso, con rotación propia elevada alrededor de su eje.



El movimiento lo describiremos en los ejes locales del cuerpo, tomando  $\mathbf{k}$  según el eje de revolución (figura 8.10), por lo que el tensor de inercia es:

Figura 8.10: Orientación de los ejes considerados para el movimiento de una peonza simétrica sometida a su propio peso alrededor de un punto fijo  $O$  de su eje.



<sup>8</sup>con tensor de inercia cilíndrico, como es el caso de un cuerpo de revolución

$$[\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}.$$

Emplearemos el método de Lagrange para obtener las ecuaciones del movimiento. La energía cinética vale:

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} A(p^2 + q^2) + \frac{1}{2} Cr^2$$

y desarrollando la expresión en función de los ángulos de Euler (6.54):

$$T = \frac{1}{2} A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2.$$

A su vez, el potencial es

$$V = Mgd \cos \theta$$

donde se ha llamado  $d = \overline{OG}$ , distancia entre el punto fijo y el centro de masas. La Lagrangiana resulta entonces:

$$L = \frac{1}{2} A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 - Mgd \cos \theta. \quad (8.29)$$

Se observa que  $L$  no depende explícitamente de  $\psi$  ( $\partial L / \partial \psi = 0$ ) ni de  $\varphi$  ( $\partial L / \partial \varphi = 0$ ); por lo tanto ambas coordenadas son cíclicas, y podemos escribir las correspondientes integrales primeras como ecuaciones del movimiento:

$$p_\psi = A\dot{\psi} \sin^2 \theta + C\dot{\psi} \cos^2 \theta + C\dot{\varphi} \cos \theta = H \quad (\text{cte}) \quad (8.30)$$

$$p_\varphi = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) = Cr \quad (\text{cte}) \quad (8.31)$$

La integral primera (8.30) corresponde a la constancia del momento cinético según el eje vertical  $\mathbf{K}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_O \cdot \mathbf{K} &= (Ap \mathbf{i} + Aq \mathbf{j} + Cr \mathbf{k}) \cdot (\sin \theta \sin \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \cos \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}) \\ &= A\dot{\psi} \sin^2 \theta + Cr \cos \theta \\ &= A\dot{\psi} \sin^2 \theta + C\dot{\psi} \cos^2 \theta + C\dot{\varphi} \cos \theta = H. \quad \square \end{aligned}$$

Esta magnitud  $H$  se conserva puesto que el momento de las fuerzas en esta dirección fija es nulo:

$$M_Z = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{K} = [d\mathbf{k} \wedge (-Mg\mathbf{K})] \cdot \mathbf{K} = 0. \quad (8.32)$$

La segunda integral primera (8.31) expresa la constancia de  $r$ , componente de la velocidad de rotación  $\boldsymbol{\Omega}$  según el eje  $\mathbf{k}$  del cuerpo; de forma equivalente,

se puede considerar que establece la conservación del momento cinético según este eje:

$$\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{k} = (A p \mathbf{i} + A q \mathbf{j} + C r \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = C r. \quad (8.33)$$

La conservación de esta magnitud no es tan obvia como en el caso anterior, al ser  $\mathbf{k}$  una dirección móvil. Para justificarla derivamos directamente (8.33),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{k}) &= \left( \frac{d}{dt} \mathbf{H}_O \right) \cdot \mathbf{k} + \mathbf{H}_O \cdot \frac{d\mathbf{k}}{dt} \\ &= \cancel{\mathbf{M}_O \cdot \dot{\mathbf{k}}} + \mathbf{H}_O \cdot (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{k}) = \cancel{(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \dot{p} q}, \end{aligned}$$

siendo este término nulo gracias a que el sólido es de revolución ( $A = B$ ).

Al no existir fuerzas disipativas, otra integral primera es la constancia de la energía,  $T + V = E$ .

En resumen el movimiento de la peonza simétrica con un punto fijo viene determinado por las tres integrales primeras siguientes:

$$H = A \dot{\psi} \sin^2 \theta + C r \cos \theta \quad (\text{cte}) \quad (8.34)$$

$$r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \quad (\text{cte}) \quad (8.35)$$

$$E = \frac{1}{2} A (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} C r^2 + M g d \cos \theta \quad (\text{cte}) \quad (8.36)$$

A continuación estudiamos la solución de estas ecuaciones, lo que se desarrollará de manera cualitativa. En primer lugar despejamos  $\dot{\psi}$  de (8.34),

$$\dot{\psi} = \frac{H - C r \cos \theta}{A \sin^2 \theta} \quad (8.37)$$

para después eliminarla en (8.36), obteniendo así una ecuación función de  $\theta$  exclusivamente, que expresaremos en relación a la nueva constante  $E'$ :

$$E' \stackrel{\text{def}}{=} E - \frac{1}{2} C r^2 = \frac{1}{2} A \dot{\theta}^2 + \frac{(H - C r \cos \theta)^2}{2 A \sin^2 \theta} + M g d \cos \theta \quad (8.38)$$

Realizando el cambio de variable:

$$u = \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = - \frac{\dot{u}}{\sqrt{1 - u^2}}$$

se obtiene

$$E' = \frac{1}{2} A \frac{\dot{u}^2}{1 - u^2} + \frac{(H - C r u)^2}{2 A (1 - u^2)} + M g d u$$

y despejando  $\dot{u}^2$ ,

$$\dot{u}^2 = f(u) = (1 - u^2) \left( \frac{2E'}{A} - \frac{2Mgd u}{A} \right) - \frac{(H - C r u)^2}{A^2} \quad (8.39)$$

Ecuación cuya solución se obtendría directamente mediante la cuadratura:

$$t(u) = \int_{u_0}^{u_t} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(2E'/A - 2Mgdu/A) - (H - Cru)^2/A^2}} \quad (8.40)$$

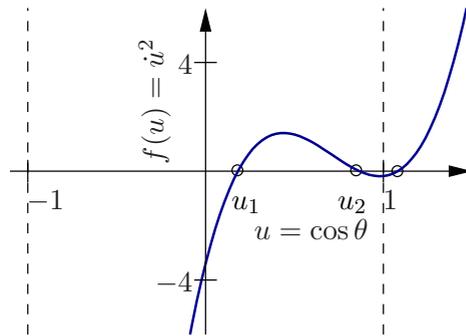
Una vez calculado  $u(t)$  y en consecuencia  $\theta(t)$ , sustituiríamos en las ecuaciones (8.34) y (8.35) para obtener  $\psi$  y  $\varphi$  respectivamente. La cuadratura planteada en (8.40) no es inmediata de manera analítica, pero se puede abordar mediante integrales elípticas, o bien por métodos numéricos.

Sin necesidad de obtener la solución explícita, podemos sin embargo estudiar de manera cualitativa el movimiento. Para ello, observemos que las raíces de la ecuación (8.39):  $f(u) = 0$ , corresponden a los puntos en que  $\dot{u} = 0$  y por tanto  $\dot{\theta} = 0$ , es decir los máximos o mínimos locales de  $\theta$ . Al ser  $f(u)$  un polinomio cúbico, podrá tener hasta tres raíces reales. Podemos acotar dos raíces de esta ecuación, observando que para los valores

$$u = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad f(u) = -\frac{(H - Cru)^2}{A^2} < 0$$

El rango de validez de  $u$  es precisamente  $-1 < u < +1$ , correspondiente a

Figura 8.11: Gráfico de la ecuación cúbica  $f(u)$  obtenida a partir de la integral primera de la energía, en función de  $u = \cos \theta$ . Las raíces  $f(u) = 0$  corresponden a los valores extremos de la nutación, existiendo dos en el rango de validez del parámetro ( $-1 < u < +1$ ). El movimiento se desarrolla con  $f(u) > 0$  y por tanto la nutación estará comprendida entre estas soluciones:  $\theta_1 = \arccos u_1$  y  $\theta_2 = \arccos u_2$ . La solución  $u_2$  corresponde en este caso al mínimo de la nutación ( $\theta_2 = \theta_{min}$ ).



$\pi > \theta > 0$ . Al ser  $f(u) = \dot{u}^2$  esencialmente positivo en el movimiento real, por motivos físicos en este rango existirá al menos una zona en que  $f(u) > 0$ . Por tanto en el intervalo  $[-1, +1]$  existirán dos raíces  $u_1$  y  $u_2$ . Así,  $\theta$  oscilará entre los dos valores correspondientes  $\theta_1 = \arccos u_1$  y  $\theta_2 = \arccos u_2$ , máximo y mínimo de la nutación,  $\theta_1 > \theta > \theta_2$  (figura 8.11).

