

Capítulo 6

Cinemática del sólido rígido

Índice

6.1. Velocidades y aceleraciones del sólido rígido . . .	6.1
6.1.1. Derivada de un vector material del sólido	6.2
6.1.2. Campo de velocidades del sólido rígido	6.7
6.1.3. Campo de aceleraciones del sólido rígido	6.11
6.1.4. Caso particular del movimiento plano	6.13
6.2. Composición de movimientos	6.21
6.2.1. Composición de movimientos infinitesimales	6.21
6.2.2. Composición del movimiento de 2 sistemas	6.21
6.2.3. Composición del movimiento de n sistemas	6.22
6.2.4. Movimiento de sólidos tangentes	6.25
6.3. Rotación finita del sólido	6.29
6.3.1. Composición de rotaciones finitas	6.29
6.3.2. La Rotación finita como cambio de base	6.30
6.3.3. La Rotación finita como transformación ortogonal	6.32
6.3.4. Ángulos de Euler	6.34
6.3.5. Expresiones de la velocidad de rotación	6.38

6.1. Velocidades y aceleraciones del sólido rígido

La segunda parte del curso trata de la dinámica del movimiento general en tres dimensiones del sólido rígido. En este capítulo se estudia la caracterización del movimiento o *cinemática*, lo que resulta clave para aplicar más adelante las leyes de la dinámica y obtener las ecuaciones pertinentes.

En este estudio del movimiento comenzamos por estudiar la expresión de la derivada temporal de un vector material ligado al sólido, que como veremos es la base para las expresiones de los campos de velocidades y aceleraciones del sólido. Estos campos se caracterizan mediante la velocidad y aceleración de traslación de un punto de referencia del sólido y la velocidad y aceleración angulares del sólido. Tanto las velocidades como las aceleraciones son derivadas del movimiento del sólido, o lo que es lo mismo descripciones de sus movimientos infinitesimales. Una vez caracterizados estos campos se analiza la composición de movimientos ya que en numerosas ocasiones el movimiento de un sólido viene definido como superposición de movimientos elementales o bien en relación a otro sistema móvil. Por último estudiaremos los movimientos finitos del sólido, en particular las rotaciones finitas, que como se verá precisan una interpretación rigurosa como tensores o matrices de rotación, cuya parametrización se aborda mediante los ángulos de Euler.

6.1.1. Derivada de un vector material del sólido

Consideremos un sólido \mathcal{B} , dotado de un movimiento general, esto es tanto de traslación como de rotación. Supondremos un sistema de referencia ortonormal (triedro) ligado al sólido (O, \mathbf{e}_i), con origen en $O \in \mathcal{B}$ y vectores unitarios *materiales* \mathbf{e}_i que se mueven con el sólido (figura 6.1). Las derivadas (temporales) relativas de estos vectores para un observador ligado al sólido serán nulas. Sin embargo, sus derivadas «*absolutas*» para un

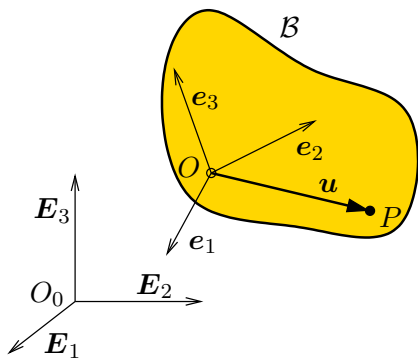


Figura 6.1: Sólido rígido \mathcal{B} , con el triedro móvil (del sólido) $\{O, \mathbf{e}_i\}$, y un vector material \mathbf{u} ligado al sólido rígido. Este vector puede considerarse como si estuviera «pinchado» en el sólido.

sistema de referencia inercial («*absoluto*») no serán nulas:

$$\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)_{\text{rel},\mathcal{B}} = \mathbf{0}; \quad \dot{\mathbf{u}} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \neq \mathbf{0}. \quad (6.1)$$

Aunque los vectores \mathbf{e}_i del triedro sean móviles, sus productos escalares sí son constantes, y por tanto las derivadas de estos productos nulas:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = \dot{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot \dot{\mathbf{e}}_j. \quad (6.2)$$

Definimos unos coeficientes

$$H_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_i \cdot \dot{\mathbf{e}}_j, \quad (6.3)$$

que debido a las relaciones (6.2) resultan ser hemisimétricos:

$$\mathbf{e}_i \cdot \dot{\mathbf{e}}_j = -\mathbf{e}_j \cdot \dot{\mathbf{e}}_i \quad \Rightarrow \quad H_{ij} = -H_{ji}. \quad (6.4)$$

Las expresiones (6.3) indican también que los coeficientes H_{ij} se pueden interpretar como las componentes del vector derivada $\dot{\mathbf{e}}_j$ en la base $\{\mathbf{e}_i\}$:¹

$$\dot{\mathbf{e}}_j = H_{ij} \mathbf{e}_i. \quad (6.5)$$

Supongamos ahora un vector material cualquiera \mathbf{u} ligado al sólido,

$$\mathbf{u} = u_j \mathbf{e}_j; \quad (6.6)$$

en el triedro del sólido las componentes u_j de este vector serán constantes, por lo que su derivada será, empleando la linealidad de la misma y (6.5),

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d}{dt}(u_j \mathbf{e}_j) = u_j \frac{d\mathbf{e}_j}{dt} = u_j H_{ij} \mathbf{e}_i. \quad (6.7)$$

Podemos escribir las componentes de esta expresión en forma matricial, empleando la matriz de las componentes hemisimétricas $[\mathbf{H}] = [H_{ij}]$, en la cual sólo hay tres componentes independientes y no nulas:²

$$\begin{aligned} \{\mathbf{v}\} &= \{\dot{\mathbf{u}}\} = [\mathbf{H}]\{\mathbf{u}\} \\ \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & H_{12} & H_{13} \\ -H_{12} & 0 & H_{23} \\ -H_{13} & -H_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_{12}u_2 + H_{13}u_3 \\ -H_{12}u_1 + H_{23}u_3 \\ -H_{13}u_1 - H_{23}u_2 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

¹En lo sucesivo adoptaremos el convenio de sumación implícita de Einstein, por el que, salvo indicación en contra, los índices repetidos se deben entender sumados a lo largo de todo su rango.

²Adoptaremos en lo sucesivo la siguiente notación para las expresiones matriciales: $\{\mathbf{b}\} = \{b_i\}$ para matrices columna, $\{\mathbf{a}\}^T$ para matrices fila, y $[\mathbf{C}] = [C_{ij}]$ para matrices de dos índices.

Realizaremos ahora un cambio de notación para las componentes $[H_{ij}]$:

$$[\mathbf{H}] = \begin{pmatrix} 0 & H_{12} & H_{13} \\ -H_{12} & 0 & H_{23} \\ -H_{13} & -H_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

Este cambio permite interpretar la derivada como un producto vectorial por el vector que denominaremos *velocidad angular* o *velocidad de rotación* del sólido \mathcal{B} ,

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_1 \mathbf{e}_1 + \Omega_2 \mathbf{e}_2 + \Omega_3 \mathbf{e}_3; \quad (6.10)$$

desarrollando el producto vectorial:³

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} \Omega_i u_j \mathbf{e}_k \\ &= (\Omega_2 u_3 - \Omega_3 u_2) \mathbf{e}_1 + (\Omega_3 u_1 - \Omega_1 u_3) \mathbf{e}_2 + (\Omega_1 u_2 - \Omega_2 u_1) \mathbf{e}_3 \\ &= (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3) \begin{Bmatrix} \Omega_2 u_3 - \Omega_3 u_2 \\ \Omega_3 u_1 - \Omega_1 u_3 \\ \Omega_1 u_2 - \Omega_2 u_1 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

expresión que comprobamos se corresponde con (6.8). De esta forma, la expresión vectorial de la derivada del vector material \mathbf{u} será

$$\dot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u}. \quad (6.12)$$

Hacemos notar que la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ es una propiedad del movimiento del sólido en su conjunto, independientemente del vector \mathbf{u} considerado. Así, para dos vectores materiales $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ de \mathcal{B} será

$$\dot{\mathbf{u}}_1 = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u}_1; \quad \dot{\mathbf{u}}_2 = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u}_2. \quad (6.13)$$

Podemos definir asimismo la notación asociada del operador matricial hemisimétrico como

$$[\widehat{\boldsymbol{\Omega}}] = [\mathbf{H}] \quad (6.14)$$

de forma que la derivada admitirá una interpretación equivalente mediante un producto vectorial o una aplicación hemisimétrica⁴ asociada $[\widehat{\boldsymbol{\Omega}}]$:

$$\dot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \{\dot{\mathbf{u}}\} = [\widehat{\boldsymbol{\Omega}}]\{\mathbf{u}\}. \quad (6.15)$$

³Las componentes ϵ_{ijk} corresponden al tensor permutación, siendo su valor +1 ó -1 según la permutación sea par o no, e igual a cero si algún índice se repite.