Una forma de visualizar geoméricamente el movimiento es a través de la trayectoria descrita por extremo del versor del eje de revolución  $\mathbf{k}$ , que podrá

describir distintos tipos de curvas sobre una esfera de radio unidad, en la coordenada  $\theta$  será la *colatitud* y  $\psi$  la *longitud*. El movimiento quedará restringido a la banda entre los dos paralelos extremos:  $\theta_1 > \theta > \theta_2$  (ver figura 8.12). Los distintos comportamientos vienen definidos por el signo de la velocidad de precesión, obtenido por el numerador en la ecuación (8.37), pudiéndose distinguir tres casos en función de las condiciones iniciales del movimiento (en concreto según el valor de las constantes  $H$  y  $r$ ):

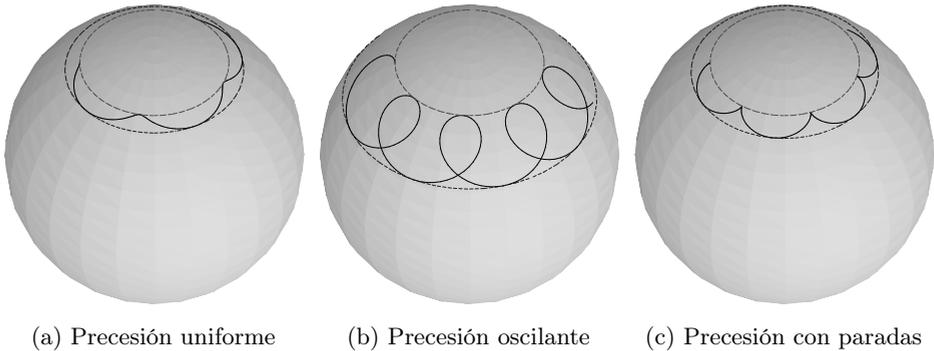


Figura 8.12: *Los tres tipos de soluciones para el movimiento de la peonza simétrica, obtenidos mediante integración numérica en el ordenador de las ecuaciones del movimiento. La figura representa, sobre una superficie esférica, la trayectoria del extremo del eje de revolución de la peonza. En el caso (a) la velocidad de precesión lleva sentido uniforme; en el caso (b) alterna de signo, describiendo bucles; en el caso límite (c), para los puntos con nutación mínima se anula  $\dot{\psi}$ , correspondiendo a cúspides en la trayectoria.*

1.  $H - Cr \cos \theta_2 > 0$  y  $H - Cr \cos \theta_1 > 0$ , en cuyo caso el movimiento de precesión es uniforme, siempre tiene el mismo sentido (figura 8.12a);
2.  $H - Cr \cos \theta_2 < 0$  y  $H - Cr \cos \theta_1 > 0$ , en cuyo caso la precesión alterna de signo, con un movimiento de sentido oscilante que desarrolla lazos (figura 8.12b);
3.  $H - Cr \cos \theta_2 = 0$ , en cuyo caso se producen paradas en la precesión, correspondiendo a cúspides en la trayectoria para los puntos con velocidad de precesión nula. Este caso se produce en la práctica cuando las condiciones iniciales corresponden a la peonza con rotación propia y su eje partiendo del reposo ( $\dot{\theta} = \dot{\psi} = 0$ ), a partir de una inclinación determinada (nutación  $\theta_2$ ). A continuación la peonza empieza a caer y precesionar simultáneamente (figura 8.12c).

### 8.3.2. Estabilidad de la peonza dormida

Estudiamos ahora la estabilidad del movimiento de la peonza simétrica, cuyas ecuaciones se desarrollaron en el apartado 8.3.1, en la posición vertical ( $\theta = 0$ , peonza «dormida»). El estudio de estabilidad tiene como objetivo analizar bajo qué condiciones un movimiento posible, cuando está sometido a una pequeña perturbación, se mantiene con pequeñas oscilaciones y próximo al movimiento original, en cuyo caso se denomina *estable*. En el caso contrario, cualquier perturbación pequeña respecto del movimiento producirá la pérdida del mismo, denominándose *inestable*. Este estudio de estabilidad es similar al desarrollado en el capítulo 5 (apartado 5.1.2), con la diferencia que allí las perturbaciones eran respecto a la posición de equilibrio mientras que aquí lo son a una trayectoria dinámica.

Partiremos de la ecuación de Lagrange en  $\theta$ , que se obtiene derivando la Lagrangiana (8.29):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = A\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + Cr(-\dot{\psi} \sin \theta) + Mgd \sin \theta,$$

resultando

$$A\ddot{\theta} - A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + Cr\dot{\psi} \sin \theta - Mgd \sin \theta = 0. \quad (8.41)$$

Esta ecuación se ve complementada por las dos integrales primeras de la peonza simétrica, expresadas anteriormente en (8.34) y (8.35):

$$H = A\dot{\psi} \sin^2 \theta + Cr \cos \theta = \text{cte.} \quad (8.42)$$

$$Cr = \text{cte.} \quad (8.43)$$

Al ser inicialmente  $\theta = 0$ , de la primera de las expresiones anteriores (8.42) se deduce que la constante es  $H = Cr$ . Empleando este valor y despejando  $\dot{\psi}$  en (8.42),

$$\dot{\psi} = \frac{H - Cr \cos \theta}{A \sin^2 \theta} = \frac{Cr}{A} \frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta};$$

considerando una pequeña perturbación  $\delta\theta \ll 1$ , desarrollando en esta expresión denominador y numerador de forma que se desprecien términos de orden superior a 2,

$$\dot{\psi} \approx \frac{Cr}{A} \frac{\delta\theta^2/2}{\delta\theta^2} = \frac{Cr}{2A}.$$

Sustituimos ahora este valor de  $\dot{\psi}$  en (8.41), y desarrollamos despreciando de nuevo los términos de orden 2 ó superior en función de  $\delta\theta$ :

$$A\delta\ddot{\theta} - A\left(\frac{Cr}{2A}\right)^2\delta\theta + Cr\frac{Cr}{2A}\delta\theta - Mgd\delta\theta = A\delta\ddot{\theta} + \left(\frac{C^2r^2}{4A} - Mgd\right)\delta\theta = 0. \quad (8.44)$$

Observamos que esta ecuación corresponde a la de un oscilador armónico simple, siempre que el coeficiente de  $\delta\theta$  sea positivo, en cuyo caso resulta un movimiento armónico acotado para la perturbación  $\delta\theta$ . La condición de estabilidad es por tanto

$$\frac{C^2r^2}{4A} > Mgd. \quad (8.45)$$

El significado de este resultado es que para la estabilidad de la peonza en la posición vertical por encima del punto fijo se debe mantener una velocidad de rotación  $r$  alrededor del eje suficientemente elevada; cuando la energía se haya disipado por rozamiento u otras causas y la velocidad sea menor a este valor la peonza comenzará a desarrollar un movimiento de nutación cada vez más amplio.

Se deja como ejercicio para el lector comprobar que en la posición inversa, con el eje de la peonza vertical pero colgando por debajo del punto fijo ( $\theta = \pi$ ) el movimiento resulta estable en cualquier caso, como parecería esperable. Para ello basta estudiar las perturbaciones  $\theta = \pi + \delta\theta$  haciendo los desarrollos en serie alrededor de  $\theta = \pi$ .

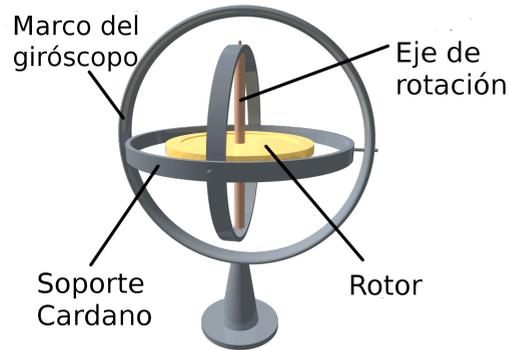
## 8.4. Efecto giroscópico

El giróscopo es un cuerpo con simetría de masas de revolución girando con velocidad de rotación elevada respecto de dicho eje. Sometido a un momento de fuerzas transversal al eje el giróscopo modifica mucho menos su orientación que un sólido ordinario y además en una dirección inesperada, perpendicularmente a las fuerzas aplicadas del par. En estas condiciones se produce el llamado «efecto giroscópico» que se describe abajo.

Si el momento externo se minimiza mediante el montaje del giróscopo en soportes de Cardano (figura 8.13), la orientación del eje se mantiene prácticamente invariable y el giróscopo resulta un instrumento eficaz para señalar una orientación fija en el espacio, lo que constituye la base de los sistemas de navegación y control de orientación inerciales. Estos resultan más precisos que las brújulas magnéticas o incluso imprescindibles cuando se está alejado del campo magnético o gravitatorio terrestre como en las naves espaciales<sup>9</sup>.

<sup>9</sup><http://www2.jpl.nasa.gov/basics/bsf11-2.php>

Figura 8.13: *Giróscopo montado en soportes de Cardano.*



Existen también dispositivos denominados giróscopos basados en estructuras vibrantes, fundamentados en un principio ligeramente diferente, el de vibración de dos masas en un plano, cuya resistencia a cambiar la orientación se origina por la fuerza inercial de Coriolis. Estos dispositivos se han podido miniaturizar como MEMS<sup>10</sup> y fabricar de forma muy eficiente, permitiendo de forma fiable por ejemplo el control de orientación de los Segway PT<sup>11</sup>, de los iPhone 4<sup>12</sup> o de los controladores *Wii motion plus*<sup>13</sup> para la consola de juegos de Nintendo.

Veremos en primer lugar el efecto giroscópico aplicado a un giróscopo con un punto de su eje fijo, como es el caso de la peonza simétrica estudiada en el apartado anterior. La condición de rotación propia elevada la concretaremos admitiendo que la energía cinética de rotación alrededor de su eje sea mucho mayor que las posibles fluctuaciones de energía potencial gravitatoria. Como máximo, estas se producen al variar la altura de  $G$  entre  $[-d, +d]$ . Admitimos por tanto que

$$\frac{1}{2}Cr^2 \gg 2Mgd. \quad (8.46)$$

De esta manera, al ser la energía asociada a la rotación propia mucho mayor, cabe esperar que las oscilaciones de nutación ( $\theta$ ) debidas al potencial gravitatorio sean pequeñas, produciéndose un movimiento de precesión con pequeñas oscilaciones de nutación. En la realidad, debido al inevitable amortiguamiento, estas oscilaciones pequeñas se amortiguan, dando lugar con bastante aproximación a un movimiento con nutación prácticamente constante.

En el planteamiento de las ecuaciones de Lagrange vimos que las correspondientes a  $\psi$  y  $\varphi$  daban lugar a sendas integrales primeras (8.34) y (8.35).