⁴De forma más general y sin hacer mención a coordenadas, puede considerarse que este operador es un tensor de segundo orden hemisimétrico, que define una aplicación lineal por la que $\dot{\mathbf{u}} = \widehat{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \mathbf{u}$. Por otra parte puede comprobarse que la relación entre las componentes del vector axial $\boldsymbol{\Omega}$ y del tensor hemisimétrico asociado $\widehat{\boldsymbol{\Omega}}$ son $\widehat{\Omega}_{ij} = \Omega_k \epsilon_{kji}$, $\Omega_i = \frac{1}{2} \epsilon_{jik} \widehat{\Omega}_{jk}$

El vector $\boldsymbol{\Omega}$ caracteriza el movimiento del sistema de referencia del sólido, y se corresponde con el concepto intuitivo de velocidad angular de rotación del sólido rígido. Para comprender esto, consideremos la velocidad de un punto definido por el radio vector $\mathbf{r} = \mathbf{u}$ con origen en O (o lo que es lo mismo, la velocidad del extremo de \mathbf{u} respecto a O) cuando el triedro gira con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ alrededor de un eje dado (figura 6.2).

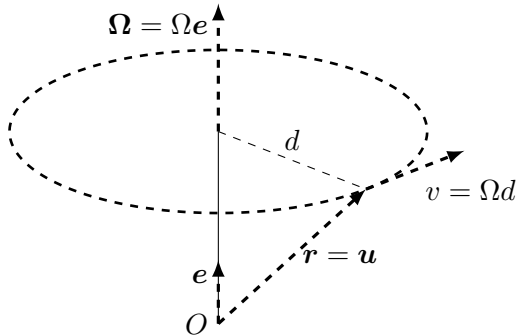


Figura 6.2: Interpretación de $\boldsymbol{\Omega}$ como una velocidad de rotación.

Si el punto en cuestión se halla situado a distancia d del eje, su velocidad es Ωd , en dirección tangencial a la circunferencia situada en un plano perpendicular al eje de rotación y cuyo centro es la intersección del eje con el plano. Este mismo resultado se obtiene del desarrollo geométrico de la expresión $\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}$.

Por último, este resultado para la derivada de un vector material sirve también para derivar un vector cualquiera no ligado al sólido, pero cuya definición se realice a través del sistema de referencia del sólido, $\mathbf{p} = p_i \mathbf{e}_i$. En este caso las componentes p_i no serán en general constantes, por lo que la derivada es

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{p}_i \mathbf{e}_i + p_i \dot{\mathbf{e}}_i = \dot{p}_i \mathbf{e}_i + p_i (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{e}_i) = \dot{p}_i \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\Omega} \wedge (p_i \mathbf{e}_i); \quad (6.16)$$

en esta expresión, el primer término corresponde a la derivada relativa, que mediría un observador ligado al sólido. Así se llega a

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)_{\text{rel},B} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{p}. \quad (6.17)$$

Esta expresión indica que la derivada de un vector cualquiera a través del sistema de referencia ligado al sólido se puede expresar como suma de la derivada relativa y un término complementario definido por el producto vectorial por la velocidad angular.

EJEMPLO 6.1: Se considera una curva Γ en \mathbb{R}^3 , en la cual se puede definir el vector *tangente* $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/ds$, siendo $ds = |d\mathbf{r}|$. Se sabe por la primera fórmula de Frenet que $d\mathbf{t}/ds = \kappa\mathbf{n}$, siendo el vector unitario \mathbf{n} la denominada *normal principal* y κ la *curvatura*. La *binormal* se define a su vez como $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$. Estos tres vectores unitarios forman un triedro a derechas $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ denominado triedro de Frenet (ver apartado B.4 en apéndice B, o para una descripción más completa un libro de geometría diferencial como el Struik⁵). Por último, la tercera fórmula de Frenet indica que $d\mathbf{b}/ds = -\tau\mathbf{n}$, siendo τ la *torsión* de la curva. El triedro de Frenet puede considerarse como un sistema rígido.

Deducir la *velocidad de rotación del triedro de Frenet* cuando un punto se mueve por la curva Γ con velocidad v .

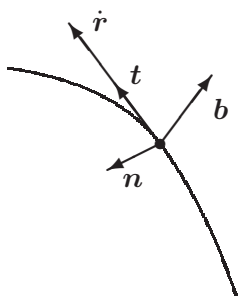


Figura 6.3: Vectores del triedro intrínseco de Frenet.

Solución. La derivada temporal de \mathbf{t} es

$$\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \kappa\mathbf{n}v.$$

Interpretando la derivada mediante la velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}$,

$$\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{t} = \begin{vmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{n} & \mathbf{b} \\ \Omega_t & \Omega_n & \Omega_b \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\Omega_n \mathbf{b} + \Omega_b \mathbf{n},$$

y de la comparación de ambas expresiones se deduce $\Omega_b = \kappa v$; $\Omega_n = 0$. Por otra parte,

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \frac{ds}{dt} = -\tau\mathbf{n}v;$$

e interpretándola como producto vectorial

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{b} = -\Omega_t \mathbf{n} + \Omega_n \mathbf{t}.$$

⁵D.J. Struik: *Geometría Diferencial Clásica*, Aguilar 1973.

De donde se deduce que $\Omega_t = \tau v$. Por tanto, la velocidad angular buscada tiene la expresión

$$\Omega = v\tau \mathbf{t} + v\kappa \mathbf{b}.$$

Esta ecuación permite interpretar la evolución del triedro intrínseco de Frenet, al desplazarse con velocidad v según la curva, como una rotación con dos componentes: una de torsión, alrededor de la tangente, con velocidad angular $v\tau$, y una de curvatura, alrededor de la binormal, con velocidad angular $v\kappa$. \square

6.1.2. Campo de velocidades del sólido rígido

Consideramos un sistema de referencia inercial («fijo») $S_0 \equiv (O_0, \mathbf{E}_i)$, y otro móvil $S \equiv (O, \mathbf{e}_i)$ ligado a un sólido \mathcal{B} . El vector posición de un punto material cualquiera del sólido respecto de S_0 es \mathbf{r} , y respecto de S lo denominamos $\boldsymbol{\rho}$. La relación entre los vectores posición (figura 6.4) es

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}, \tag{6.18}$$

donde \mathbf{r}_O define la posición del origen O de S . La velocidad la obtenemos

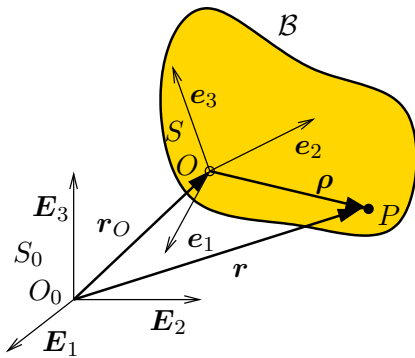


Figura 6.4: Vectores posición (\mathbf{r} , $\boldsymbol{\rho}$) en las referencias fija $S_0 \equiv \{O_0, \mathbf{E}_i\}$ y móvil $S \equiv \{O, \mathbf{e}_i\}$ respectivamente.

derivando esta igualdad, \mathbf{r}_O se deriva directamente y para el vector material $\boldsymbol{\rho}$ tendremos en cuenta la regla de derivación en sistemas móviles (6.12):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \Omega \wedge \boldsymbol{\rho}. \tag{6.19}$$

En esta ecuación, los dos sumandos que componen la velocidad tienen una interpretación clara. En primer lugar, \mathbf{v}_O es una componente de traslación, común para todos los puntos de \mathcal{B} . Por otra parte, $\Omega \wedge \boldsymbol{\rho}$ es la velocidad correspondiente a una rotación instantánea de velocidad angular Ω alrededor de un eje que pasa por O .

La expresión (6.19) define los movimientos infinitesimales del sólido: considerando un tiempo elemental dt , podemos escribir $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$, $d\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Omega}dt$ y la ecuación es equivalente a

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_O + d\boldsymbol{\theta} \wedge \boldsymbol{\rho}. \quad (6.20)$$

Por otra parte, la ecuación (6.19) caracteriza el campo de velocidades del sólido rígido como un *campo de momentos*, o lo que es equivalente, como un *Sistema de Vectores Deslizantes (SVD)*⁶. Como tal, queda descrito por los siguientes elementos básicos:

- Resultante: $\boldsymbol{\Omega}$;
- Momento en un punto O : \mathbf{v}_O ;
- Campo de momentos: para un punto cualquiera $P \in \mathcal{B}$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_P &= \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}_{OP} \\ &= \mathbf{v}_O + \mathbf{r}_{PO} \wedge \boldsymbol{\Omega}. \end{aligned}$$

De la ecuación del campo de momentos se deducen algunas propiedades interesantes:

1. *Equiproyectividad*: La proyección de las velocidades de dos puntos cualesquiera sobre la recta que les une es igual,

$$\forall (O, P) \in \mathcal{B}, \quad \mathbf{v}_O \cdot \mathbf{r}_{OP} = \mathbf{v}_P \cdot \mathbf{r}_{OP};$$

2. *Invariante escalar*: La proyección de la velocidad de un punto cualquiera sobre la velocidad angular es una constante o «invariante escalar»,

$$\forall P \in \mathcal{B}, \quad \mathbf{v}_P \cdot \boldsymbol{\Omega} = \text{cte.}$$

Cuando esta invariante escalar sea nula diremos que el movimiento es una *rotación instantánea*.

3. *Eje central y momento mínimo*:

Existe un eje en el cual el momento (\mathbf{v}) es igual para todos los puntos del mismo, con la particularidad de que es paralelo a la propia dirección del eje ($\boldsymbol{\Omega}$) y además el mínimo (v_{\min}). En nuestro caso, llamaremos a este *Eje Helicoidal Tangente (EHT)*, cuya obtención y propiedades las veremos a continuación.