<sup>10</sup>Microelectromechanical systems

<sup>11</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Segway\\_Human\\_Transporter](http://en.wikipedia.org/wiki/Segway_Human_Transporter)

<sup>12</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/IPhone\\_4](http://en.wikipedia.org/wiki/IPhone_4)

<sup>13</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Wii\\_MotionPlus](http://en.wikipedia.org/wiki/Wii_MotionPlus)

La ecuación dinámica en  $\theta$  es (8.41):

$$A\ddot{\theta} - A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + Cr\dot{\psi} \sin \theta - Mgd \sin \theta = 0.$$

Deseamos comprobar las condiciones bajo las que se puede dar un movimiento con nutación cuasi-constante. Linealizando esta ecuación suponiendo que las oscilaciones de  $\theta$  son pequeñas,  $\ddot{\theta} \approx 0$  y simplificando  $\sin \theta$ , se obtiene:

$$-A\dot{\psi}^2 \cos \theta + Cr\dot{\psi} - Mgd = 0.$$

y resolviendo para  $\dot{\psi}$ ,

$$\dot{\psi} = \frac{Cr}{2A \cos \theta} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4AMgd \cos \theta}{C^2 r^2}} \right). \quad (8.47)$$

Para que puedan existir soluciones reales el radicando debe ser positivo, es decir  $C^2 r^2 > 4AMgd \cos \theta$ . Debido a la hipótesis anteriormente realizada (8.46) podemos considerar que se garantiza esta condición. Por otra parte, considerando que la raíz en (8.47) se puede aproximar como  $\sqrt{1 - \epsilon} \approx 1 - \epsilon/2$  (teniendo en cuenta  $\epsilon \ll 1$ ) se obtienen dos soluciones posibles para  $\dot{\psi}$ :

$$\begin{cases} \dot{\psi} \approx \frac{Cr}{A \cos \theta} & \text{(precesión rápida)} \\ \dot{\psi} \approx \frac{Mgd}{Cr} & \text{(precesión lenta).} \end{cases} \quad (8.48)$$

De las dos soluciones, la que se obtiene en la mayoría de los casos prácticos es la precesión lenta. Aunque en teoría sería posible la otra solución, la energía requerida es mucho mayor, por lo que es difícil alcanzar las condiciones iniciales precisas. No entramos en consideraciones de la estabilidad de las soluciones, que también juegan en contra de la precesión rápida por lo general.

Vemos pues que, en el caso del giróscopo sujeto a una fuerza gravitatoria excéntrica respecto del punto fijo, se ocasiona un movimiento de precesión alrededor del eje vertical paralelo a la acción gravitatoria, con velocidad constante.

Para generalizar este efecto, definamos los vectores siguientes:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}_p = \dot{\psi} \mathbf{K} & \text{(velocidad de precesión)} \\ \mathbf{H}_z = (\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} = Cr \mathbf{k} & \text{(Momento cinético respecto} \\ & \text{del eje del cuerpo, orientado)} \end{cases}$$

El vector  $\mathbf{H}_z$  tiene módulo constante, siendo su ángulo con la dirección fija  $\mathbf{K}$  asimismo constante (e igual a  $\theta$ ). Su evolución es una rotación alrededor de

$\mathbf{k}$  con velocidad  $\omega_p$ . Por tanto, aplicando la fórmula de derivación de vectores móviles,

$$\frac{d\mathbf{H}_z}{dt} = \omega_p \wedge \mathbf{H}_z = \dot{\psi} Cr \operatorname{sen} \theta \mathbf{u}. \quad (8.49)$$

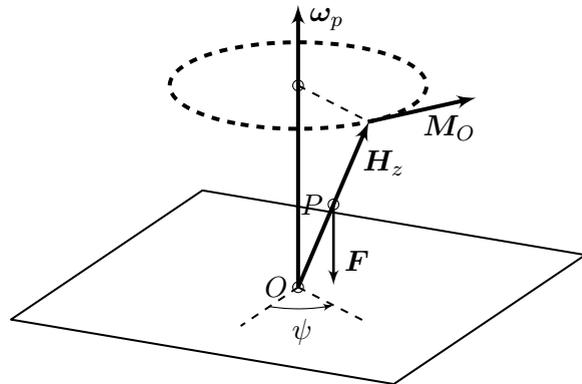
El momento de las fuerzas en  $O$  vale

$$\mathbf{M}_O = d\mathbf{k} \wedge (-Mg\mathbf{K}) = Mgd \operatorname{sen} \theta \mathbf{u}. \quad (8.50)$$

Podemos comprobar que, si se sustituye el valor obtenido en (8.48) para la precesión lenta ( $\dot{\psi} = Mgd/Cr$ ) en la ecuación (8.49) se obtiene la identidad de esta última con (8.50):

$$\mathbf{M}_O = \frac{d\mathbf{H}_z}{dt} = \omega_p \wedge \mathbf{H}_z.$$

Figura 8.14: En el movimiento giroscópico, el vector  $\mathbf{H}_z$  que define el eje del giroscopo gira alrededor del eje  $\omega_p$ , moviéndose en dirección normal a la fuerza aplicada (es decir, paralelamente al momento  $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OP} \wedge \mathbf{F}$ ).



El resultado anterior se verifica no sólo para el momento originado por el peso, sino en general para una fuerza excéntrica  $\mathbf{F}$  cualquiera. Si consideramos esta aplicada en un punto  $P$  del eje del sólido definido por  $\mathbf{r}_{OP}$ , considerando el eje  $\mathbf{K}$  de precesión en la dirección de  $\mathbf{F}$ , se verifica igualmente

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OP} \wedge \mathbf{F} = \omega_p \wedge \mathbf{H}_z$$

Conviene destacar dos características importantes del efecto giroscópico, aparentemente contradictorias con las leyes clásicas de la dinámica, al menos tal y como se formulan para partículas:

1. La acción de una fuerza  $\mathbf{F}$  sobre el sólido produce un desplazamiento del eje del cuerpo en dirección *perpendicular a  $\mathbf{F}$* , en lugar de según la dirección de  $\mathbf{F}$ . En efecto, el movimiento del eje lleva la dirección de  $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OP} \wedge \mathbf{F}$ .

2. La acción de  $\mathbf{F}$  y por consiguiente  $\mathbf{M}_O$  produce una velocidad de precesión, en lugar de una aceleración, como ocurriría en un cuerpo ordinario según la segunda ley de Newton. Si cesa la acción de  $\mathbf{M}_O$ , cesa inmediatamente la velocidad de precesión. Esto significa que los movimientos del eje son mucho más pequeños y su orientación sumamente estable.

Un giroscópo que no esté sometido a momentos —por ejemplo, si está sometido al campo gravitatorio en movimiento libre, en cuyo caso el momento respecto del centro de masas es nulo— mantiene fija la orientación de su eje con una gran exactitud. Tan sólo se produce una variación de la dirección de su eje si se aplica un momento sobre él, precesionando en este caso según la dirección del momento. Similarmente al concepto de «fuerzas de inercia» en dinámica de la partícula, que representa la resistencia a variar la velocidad de la misma, se produce aquí un «momento giroscópico» que es la resistencia a variar la orientación del eje del giroscopo.

Este fenómeno es la base de numerosas aplicaciones prácticas. Cabe citar entre ellas la brújula giroscópica. Esta consiste en un giroscopo cuyo eje puede girar libremente alrededor del centro de masas, con la única restricción de obligarle a mantenerse horizontal. En estas condiciones el eje tiende a colocarse orientado hacia el Norte geográfico, con oscilaciones pequeñas alrededor de esta orientación<sup>14</sup>. Asimismo, los giroscopos se emplean como sistemas de navegación inercial en aeronaves, misiles balísticos intercontinentales y satélites espaciales.

Por último, un fenómeno interesante basado en el efecto giroscópico es la *precesión de los equinoccios* en el movimiento de la tierra. Es sabido que su trayectoria se produce en el plano de la eclíptica, con una rotación propia alrededor del eje N-S que se halla inclinado respecto a la normal a la eclíptica unos 23,4°. Esta inclinación produce una incidencia distinta de los rayos solares en distintas fases de la órbita terrestre, siendo la responsable de los equinoccios (primavera y otoño) y los solsticios (verano e invierno). En principio, parece que el eje de la tierra se mantiene constante en dirección, por lo cual los equinoccios ocurrirían siempre en la misma época del año sidéreo. Si la tierra fuera perfectamente esférica y homogénea, esto sería así, ya que la acción gravitatoria del sol y de la luna darían un momento neto nulo respecto del centro de masas de la Tierra, con lo cual no existiría precesión de su eje. Sin embargo la tierra no es una esfera homogénea sino que está achatada, no siendo tampoco perfectamente uniforme, debido a la fuerza centrífuga de la propia rotación

<sup>14</sup>Se puede encontrar una descripción más detallada de la brújula giroscópica en: J.A. Fernández Palacios, *Mecánica teórica de los sistemas de sólidos rígidos*, Ed. el autor, 1989; J.L. Synge y B.A. Griffith, *Principles of Mechanics*, McGraw-Hill 1970; J.M. Bastero y J. Casellas, *Curso de Mecánica*, Ediciones Univ. de Navarra, 1987