⁶Para una descripción y resumen de las propiedades de los Sistemas de Vectores Deslizantes y los campos de momentos resultantes, consultar J.A. Fernández Palacios: *Mecánica Teórica de los Sistemas de Sólidos Rígidos*, Anejo 1B, o M. Prieto Alberca: *Curso de Mecánica Racional – Cinemática y Estática*, Cap. I: Cálculo Vectorial

Movimiento helicoidal tangente

Busquemos en primer lugar los puntos en los que la velocidad dada por (6.19) se anula:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} = -\mathbf{v}_O;$$

se obtiene una ecuación vectorial en la que son datos $\boldsymbol{\Omega}$ y \mathbf{v}_O , con la incógnita $\boldsymbol{\rho}$. Para que tenga solución, es necesario que se cumpla la condición de compatibilidad⁷:

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_O = 0. \quad (6.21)$$

En un caso general, no tienen porqué existir puntos de velocidad nula; Sólo los habrá si se cumple esta condición de compatibilidad. Si existen puntos de velocidad nula diremos que el movimiento instantáneo es una rotación.

Generalizando algo más, busquemos ahora puntos en que la velocidad sea paralela a $\boldsymbol{\Omega}$, es decir, $\mathbf{v} = \lambda \boldsymbol{\Omega}$:

$$\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} = \lambda \boldsymbol{\Omega},$$

o bien

$$\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} = \lambda \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{v}_O. \quad (6.22)$$

Esta es, de nuevo, una ecuación vectorial en $\boldsymbol{\rho}$. Es fácil comprobar que su solución no es única: si se conoce una solución y se suma a esta un término paralelo a $\boldsymbol{\Omega}$, el resultado también cumple la ecuación. En definitiva la solución general será una recta paralela a $\boldsymbol{\Omega}$. A través de algunas sencillas operaciones vectoriales⁸ se puede obtener la solución de (6.22) que resulta:

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_O}{\Omega^2} + \alpha \boldsymbol{\Omega}. \quad (6.23)$$

Esta expresión define un *eje paralelo a $\boldsymbol{\Omega}$* , en función del parámetro α . Por otra parte, la condición de compatibilidad exige que:

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot (\lambda \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{v}_O) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_O = \lambda \Omega^2,$$

es decir, define el valor de λ en función del invariante escalar, pudiendo distinguirse dos casos.

- a. Si $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_O \neq 0$, es $\lambda \neq 0$, y la velocidad en el eje es $\mathbf{v} = \lambda \boldsymbol{\Omega} \neq \mathbf{0}$. No existen puntos de velocidad nula, se trata de un *movimiento helicoidal tangente* general.

⁷El producto vectorial es normal a los dos argumentos

⁸Véase *Curso de Mecánica*, J.M. Goicolea (2010), apartado 4.3.1

- b. Si $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_O = 0$, es $\lambda = 0$, y la velocidad en el eje es $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. El movimiento es una *rotación instantánea*.

Todos los puntos del eje definido por (6.23) tienen la misma velocidad; en efecto, si dos puntos definidos por $\boldsymbol{\rho}_1$ y $\boldsymbol{\rho}_2$ pertenecen al eje:

$$\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1 = \beta \boldsymbol{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\beta \boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{0}$$

Por otra parte, si se toma como referencia un punto A del eje, la velocidad en otro punto cualquiera P queda descompuesta como suma de un término constante en dirección del eje, \mathbf{v}_A , y otro perpendicular a este, por serlo a $\boldsymbol{\Omega}$ (figura 6.5):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} = \lambda \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}. \quad (6.24)$$

Es fácil comprender por tanto que el eje contiene los puntos de *velocidad mínima* del sólido: la velocidad de cualquier otro punto, además de la componente constante ($\mathbf{v}_A = \lambda \boldsymbol{\Omega}$), tiene una componente adicional perpendicular a la velocidad del eje, por lo que siempre será mayor en módulo.

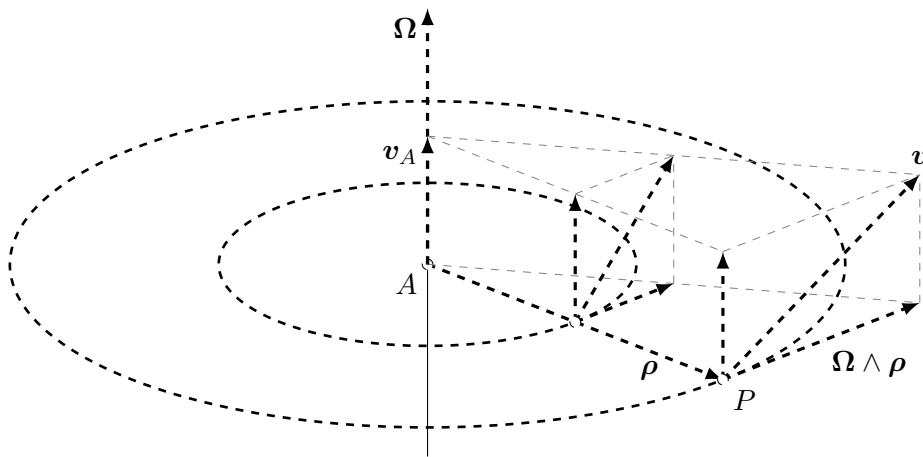


Figura 6.5: Descripción del campo de velocidades como un movimiento helicoidal tangente. La velocidad de un punto P cualquiera se obtiene sumando la velocidad de deslizamiento de los puntos del eje (\mathbf{v}_A) y el momento $\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}$