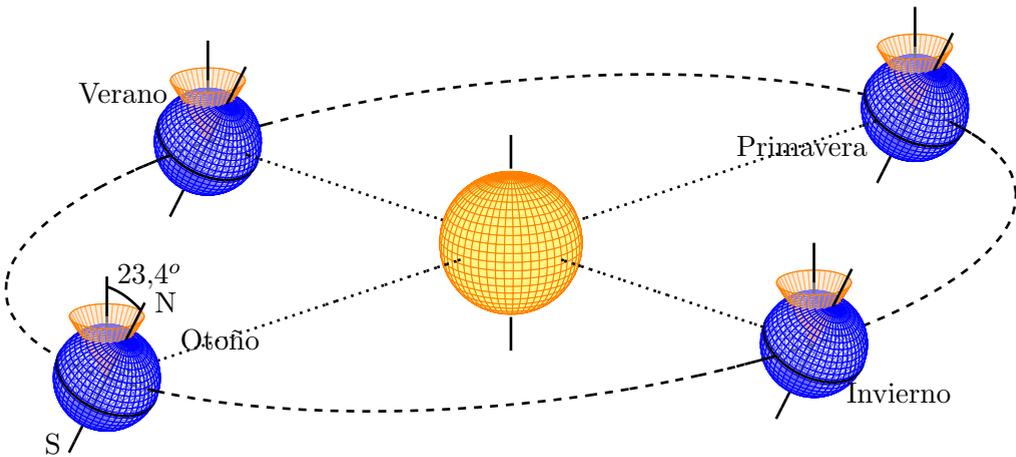


Figura 8.15: *En el movimiento de la tierra alrededor del sol, que se desarrolla sobre el plano de la eclíptica, debido a los momentos originados por la atracción excéntrica del sol y la luna, el eje N-S de rotación de la tierra precesiona muy lentamente alrededor de la perpendicular al plano, originando el fenómeno llamado «precesión de los equinoccios».*

terrestre. Así el momento neto ejercido por la luna y el sol sobre la tierra produce una precesión del eje de giro (N-S) de la tierra alrededor de la normal a la eclíptica, con un periodo aproximado de 26.000 años.

Esto quiere decir que, respecto a direcciones fijas en el firmamento, léase estrellas del zodiaco o galaxias lejanas, la posición de los equinoccios varía a lo largo del tiempo; cada 2000 años aproximadamente se produce un corrimiento de un mes. Así los signos del Zodiaco, asociados con la posición de la tierra alineada en la eclíptica bajo diversas constelaciones en el firmamento celeste que dan su nombre a cada signo, no corresponden a fechas fijas en el calendario de las estaciones. Asimismo, en cada época distintas estrellas hacen el papel de estrella Polar (situada sobre el Norte, en la prolongación del eje N-S).

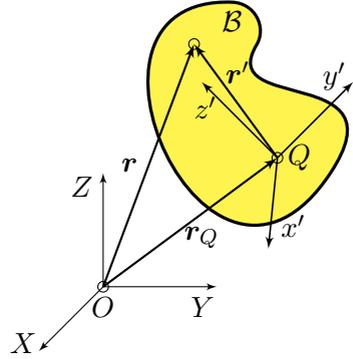
## 8.5. Dinámica del sólido en sistemas no inerciales

Por último incluiremos en este capítulo un apartado para estudiar de forma general los términos complementarios que se necesita incluir en las ecuaciones de la dinámica del sólido rígido cuando se plantean en sistemas no inerciales.

Las ecuaciones de Euler, tanto en su expresión vectorial (7.66) como en

coordenadas (7.67) están desarrolladas en un sistema inercial de referencia<sup>15</sup>. Supongamos que se quiere describir el movimiento en relación a un sistema no inercial general  $SQ \equiv (Qx'y'z')$ , siendo  $Q$  un punto material dado del sólido (figura 8.16). Para establecer las ecuaciones de la dinámica será necesario considerar el efecto de las fuerzas de inercia correspondientes.

Figura 8.16: *Ejes inerciales ( $Oxyz$ ) y no inerciales ( $Qx'y'z'$ ) para la descripción del movimiento del sólido  $\mathcal{B}$ , siendo  $Q$  un punto material dado del sólido y  $(x'y'z')$  direcciones arbitrarias.*



**Sistema ligado a un punto del sólido y orientación arbitraria.**— Se plantea en primer lugar el caso más general, en que se desea establecer las ecuaciones del movimiento relativas a un sistema de referencia de orientación arbitraria  $SQ \equiv (Qx'y'z')$ , que no coincida necesariamente con el triedro del sólido que gira con el mismo ( $Qxyz$ ). Sea  $\Omega$  la velocidad de rotación del sólido y  $\omega \neq \Omega$  la del triedro ( $Qx'y'z'$ ). Sea  $\mathbf{r}$  el vector posición genérico medido desde  $O$ ,  $\mathbf{r}'$  el vector posición medido desde  $Q$ , y  $\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_{OQ}$  (figura 8.16). La relación entre la aceleración absoluta y la relativa al sistema no inercial ( $SQ$ ) es:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \underbrace{\ddot{\mathbf{r}}_Q + \dot{\omega} \wedge \mathbf{r}' + \omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{r}')}_{\mathbf{a}_{arr}} + \underbrace{2\omega \wedge \left( \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)_{SQ}}_{\mathbf{a}_{cor}} + \underbrace{\left( \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} \right)_{SQ}}_{\mathbf{a}_{rel}} \quad (8.51)$$

El movimiento del sólido relativo a ( $SQ$ ) es una rotación instantánea de velocidad  $(\Omega - \omega)$ , por lo que:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)_{SQ} &= (\Omega - \omega) \wedge \mathbf{r}' \\ \left( \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} \right)_{SQ} &= \left( \frac{d}{dt}(\Omega - \omega) \right)_{SQ} \wedge \mathbf{r}' + (\Omega - \omega) \wedge [(\Omega - \omega) \wedge \mathbf{r}'] \end{aligned} \quad (8.52)$$

<sup>15</sup>Se recuerda que aunque las coordenadas se expresen en uno o otro triedro lo relevante a estos efectos es que las derivadas se realicen desde el punto de vista de un observador inercial

Para establecer la ecuación dinámica del movimiento relativo a  $(SQ)$  es preciso añadir al momento de las fuerzas exteriores en  $Q$ ,  $M_Q$ , el momento debido a las fuerzas (ficticias) de inercia originadas por  $\mathbf{a}_{arr}$  y  $\mathbf{a}_{cor}$ :

$$M_Q^* = M_Q - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}' \wedge (\mathbf{a}_{arr} + \mathbf{a}_{cor}) \rho dV \quad (8.53)$$

El desarrollo de esta expresión requeriría sustituir las expresiones de  $\mathbf{a}_{arr}$  a partir de (8.51) y  $\mathbf{a}_{cor}$  a partir de (8.51) y (8.52) y puede resultar algo engorroso.

**Sistema ligado a un punto del sólido, sin rotación.-** Es raro el caso en que sea necesario un planteamiento tan general como el anterior. En la práctica es más común que lo que interese sea el estudio del movimiento del sólido relativo a un punto  $Q$  del mismo, de movimiento conocido o impuesto, sin prescribir necesariamente una velocidad de rotación  $\boldsymbol{\omega}$  al triedro. En este caso, tomaremos el triedro de referencia  $(Qx'y'z') = (QXYZ)$  con origen en  $Q$  y direcciones paralelas al inercial (cumpliendo un papel similar al del “triedro fijo” para el planteamiento de las ecuaciones de Euler), y por otra parte tomaremos el triedro “del cuerpo”  $(Qxyz)$  con direcciones materiales fijas, es decir, que rote con el sólido. Será entonces  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ , y (8.51) se convierte en:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_Q + \left( \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} \right)_{SQ},$$

Por lo que el término adicional en (8.53) será únicamente el debido al arrastre de la traslación de  $Q$ :

$$- \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r}' \wedge \ddot{\mathbf{r}}_Q) \rho dV = - \underbrace{\mathbf{r}'_G}_{=\mathbf{r}_{QG}} \wedge (M \ddot{\mathbf{r}}_Q) \quad (8.54)$$

Resulta finalmente la ecuación:

$$\begin{aligned} M_Q - \mathbf{r}'_G \wedge (M \ddot{\mathbf{r}}_Q) &= \left( \frac{d\mathbf{H}_Q^{SQ}}{dt} \right)_{SQ} \\ &= \mathbf{I}_Q \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_Q \cdot \boldsymbol{\Omega}) \end{aligned} \quad (8.55)$$

Nótese que en esta expresión se ha empleado el momento cinético  $\mathbf{H}_Q^{SQ}$  con velocidades relativas al sistema  $(SQ)$ , para el que es válida la expresión  $\mathbf{H}_Q^{SQ} = \mathbf{I}_Q \cdot \boldsymbol{\Omega}$ . Sin embargo, si se empleasen velocidades “absolutas”, resultaría

$$\mathbf{H}_Q = \mathbf{I}_Q \cdot \boldsymbol{\Omega} + M \mathbf{r}_{QG} \wedge \mathbf{v}_Q.$$

Por otra parte, al igual que en el desarrollo de las ecuaciones de Euler, se ha derivado primero respecto al sistema de referencia  $(Qxyz)$ , utilizando la propiedad de constancia de  $\mathbf{I}_Q$  en relación con este sistema de referencia. El término adicional (8.54) se puede interpretar como el momento en  $Q$  de  $(-M\ddot{\mathbf{r}}_Q)$  situado en  $G$ .

**Sistema del Centro de Masas (SCM).**- En el caso en que sea  $Q \equiv G$ , será  $\mathbf{r}'_G = \mathbf{r}_{QG} = \mathbf{0}$ , por lo que las fuerzas de inercia no dan momento en  $G$ , y la ecuación (8.55) es idéntica a la de un punto fijo en un sistema inercial (7.66):

$$\mathbf{M}_G = \frac{d}{dt}\mathbf{H}_G = \mathbf{I}_G \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega})$$

Este resultado lo conocíamos ya, habiéndolo visto al tratar del principio del momento cinético.

Si consideramos el movimiento de un sólido en el campo gravitatorio simplificado, sin otras fuerzas aplicadas ni ligaduras, será entonces posible descomponerlo en:

1. Movimiento del centro de masas  $G$ , como si fuera una partícula

$$\mathbf{a}_G = -g\mathbf{k},$$

que da lugar a una trayectoria parabólica.

2. Movimiento relativo a  $G$ , con momento nulo (movimiento por inercia), ya que el peso no produce momento respecto del centro de masas:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{H}_G = \mathbf{I}_G \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{0} \quad (8.56)$$

## APÉNDICE A

---

# Resumen de álgebra vectorial y tensorial

### Índice

---

A.1. Escalares, puntos y vectores . . . . .	296
A.2. Producto escalar y vectorial . . . . .	296
A.3. Bases y coordenadas . . . . .	297
A.4. Tensores de orden dos . . . . .	298
A.5. Cambio de base . . . . .	300
A.6. Operaciones y clases especiales de tensores . . . . .	301
A.7. Cambio de coordenadas de un tensor . . . . .	302
A.8. Coeficientes de permutación . . . . .	302
A.9. Forma cuadrática asociada a un tensor . . . . .	303
A.10. Vector axial asociado a un tensor hemisimétrico . . . . .	303
A.11. Traza y determinante . . . . .	304

---

### Índice

---

A.1. Escalares, puntos y vectores . . . . .	296
A.2. Producto escalar y vectorial . . . . .	296
A.3. Bases y coordenadas . . . . .	297
A.4. Tensores de orden dos . . . . .	298
A.5. Cambio de base . . . . .	300
A.6. Operaciones y clases especiales de tensores . . . . .	301

<b>A.7. Cambio de coordenadas de un tensor</b> . . . . .	<b>302</b>
<b>A.8. Coeficientes de permutación</b> . . . . .	<b>302</b>
<b>A.9. Forma cuadrática asociada a un tensor</b> . . . . .	<b>303</b>
<b>A.10. Vector axial asociado a un tensor hemisimétrico</b> . . . . .	<b>303</b>
<b>A.11. Traza y determinante</b> . . . . .	<b>304</b>

Se resumen aquí algunos conceptos y definiciones importantes de vectores y tensores, con pretensión de sencillez y brevedad. En aras de esta sencillez, nos limitaremos al espacio Euclídeo ordinario  $\mathbb{E}^3$  y a coordenadas cartesianas.

## A.1. Escalares, puntos y vectores

En lo que sigue restringiremos nuestra atención a los números reales  $\mathbb{R}$  y el espacio geométrico ordinario  $\mathbb{E}^3$ , espacio afin de dimensión 3 y dotado de la métrica euclídea.

Los elementos  $\alpha \in \mathbb{R}$  se denominan *escalares* y pueden considerarse como *tensores de orden cero*.

Los elementos  $A \in \mathbb{E}^3$  se denominan *puntos*. El segmento orientado con origen en un punto  $A$  y final en otro  $B$  se denomina *vector*:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = B - A. \quad (\text{A.1})$$

El conjunto de los vectores, junto con las operaciones de suma de vectores mediante la regla del paralelogramo y producto por un escalar tiene la estructura de *espacio vectorial*, denominándose  $\mathcal{V}$ , espacio vectorial asociado a  $\mathbb{E}^3$ .

## A.2. Producto escalar y vectorial

El módulo de un vector es la distancia entre los puntos origen y final del mismo,  $|\mathbf{v}| = |\overrightarrow{AB}| = \text{dist}(A, B)$ . El producto escalar de dos vectores es un escalar  $\in \mathbb{R}$ , cuyo valor se define geoméricamente como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta, \quad (\text{A.2})$$

siendo  $\theta$  el ángulo formado por  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ . Cuando el producto escalar de dos vectores es nulo ( $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ) se dice que son *normales* o *perpendiculares*. El producto escalar es *conmutativo*, es decir,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (\text{A.3})$$

### A.3. Bases y coordenadas

El espacio vectorial euclídeo  $\mathcal{V}$  tiene dimensión 3, es decir que se puede establecer una base de 3 vectores linealmente independientes  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  que permite expresar un vector cualquiera  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  como combinación lineal,

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.4})$$

Los coeficientes  $(v_1, v_2, v_3)$  se denominan coordenadas de  $\mathbf{v}$  en la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Se puede escoger esta base de forma que sea *ortonormal*, es decir formada por vectores unitarios y mutuamente perpendiculares, verificándose

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}. \quad (\text{A.5})$$

(Donde los coeficientes  $\delta_{ij}$  ó *deltas de Kronecker* se definen por  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$  y  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$ ).

En lo que sigue, salvo indicación expresa en contra, supondremos siempre bases ortonormales<sup>1</sup>. Se denomina *sistema de referencia cartesiano* al conjunto  $\{O; \mathbf{e}_i\}$  formado por un punto  $O \in \mathbb{E}^3$  y una base  $\{\mathbf{e}_i\}$  para el espacio vectorial asociado  $\mathcal{V}$ . De esta forma, las coordenadas cartesianas de un punto  $X \in \mathbb{E}^3$  se definen como las coordenadas del vector  $\mathbf{x} = \overrightarrow{OX} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$ .

En función de sus coordenadas en una base ortonormal, el producto escalar de dos vectores puede expresarse como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 u_i v_i = u_i v_i. \quad (\text{A.6})$$

En esta fórmula y en lo que sigue, con objeto de simplificar la notación, siempre que en un monomio haya un índice repetido dos veces se entenderá que la expresión se suma sobre el rango del índice, salvo que se indique expresamente lo contrario.

Mediante el producto escalar se puede asociar a un vector cualquiera  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  una aplicación lineal  $\mathbf{v}^\flat : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ , de forma que le haga corresponder su producto escalar por  $\mathbf{v}$ :

$$\mathcal{V} \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.7})$$

Esta propiedad permite identificar los vectores como *tensores de orden uno*.

<sup>1</sup>Esta restricción da lugar a los denominados *tensores cartesianos*.

## A.4. Tensores de orden dos

Se denomina *tensor de orden dos* sobre un espacio vectorial  $\mathcal{V}$  a una aplicación lineal  $\mathbf{T} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ , de forma que

$$\mathcal{V} \ni \mathbf{v} \mapsto \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (\text{A.8})$$

La linealidad se traduce en las propiedades siguientes

1.  $\mathbf{T} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$
2.  $\mathbf{T} \cdot (\alpha \mathbf{u}) = \alpha (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{u} \in \mathcal{V}$

El conjunto de tensores de orden dos sobre  $\mathcal{V}$  se denota por  $\mathcal{V}^2$ . Se define el *tensor nulo*  $\mathbf{O} \in \mathcal{V}^2$  por  $\mathbf{O} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ , y el *tensor identidad o unidad*  $\mathbf{1} \in \mathcal{V}^2$  por  $\mathbf{1} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ .

Además, en  $\mathcal{V}^2$  se definen las propiedades y operaciones siguientes.

1. *Igualdad.* Dos tensores  $\mathbf{S}, \mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$  son iguales si y sólo si

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (\text{A.9})$$

2. *Suma.* Dados  $\mathbf{S}, \mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$  la suma  $\mathbf{S} + \mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$  se define por

$$(\mathbf{S} + \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (\text{A.10})$$

3. *Producto por un escalar.* Dado  $\mathbf{S} \in \mathcal{V}^2$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$  se define el producto  $\alpha \mathbf{S} \in \mathcal{V}^2$  por

$$(\alpha \mathbf{S}) \cdot \mathbf{v} = \alpha (\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (\text{A.11})$$

4. *Producto o composición de tensores.* Dados  $\mathbf{S}, \mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$  se define el producto  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$  por

$$(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{S} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (\text{A.12})$$

Con estas definiciones, es fácil comprobar que la suma de tensores es conmutativa y asociativa, así como el producto por un escalar. Asimismo, el producto por un escalar y el producto de tensores son distributivos respecto de la suma.

Se definen las *componentes de un tensor*  $\mathbf{S}$  en una base cualquiera  $\{\mathbf{e}_i\}$  como los coeficientes escalares

$$S_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_j) \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (\text{A.13})$$

Por tanto, la expresión en componentes de la aplicación de un tensor sobre un vector es

$$\mathbf{v} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad v_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{S} \cdot u_j \mathbf{e}_j) = S_{ij} u_j. \quad (\text{A.14})$$

Las componentes de un tensor se pueden escribir en forma de matriz,

$$[\mathbf{S}] = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.15})$$

indicando el primer índice fila y el segundo columna de la matriz. Nótese que para diferenciar la matriz de componentes del tensor respecto del tensor mismo se emplea la notación  $[\mathbf{S}]$  en lugar de  $\mathbf{S}$ . La definición de un tensor es intrínseca, independiente de la base, mientras que sus componentes son distintas según la base elegida.