Esta descripción del campo de velocidades caracteriza el llamado *movimiento helicoidal tangente*, es decir como una hélice o «sacacorchos», cuyo eje queda definido por (6.23). Los puntos que no estén sobre el eje tienen una componente adicional de la velocidad ($\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}$) perpendicular al mismo.

Esta caracterización del movimiento varía con el tiempo, tanto por el cambio de la dirección de $\boldsymbol{\Omega}$ cómo de su módulo. Por lo tanto, en cada

momento existe un movimiento helicoidal, tangente al movimiento en ese instante. Debido a esto, (6.23) se llama «eje instantáneo» del movimiento.

Por otra parte, se denomina «tangente» porque caracteriza, al igual que las tangentes, tan solo la derivada primera del movimiento. El movimiento helicoidal tangente sirve para interpretar el campo de velocidades, pero en cambio no es válido para interpretar el campo de aceleraciones, caracterizado por la derivada segunda, como veremos más abajo.

Axoides del movimiento.— A lo largo del movimiento el eje instantáneo del movimiento helicoidal tangente ocupa una posición distinta en cada instante, describiendo una superficie reglada denominada *axoide*. La ecuación paramétrica del axoide será simplemente la expresada por (6.23), tomando como parámetros α y el tiempo t . Según describamos el axoide desde el punto de vista del sistema de referencia móvil o del fijo obtendremos dos superficies regladas distintas, denominadas respectivamente *axoide móvil* o *axoide fijo*:

- *Axoide móvil*

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_O}{\Omega^2} + \alpha \boldsymbol{\Omega} \quad (6.25)$$

- *Axoide fijo*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \frac{\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_O}{\Omega^2} + \alpha \boldsymbol{\Omega} \quad (6.26)$$

Por su definición, ambos axoides son superficies regladas. En cada instante tienen en común la generatriz, que es precisamente el eje del movimiento helicoidal tangente en ese instante. Una propiedad importante de los axoides es que *son tangentes entre sí en todos los puntos del eje*. Esta afirmación, a pesar de lo que pudiera parecer intuitivamente en una primera consideración, no es evidente. Conviene precisar que una superficie reglada, en general, no tiene necesariamente un único plano tangente a lo largo de una generatriz; sólo será así si la superficie reglada es además desarrollable, como es el caso de los conos o los cilindros. Sin embargo, un hiperboloide reglado (de una hoja) no es desarrollable y el plano tangente es distinto en cada punto de la generatriz. Los axoides son en general superficies regladas pero no necesariamente desarrollables.

6.1.3. Campo de aceleraciones del sólido rígido

Derivando otra vez la expresión de la velocidad (6.19) y aplicando de nuevo la regla de derivación en sistemas móviles (6.12) se obtiene la expresi-

sión general del campo de aceleraciones del sólido:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}). \quad (6.27)$$

El significado de cada uno de estos tres términos es el siguiente (figura 6.6):

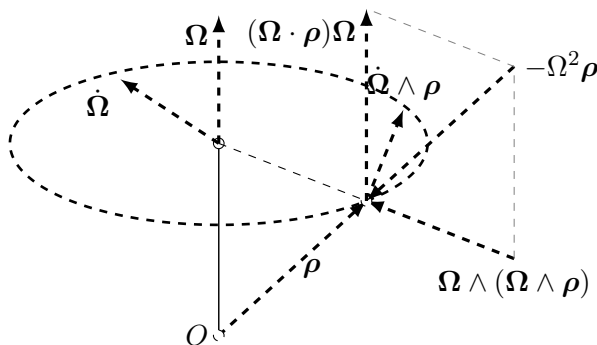


Figura 6.6: *Campo de aceleraciones del sólido rígido: Interpretación geométrica de los distintos términos (Recordamos que por la fórmula de expulsión para el doble producto vectorial resulta $\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}) = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\Omega} - \Omega^2 \boldsymbol{\rho}$.)*

- \mathbf{a}_O es la aceleración del origen O , común para todos los puntos del sólido (aceleración de traslación).
- $\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho}$ es un término perpendicular a $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ y $\boldsymbol{\rho}$. Aunque por similitud con las fórmulas del movimiento circular pudiera parecer en primera instancia que este término corresponde a una aceleración tangencial, no es así en un caso general. Sólo será tangente a la trayectoria si $\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$ y la dirección de $\boldsymbol{\Omega}$ no varía, correspondiendo entonces el movimiento a una rotación permanente alrededor de un eje fijo por O . En un caso general este término no será tangencial ni siquiera en el movimiento plano (ver más abajo en el apartado 6.1.4 la descomposición en aceleración normal y tangencial para el movimiento plano).
- $\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\rho}) - \rho\Omega^2$ es una aceleración *axípeta* (dirigida hacia el eje), descompuesta en los dos términos anteriores, uno dirigido hacia el centro O ($-\rho\Omega^2$) y otro según el eje ($\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\rho})$).