Análogamente, escribiremos las componentes de un vector  $\mathbf{v}$  en una base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  mediante una matriz columna  $\{\mathbf{v}\}$  (el empleo de llaves indicará la estructura de matriz columna). La traspuesta de ésta será una matriz fila, que denotaremos por  $\|\mathbf{v}\| = \{\mathbf{v}\}^T$  (el empleo de doble barra vertical indicará la estructura de matriz fila):

$$\{\mathbf{v}\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}; \quad \|\mathbf{v}\| = \{\mathbf{v}\}^T = (v_1 \quad v_2 \quad v_3). \quad (\text{A.16})$$

De esta forma, en una base dada, el producto de tensores se traduce en el correspondiente producto de matrices,

$$\mathbf{U} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{T} \quad \Rightarrow \quad U_{ij} = S_{ik} T_{kj} \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{U}] = [\mathbf{S}][\mathbf{T}]. \quad (\text{A.17})$$

Por otra parte, el desarrollo de un vector en función de los vectores de la base puede expresarse mediante la matriz formada por estos últimos,

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \{\mathbf{e}_i\}^T \{\mathbf{v}\}. \quad (\text{A.18})$$

El *producto tensorial* (también llamado diádico) de dos vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  se define como un tensor de orden dos, de acuerdo a

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (\text{A.19})$$

La expresión en componentes es

$$\mathbf{u} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad u_i = a_i b_j v_j. \quad (\text{A.20})$$

Las componentes del tensor  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  son

$$[\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}]_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot ((\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_j)) = a_i b_j, \quad (\text{A.21})$$

lo que en expresión matricial es

$$[\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}] = \{\mathbf{a}\}\{\mathbf{b}\}^T. \quad (\text{A.22})$$

Mediante el producto tensorial de los vectores de la base, se puede escribir el desarrollo de un tensor en función de sus componentes,

$$\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (\text{A.23})$$

## A.5. Cambio de base

Establezcamos un cambio de base, desde  $\{\mathbf{e}_i\}$  a una nueva base  $\{\mathbf{e}'_i\}$ , ambas ortonormales. El cambio se puede caracterizar mediante un tensor  $\mathbf{A}$  que transforma los vectores de la antigua base en los de la nueva:

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.24})$$

Desarrollando las componentes de los nuevos vectores  $\mathbf{e}'_i$  en la base  $\mathbf{e}_i$ ,

$$\mathbf{e}'_i = (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_i) \mathbf{e}_j = (\mathbf{e}_j \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i)) \mathbf{e}_j = A_{ji} \mathbf{e}_j. \quad (\text{A.25})$$

Empleando la matriz de coordenadas  $[\mathbf{A}] = [A_{ij}]$  en la base  $\{\mathbf{e}_i\}$ , esta relación puede formularse matricialmente como

$$(\mathbf{e}'_1 \quad \mathbf{e}'_2 \quad \mathbf{e}'_3) = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3) [\mathbf{A}] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{Bmatrix} = [\mathbf{A}]^T \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.26})$$

Las componentes de  $[\mathbf{A}]$  tienen el significado siguiente:

$$A_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j. \quad (\text{A.27})$$

Asimismo, puede obtenerse una expresión directa del tensor de cambio mediante:

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}'_k \otimes \mathbf{e}_k. \quad (\text{A.28})$$

Veamos ahora la propiedad de *ortogonalidad* de la matriz de cambio. Para ello, comenzamos por expresar los vectores de la base antigua ( $\mathbf{e}_j$ ) en la nueva base,

$$\mathbf{e}_j = (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_i) \mathbf{e}'_i = A_{ji} \mathbf{e}'_i. \quad (\text{A.29})$$

Si sustituimos esta expresión en (A.25) resulta

$$\mathbf{e}'_i = A_{ji} A_{jk} \mathbf{e}'_k \quad (\text{A.30})$$

(habiendo sustituido el índice mudo  $i$  de (A.29) por  $k$ ). De esta forma se deduce inmediatamente la condición que deben cumplir las componentes del tensor de cambio de base,

$$\delta_{ik} = A_{ji} A_{jk} \Leftrightarrow [\mathbf{A}]^T [\mathbf{A}] = [\mathbf{1}]. \quad (\text{A.31})$$

Esta propiedad, obtenida basándose en la ortonormalidad de ambas bases, caracteriza la matriz de cambio de base como *matriz ortogonal*:

$$[\mathbf{A}]^T = [\mathbf{A}]^{-1}. \quad (\text{A.32})$$

Veamos ahora la transformación de coordenadas de un vector, al cambiar a la nueva base:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_i \mathbf{e}_i \\ &= v'_j \mathbf{e}'_j = v'_j A_{ij} \mathbf{e}_i; \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

luego

$$v_i = A_{ij} v'_j \Rightarrow \{\mathbf{v}\} = [\mathbf{A}] \{\mathbf{v}'\} \quad (\text{A.34})$$

$$v'_j = A_{ij} v_i \Rightarrow \{\mathbf{v}'\} = [\mathbf{A}]^T \{\mathbf{v}\} \quad (\text{A.35})$$

## A.6. Operaciones y clases especiales de tensores

Dado un tensor  $\mathbf{S}$  definimos su *traspuesto*,  $\mathbf{S}^T$ , como otro tensor que verifica

$$(\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (\text{A.36})$$

Decimos que un tensor  $\mathbf{S}$  es *simétrico* si  $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}$ , mientras que será *hemisimétrico* si  $\mathbf{S}^T = -\mathbf{S}$ .

Un tensor  $\mathbf{S}$  admite *inverso* si existe otro tensor  $\mathbf{S}^{-1}$  tal que

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{1}. \quad (\text{A.37})$$

Decimos que un tensor  $\mathbf{Q}$  es *ortogonal* si  $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$ , es decir,

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{1}. \quad (\text{A.38})$$

El tensor  $\mathbf{A}$  que define un cambio entre bases ortonormales, teniendo en cuenta (A.31), es un tensor ortogonal:

$$[\mathbf{A}]^T[\mathbf{A}] = [\mathbf{1}] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1}. \quad (\text{A.39})$$

Un tensor ortogonal  $\mathbf{A}$  se denomina *rotación* si en el cambio de base asociado a partir de un triedro a derechas (es decir, que verifica  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ ) se obtiene otro triedro a derechas. Más abajo (apartado A.11) veremos que una condición equivalente es que su determinante debe valer +1.

## A.7. Cambio de coordenadas de un tensor

Sea un cambio de base definido por las expresiones tensoriales  $\mathbf{e}'_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i$  ( $i = 1, \dots, 3$ ), o de forma equivalente, por las expresiones algebraicas  $\mathbf{e}'_i = A_{ji}\mathbf{e}_j$ . Un tensor  $\mathbf{T}$  define una aplicación lineal en  $\mathcal{V}$ ,

$$\mathbf{v} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}, \quad (\text{A.40})$$

que expresada en unas u otras coordenadas resulta en las siguientes expresiones matriciales:

$$\{\mathbf{v}\} = [\mathbf{T}]\{\mathbf{u}\}, \quad \{\mathbf{v}\}' = [\mathbf{T}']\{\mathbf{u}\}'. \quad (\text{A.41})$$

Teniendo en cuenta las relaciones de cambio de coordenadas para los vectores, (A.34, A.35):

$$\{\mathbf{v}\}' = [\mathbf{A}]^T\{\mathbf{v}\} = [\mathbf{A}]^T[\mathbf{T}]\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{A}]^T[\mathbf{T}][\mathbf{A}]\{\mathbf{u}\}'; \quad (\text{A.42})$$

por lo que

$$[\mathbf{T}]' = [\mathbf{A}]^T[\mathbf{T}][\mathbf{A}] \quad \Leftrightarrow \quad T'_{ij} = T_{kl}A_{ki}A_{lj}. \quad (\text{A.43})$$

## A.8. Coeficientes de permutación

Se definen a partir de los vectores de una base ortonormal ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ) mediante la expresión general siguiente:

$$\epsilon_{ijk} = (\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k. \quad (\text{A.44})$$

Desarrollando la expresión, comprobamos que su valor es +1, -1 ó 0 según el caso:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si la permutación } (i, j, k) \text{ es par:} \\ & (1, 2, 3), (2, 3, 1) \text{ ó } (3, 1, 2); \\ -1 & \text{si la permutación } (i, j, k) \text{ es impar:} \\ & (1, 3, 2), (2, 1, 3) \text{ ó } (3, 2, 1); \\ 0 & \text{si en } (i, j, k) \text{ algún índice está repetido.} \end{cases} \quad (\text{A.45})$$

Se comprueba fácilmente la propiedad de hemisimetría para los coeficientes,

$$\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ijk}; \quad \epsilon_{ikj} = -\epsilon_{ijk}. \quad (\text{A.46})$$

A partir de (A.44) se deduce inmediatamente que  $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k$ , por lo que el producto vectorial de dos vectores cualesquiera será

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \epsilon_{ijk} u_i v_j \mathbf{e}_k. \quad (\text{A.47})$$

Análogamente, el producto mixto de tres vectores vale

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k. \quad (\text{A.48})$$

Los coeficientes hemisimétricos  $\epsilon_{ijk}$  corresponden a las coordenadas de un *tensor de orden tres*, aunque no entraremos en más detalles sobre este aspecto.

## A.9. Forma cuadrática asociada a un tensor

Un tensor de orden 2 cualquiera  $\mathbf{T}$  define una forma cuadrática asociada,  $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ , de forma que

$$\mathcal{V} \times \mathcal{V} \ni (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.49})$$

Esta forma cuadrática es bilineal, es decir, lineal en cada uno de sus dos argumentos. Decimos que el tensor  $\mathbf{T}$  es *definido positivo* si la forma cuadrática asociada lo es, es decir,

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) > 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}. \quad (\text{A.50})$$

Análogamente, cabría definir los conceptos de tensor *definido negativo*, *semi-definido negativo*, *semidefinido positivo* e *indefinido*.

## A.10. Vector axial asociado a un tensor hemisimétrico

La forma cuadrática asociada a un tensor hemisimétrico es igualmente *hemisimétrica*:

$$\text{si } \mathbf{T} = -\mathbf{T}^T, \quad \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) = -\mathbf{v} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (\text{A.51})$$

Particularizando esta propiedad para los vectores de la base ( $\mathbf{u} = \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_j$ ), deducimos que la matriz de coordenadas es también hemisimétrica:

$$T_{ij} = -T_{ji} \quad \forall i, j = 1, 2, 3. \quad (\text{A.52})$$

Una propiedad importante de un tensor hemisimétrico es que existe siempre un *vector axial asociado*, que lo hace equivalente a un producto vectorial:

$$\mathbf{W} \in \mathcal{V}^2, \mathbf{W} = -\mathbf{W}^T \Rightarrow \exists \mathbf{w} \in \mathcal{V}, \mathbf{W} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}. \quad (\text{A.53})$$

Desarrollando las componentes de esta expresión,

$$W_{ki}x_i \mathbf{e}_k = \epsilon_{ijk} w_i x_j \mathbf{e}_k, \quad (\text{A.54})$$

e igualando éstas,

$$\underbrace{\epsilon_{ijk} w_i x_j}_{=\epsilon_{jik} w_j x_i} = W_{ki} x_j, \quad (\text{A.55})$$

por lo que

$$W_{ij} = w_k \epsilon_{kji}. \quad (\text{A.56})$$

Asimismo, se puede invertir esta relación para obtener

$$w_i = \frac{1}{2} \epsilon_{jik} W_{jk}. \quad (\text{A.57})$$

El tensor hemisimétrico asociado a un vector  $\mathbf{w}$  lo denominaremos también  $\hat{\mathbf{w}}$ , ó  $\mathbf{w} \wedge$ . La equivalencia es por tanto

$$\mathbf{W} = \mathbf{w} \wedge = \hat{\mathbf{w}} \quad (\text{A.58})$$

$\Downarrow$

$$\{\mathbf{w}\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix}, \quad [\mathbf{W}] = [\hat{\mathbf{w}}] = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.59})$$

## A.11. Traza y determinante

La *traza* es una operación tensorial lineal que asocia a un tensor de orden dos un escalar. Aplicada al producto tensorial de dos vectores, cumple

$$\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}. \quad (\text{A.60})$$

Por tanto, para los vectores de la base —ortonormal—,

$$\text{tr}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}, \quad (\text{A.61})$$

y aplicando esta expresión en el desarrollo de un tensor  $\mathbf{T}$ ,

$$\text{tr } \mathbf{T} = \text{tr}(T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = T_{ij} \delta_{ij} = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}. \quad (\text{A.62})$$

Conviene recalcar que, al tratarse de una operación tensorial intrínseca, el resultado es independiente del sistema de coordenadas en el que se calcule. Por este motivo se dice que la traza es un *invariante* del tensor.

El *determinante* de un tensor es un escalar cuyo valor coincide con el determinante de la matriz de componentes asociada en una base dada.

$$\det \mathbf{T} = \det[\mathbf{T}]. \quad (\text{A.63})$$

En función de los coeficientes de permutación puede expresarse como

$$\det \mathbf{T} = \epsilon_{ijk} T_{i1} T_{j2} T_{k3} = \epsilon_{ijk} T_{1i} T_{2j} T_{k3}. \quad (\text{A.64})$$

Se trata igualmente de una operación tensorial intrínseca, por lo que el resultado es el mismo independientemente de la base empleada para calcular las coordenadas. Es por tanto otro *invariante* del tensor.

El determinante tiene las propiedades siguientes.

1. Un tensor cuyo determinante es no nulo posee siempre inverso:

$$\det \mathbf{T} \neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \exists \mathbf{T}^{-1} \mid \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{1}. \quad (\text{A.65})$$

2. El determinante de un producto de tensores es el producto de los determinantes,

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) \quad (\text{A.66})$$

3. El determinante del tensor identidad vale 1, y el del inverso de un tensor es el inverso del determinante,

$$\det \mathbf{1} = 1, \quad \det \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{T}}. \quad (\text{A.67})$$

4. El determinante del traspuesto de un tensor es igual al determinante del tensor original,

$$\det(\mathbf{T}^T) = \det(\mathbf{T}) \quad (\text{A.68})$$

5. El determinante de un tensor ortogonal vale  $\pm 1$ ,

$$1 = \det(\mathbf{1}) = \det(\mathbf{R}^T \mathbf{R}) = (\det \mathbf{R})^2 \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{R} = \pm 1. \quad (\text{A.69})$$

Se dice que un tensor ortogonal corresponde a una *rotación propia* (ver apartado A.6) cuando su determinante vale +1. En este caso puede comprobarse que un triedro a derechas es transformado siempre en otro triedro a derechas.



## APÉNDICE B

---

# Expresiones de velocidad y aceleración en distintas coordenadas

### Índice

---

<b>B.1. Coordenadas cartesianas.</b> . . . . .	<b>308</b>
<b>B.2. Coordenadas cilíndricas y polares.</b> . . . . .	<b>308</b>
<b>B.3. Coordenadas esféricas.</b> . . . . .	<b>310</b>
<b>B.4. Triedro intrínseco</b> . . . . .	<b>311</b>

---

### Índice

---

<b>B.1. Coordenadas cartesianas.</b> . . . . .	<b>308</b>
<b>B.2. Coordenadas cilíndricas y polares.</b> . . . . .	<b>308</b>
<b>B.3. Coordenadas esféricas.</b> . . . . .	<b>310</b>
<b>B.4. Triedro intrínseco</b> . . . . .	<b>311</b>

---

La aplicación de las ecuaciones de la dinámica requiere expresar las componentes de la velocidad y aceleración según un determinado sistema de coordenadas. Las coordenadas cartesianas ortonormales es la elección obvia y más simple pero no siempre son las más adecuadas; esto dependerá de la geometría del problema concreto. En ocasiones es ventajoso emplear otras coordenadas, como las coordenadas cilíndricas (o polares en el caso plano), esféricas, o el triedro intrínseco a la propia trayectoria.

En cada uno de estos casos, el aspecto que nos ocupa es obtener las componentes de los vectores velocidad y aceleración:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}; \quad \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (\text{B.1})$$

## B.1. Coordenadas cartesianas.

El triedro  $Oxyz$  está asociado a los versores  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  según cada dirección coordenada (figura B.1). Puesto que los versores del triedro son constantes, para obtener la velocidad y aceleración basta derivar directamente las coordenadas:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} \end{aligned}$$

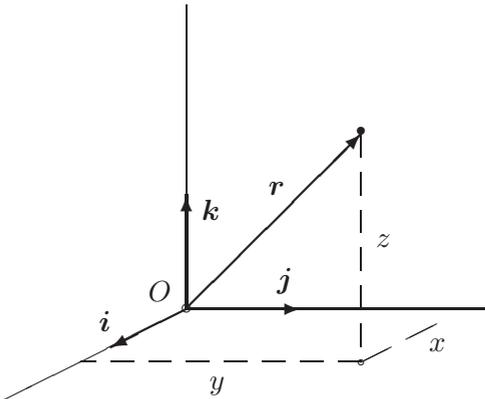


Figura B.1: *Coordenadas cartesianas*

## B.2. Coordenadas cilíndricas y polares.

En este caso, las coordenadas que definen la posición son  $(\rho, \theta, z)$ , siendo  $\rho$  la distancia desde un punto fijo  $O$ ,  $\theta$  el ángulo que forma la proyección del radio vector sobre un plano fijo con una dirección dada del mismo, y  $z$  la altura del punto sobre dicho plano (figura B.2).

El triedro de vectores unitarios asociado (o base física) es  $(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{k})$ . El versor  $\mathbf{u}_\rho$  queda definido como un vector unitario en la dirección de la proyección de  $\mathbf{r}$  sobre el plano;  $\mathbf{k}$  es el versor perpendicular al mismo, y  $\mathbf{u}_\theta$  es

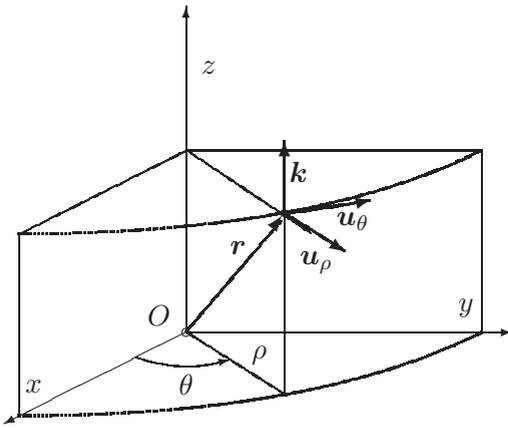


Figura B.2: *Coordenadas cilíndricas*

perpendicular a los dos anteriores. En este triedro tanto  $\mathbf{u}_\rho$  como  $\mathbf{u}_\theta$  varían de punto a punto, constituyendo un sistema de coordenadas *curvilíneas*.

La posición de un punto queda definida mediante

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{u}_\rho + z \mathbf{k} \tag{B.2}$$

expresión que engloba también a las coordenadas polares para el movimiento plano, sin más que hacer  $z = 0$ .

Es inmediato establecer las relaciones con las coordenadas cartesianas, tomando el plano de referencia  $Oxy$  de forma que se comparta la coordenada  $z$ :

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho \operatorname{sen} \theta \end{aligned}$$

Mientras que entre los versores de ambos triedros la relación es

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\rho &= \cos \theta \mathbf{i} + \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} \\ \mathbf{u}_\theta &= -\operatorname{sen} \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} \end{aligned}$$

Derivando estas expresiones respecto del tiempo se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_\rho &= -\dot{\theta} \operatorname{sen} \theta \mathbf{i} + \dot{\theta} \cos \theta \mathbf{j} \\ &= \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta \\ \dot{\mathbf{u}}_\theta &= -\dot{\theta} \cos \theta \mathbf{i} - \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} \\ &= -\dot{\theta} \mathbf{u}_\rho \\ \dot{\mathbf{k}} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Empleando estas igualdades y derivando el vector posición (B.2) se obtiene la velocidad,

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho}\mathbf{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + \dot{z}\mathbf{k};$$

repetiendo la operación, se obtiene la aceleración:

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\mathbf{u}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k}. \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

### B.3. Coordenadas esféricas.

La posición de un punto queda ahora referida a las dos coordenadas angulares en una esfera de radio  $r$ : la longitud  $\varphi$  y la latitud  $\theta$  (figura B.3).