Se denomina *polo de aceleraciones* al punto en que la aceleración se anula. En general, existe un único punto en que se verifica esto, salvo casos particulares, en que puede no existir, o bien existir una recta de polos. Para obtener el polo, buscamos la solución para $\boldsymbol{\rho}$ de la expresión (6.27) igualada a cero,

$$\mathbf{0} = \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}).$$

Para obtener la solución de esta ecuación representaremos los productos vectoriales como productos por matrices hemisimétricas (6.15). Denominando $[\hat{\Omega}]$ y $[\hat{\dot{\Omega}}]$ a las matrices hemisimétricas asociadas respectivamente a los productos vectoriales por Ω y $\dot{\Omega}$:

$$\{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{a}_O\} + [\hat{\dot{\Omega}}]\{\rho\} + [\hat{\Omega}]([\hat{\Omega}]\{\rho\}) = \{\mathbf{a}_O\} + ([\hat{\dot{\Omega}}] + [\hat{\Omega}]^2)\{\rho\},$$

cuya solución,

$$\{\rho\} = -([\hat{\dot{\Omega}}] + [\hat{\Omega}]^2)^{-1}\{\mathbf{a}_O\},$$

es por lo general única, siempre que $([\hat{\dot{\Omega}}] + [\hat{\Omega}]^2)$ sea regular y admita inversa. En caso contrario, si $([\hat{\dot{\Omega}}] + [\hat{\Omega}]^2)$ es singular, en principio no existirá polo de aceleraciones, salvo casos degenerados en los que puede existir una línea o un plano entero de polos.

6.1.4. Caso particular del movimiento plano

Decimos que un sólido tiene un movimiento plano cuando las velocidades de todos sus puntos son paralelas a un plano Π fijo. Para que esto se cumpla, la velocidad de rotación Ω ha de ser perpendicular al plano. En efecto, recordando la expresión del campo de velocidades (6.19),

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \Omega \wedge \rho,$$

tanto \mathbf{v} como \mathbf{v}_O pertenecen al plano Π , por lo tanto, para que $\Omega \wedge \rho$ pertenezca también al plano Π , Ω ha de ser normal al mismo.

Bastará con estudiar el movimiento de una sección plana del sólido paralela al plano dado para caracterizar el movimiento de cualquier punto, aunque el sólido en sí no sea plano. Los puntos fuera de esta sección tendrán idéntica velocidad que sus proyecciones sobre el plano de referencia.

Tomaremos convencionalmente el triedro de referencia de forma que el versor \mathbf{k} defina la normal al plano. Así, la velocidad de rotación se puede representar tan sólo por una magnitud escalar, $\Omega = \Omega \mathbf{k}$ (figura 6.7).

Centro instantáneo de rotación

En un movimiento plano, el eje del movimiento helicoidal tangente (EHT) es una recta con la dirección de Ω y por tanto normal al plano Π . Al estar contenida la velocidad de un punto cualquiera del sólido \mathbf{v}_O en el plano, se cumplirá $\Omega \cdot \mathbf{v}_O = 0$, por lo que el movimiento es una *rotación pura*. El eje del movimiento (EHT) tiene velocidad nula en todos sus puntos, será

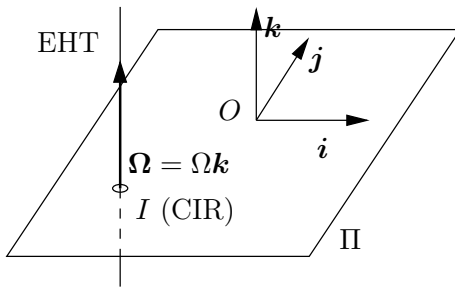


Figura 6.7: Orientación del triedro en el movimiento plano.

por tanto un *eje instantáneo de rotación (EIR)*. La intersección de este eje con el plano se denomina *centro instantáneo de rotación (CIR)*. Para definir las coordenadas de este punto en el plano, particularizamos las del eje del movimiento helicoidal (6.25):

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_O}{\Omega^2} + \alpha \boldsymbol{\Omega},$$

ya que $\alpha = 0$ en el plano Π . Sustituyendo $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{k}$ obtenemos