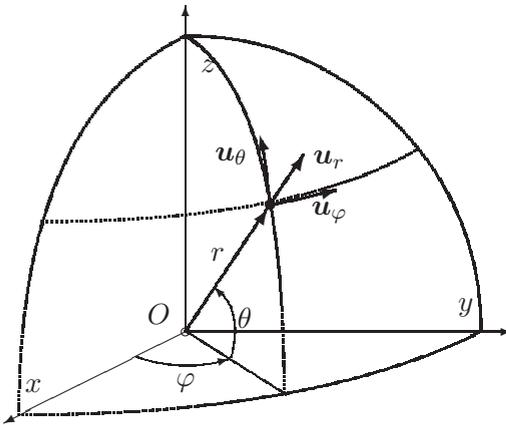


Figura B.3: *Coordenadas esféricas*

El triedro físico es ahora  $(\mathbf{u}_\varphi, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_r)$ . La línea coordenada de longitud  $\varphi$  constante define el meridiano, al cual es tangente el versor  $\mathbf{u}_\theta$ . Asimismo la línea de latitud  $\theta$  constante define un paralelo, al cual es tangente el versor  $\mathbf{u}_\varphi$ . Por último, el versor  $\mathbf{u}_r$  lleva la dirección y sentido del radio vector  $\mathbf{r}$ .

Proyectando sobre las direcciones del triedro cartesiano se obtienen las relaciones con los versores del mismo:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_r &= \cos \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \sin \theta \mathbf{k} \\ \mathbf{u}_\theta &= -\sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} - \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k} \\ \mathbf{u}_\varphi &= \mathbf{u}_\theta \wedge \mathbf{u}_r = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j} \end{aligned}$$

En este caso los tres versores son variables, función del punto. Para obtener sus derivadas temporales, expresaremos primero sus derivadas parciales respecto

de las coordenadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial r} &= \mathbf{0}; & \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \theta} &= \mathbf{u}_\theta; & \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \varphi} &= \cos \theta \mathbf{u}_\varphi \\ \frac{\partial \mathbf{u}_\theta}{\partial r} &= \mathbf{0}; & \frac{\partial \mathbf{u}_\theta}{\partial \theta} &= -\mathbf{u}_r; & \frac{\partial \mathbf{u}_\theta}{\partial \varphi} &= -\operatorname{sen} \theta \mathbf{u}_\varphi \\ \frac{\partial \mathbf{u}_\varphi}{\partial r} &= \mathbf{0}; & \frac{\partial \mathbf{u}_\varphi}{\partial \theta} &= \mathbf{0}; & \frac{\partial \mathbf{u}_\varphi}{\partial \varphi} &= \operatorname{sen} \theta \mathbf{u}_\theta - \cos \theta \mathbf{u}_r \end{aligned}$$

Empleando estas relaciones, se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_r &= \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \\ &= \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta + \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{u}_\varphi \\ \dot{\mathbf{u}}_\theta &= -\dot{\varphi} \operatorname{sen} \theta \mathbf{u}_\varphi - \dot{\theta} \mathbf{u}_r \\ \dot{\mathbf{u}}_\varphi &= \dot{\varphi} \operatorname{sen} \theta \mathbf{u}_\theta - \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{u}_r \end{aligned}$$

Por último, utilizamos estas expresiones en las derivadas temporales de  $\mathbf{r}$ , para obtener:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta + r \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{u}_\varphi \\ \ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta - r \dot{\theta}^2) \mathbf{u}_r + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + r \ddot{\theta}) \mathbf{u}_\theta \\ &\quad + (2\dot{r} \dot{\varphi} \cos \theta - 2r \dot{\theta} \dot{\varphi} \operatorname{sen} \theta + r \ddot{\varphi} \cos \theta) \mathbf{u}_\varphi \end{aligned}$$

## B.4. Triedro intrínseco

La propia curva definida por la trayectoria dinámica,  $\mathbf{r}(t)$ , permite definir un triedro denominado «*intrínseco*», que a menudo resulta de gran utilidad para describir el movimiento. Se resumen aquí algunas definiciones y propiedades fundamentales de dicho triedro. Para un mayor detalle puede consultarse algún texto de geometría diferencial<sup>1</sup>.

**Vectores y planos del triedro.**— Los versores que constituyen el triedro intrínseco están definidos por la trayectoria misma. Ésta puede considerarse parametrizada bien por el tiempo ( $\mathbf{r}(t)$ , con derivada  $\dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/dt$ ), bien por la longitud del arco de curva  $s$ , sabiendo que  $ds = \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}$ . El sentido positivo del arco coincide con el avance real sobre la curva a lo largo del tiempo.

<sup>1</sup>D.J. Struik: *Geometría Diferencial Clásica*, Aguilar 1973; J.A. Fernández Palacios: *Mecánica Teórica de los Sistemas de Sólidos Rígidos*, (Anejo 1A), 1989.

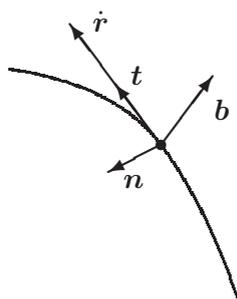


Figura B.4: *Vectores del triédrico intrínseco*

- *tangente*  $\mathbf{t} \stackrel{\text{def}}{=} d\mathbf{r}/ds$ , vector unitario con igual dirección y sentido que la velocidad  $\dot{\mathbf{r}}$ .
- *normal principal*  $\mathbf{n}$ , vector unitario normal a la curva ( $d\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = 0$ ), y perteneciente al plano osculador (plano definido por dos tangentes sucesivas a la curva,  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{t} + d\mathbf{t}$ ). Su dirección y sentido lo tomaremos por tanto según  $d\mathbf{t}$ , es decir, hacia el lado cóncavo de la misma.
- *binormal*  $\mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$ , perpendicular por tanto a la curva ( $d\mathbf{r} \cdot \mathbf{b} = 0$ ), y también a la normal principal ( $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = 0$ ).

Los versores  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{b}$  definen el plano normal, cualquier recta contenida en este plano es normal a la curva. Por otra parte, el plano osculador queda definido por  $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$ , siendo la binormal perpendicular al mismo.

**Fórmulas de Frenet.**— Al ser un versor de módulo unidad, la derivada del vector tangente es normal al mismo:

$$\frac{d}{ds}(\underbrace{\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}}_{=1}) = 2\mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} = 0. \quad (\text{B.4})$$

Por la definición hecha de  $\mathbf{n}$ , la derivada  $d\mathbf{t}/ds$  lleva la dirección de  $\mathbf{n}$ , y el módulo se denomina *curvatura*:

$$\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \left| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right|.$$

Se puede interpretar de forma intuitiva razonando que cuanto más se «doble» la curva (por unidad de arco), mayor es su curvatura  $\kappa$ . Dada la definición realizada de  $\mathbf{n}$ , por la que su sentido es siempre hacia el lado cóncavo, dicha curvatura resulta siempre positiva. Asimismo, se define el radio de curvatura como su inversa:  $R \stackrel{\text{def}}{=} 1/\kappa$ . Así,

$$\boxed{\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \mathbf{n} = \frac{1}{R} \mathbf{n}} \quad (1.^\text{a} \text{ fórmula de Frenet}). \quad (\text{B.5})$$

Veamos ahora la variación de la binormal  $\mathbf{b}$ . Si la curva es plana, el plano osculador es fijo y  $d\mathbf{b}/ds = 0$ . En un caso general, esta derivada constituye una medida del alabeo de la curva que denominaremos *torsión*. En cuanto a la dirección de esta derivada, razonamos en primer lugar, por los mismos argumentos esgrimidos en (B.4), que es normal al propio  $\mathbf{b}$ . Por otra parte,

$$\frac{d}{ds}(\underbrace{\mathbf{b} \cdot \mathbf{t}}_{=0}) = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{b} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \cdot \mathbf{t} + \underbrace{\mathbf{b} \cdot (\kappa \mathbf{n})}_{=0} = 0.$$

Deducimos pues que  $d\mathbf{b}/ds = 0$  es normal a  $\mathbf{b}$  y a  $\mathbf{t}$ , es decir, lleva la dirección de  $\mathbf{n}$ , mientras que su módulo lo llamaremos torsión  $\tau$ . Estableciendo de forma convencional el signo negativo en esta relación, puede escribirse

$$\boxed{\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau \mathbf{n} = -\frac{1}{T} \mathbf{n}} \quad (2.^a \text{ fórmula de Frenet}). \quad (B.6)$$

(El radio de torsión resulta, análogamente al de curvatura,  $T \stackrel{\text{def}}{=} 1/\tau$ .)

Por último, derivando la normal principal,

$$\frac{d}{ds} \mathbf{n} = \frac{d}{ds} (\mathbf{b} \wedge \mathbf{t}) = (-\tau \mathbf{n}) \wedge \mathbf{t} + \mathbf{b} \wedge (\kappa \mathbf{n}),$$

es decir:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t}} \quad (3.^a \text{ fórmula de Frenet}). \quad (B.7)$$

**Expresiones de la velocidad y aceleración.**— Empleando las fórmulas de Frenet es inmediato deducir las siguientes expresiones para velocidad y aceleración:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{ds}{dt} \mathbf{t} = v \mathbf{t},$$

relación que expresa simplemente que la velocidad es tangente a la trayectoria. Derivando de nuevo,

$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{v} \mathbf{t} + v \frac{d\mathbf{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{v} \mathbf{t} + \frac{v^2}{R} \mathbf{n}$$

Se identifican en esta expresión claramente dos términos de la aceleración:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{v} \mathbf{t} & \text{aceleración tangencial} \\ \frac{v^2}{R} \mathbf{n} & \text{aceleración normal (centrípeta)} \end{array} \right.$$