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{k} \wedge \mathbf{v}_O}{\Omega}. \quad (6.28)$$

En el movimiento plano se puede medir la rotación absoluta mediante un parámetro angular φ , ángulo girado por una recta determinada del plano móvil con respecto a una referencia fija. Teniendo en cuenta entonces $\Omega = d\varphi/dt$ y $\mathbf{v}_O = d\mathbf{r}_O/dt$, se puede expresar (6.28) como

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{k} \wedge \frac{d\mathbf{r}_O}{d\varphi}. \quad (6.29)$$

Curvas polares.— Análogamente a los axoides definidos para el movimiento tridimensional general, el CIR en el movimiento plano describe unas curvas determinadas dentro del plano a lo largo del movimiento. Este lugar geométrico se llama *polar móvil*, si es el observado desde la referencia móvil, y *polar fija* si es el observado desde la referencia fija. Alternativamente, se pueden llamar también *ruleta* y *base*, respectivamente. Las expresiones de estos lugares geométricos son:

- *Polar móvil*

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{k} \wedge \mathbf{v}_O}{\Omega} = \mathbf{k} \wedge \frac{d\mathbf{r}_O}{d\varphi} \quad (6.30)$$

- *Polar fija*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \frac{\mathbf{k} \wedge \mathbf{v}_O}{\Omega} = \mathbf{r}_O + \mathbf{k} \wedge \frac{d\mathbf{r}_O}{d\varphi} \quad (6.31)$$

La expresión en coordenadas cartesianas de las curvas polares se puede obtener directamente desarrollando en componentes estas ecuaciones vectoriales (6.30) y (6.31), empleando las coordenadas móviles del triedro del sólido o las del triedro fijo en cada caso.

Aceleraciones

Desarrollando los distintos términos de la expresión general del campo de aceleraciones (6.27) para el caso particular del movimiento plano:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} &= \Omega \mathbf{k}, \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} &= \dot{\Omega} \mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\rho}, \\ \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}) &= -\Omega^2 \boldsymbol{\rho}; \end{aligned}$$

de donde obtenemos la siguiente expresión

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \dot{\Omega} \mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\rho} - \Omega^2 \boldsymbol{\rho}. \quad (6.32)$$

Los términos en esta ecuación tienen la siguiente interpretación:

- \mathbf{a}_O es la aceleración de O , término común de traslación para todos los puntos del sólido;
- $\dot{\Omega} \mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\rho}$ es una componente perpendicular al radio vector $\boldsymbol{\rho}$ (no necesariamente tangencial a la trayectoria, tan sólo lo será en el caso de que O coincida con el CIR);
- $-\Omega^2 \boldsymbol{\rho}$ es una componente «centrípeta», dirigida hacia O (dirección que no tiene porqué ser normal a la trayectoria, salvo en el caso arriba mencionado).

El polo de aceleraciones se obtiene igualando a cero la expresión (6.32) y despejando $\boldsymbol{\rho}$. Para ello, multiplicamos vectorialmente la igualdad por \mathbf{k} , y eliminamos $(\mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\rho})$ entre la nueva expresión obtenida y (6.32), resultando finalmente:

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\dot{\Omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{a}_O + \Omega^2 \mathbf{a}_O}{\dot{\Omega}^2 + \Omega^4} \quad (\text{polo de aceleraciones})$$

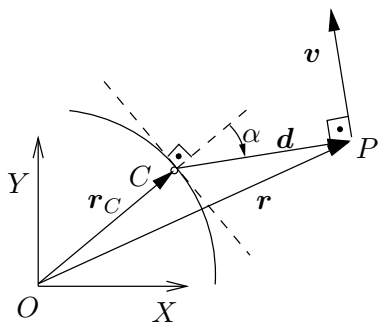


Figura 6.8: Velocidad de un punto cualquiera en relación al CIR (C).

Otra forma de estudiar la aceleración en el movimiento plano es mediante la consideración del movimiento como una rotación instantánea en torno al CIR (figura 6.8). Así, la velocidad de un punto cualquiera P se puede expresar como:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{d} = \Omega \mathbf{k} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C), \quad (6.33)$$

donde \mathbf{r} es el vector posición de P , \mathbf{r}_C el del CIR (C), y $\mathbf{d} = \mathbf{r}_{CP} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_C$. Derivando (6.33) respecto a t :

$$\mathbf{a} = \dot{\Omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{d} + \Omega \mathbf{k} \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{v}_C),$$

donde \mathbf{v} es la velocidad del punto P del sólido, mientras que \mathbf{v}_C es la velocidad de sucesión del punto geométrico C (CIR)⁹.

Considerando finalmente que $\mathbf{v} = \Omega \mathbf{k} \wedge \mathbf{d}$, resulta la siguiente expresión de la aceleración, en la que el término es tangencial a la trayectoria, el segundo normal, y el tercero tiene componentes según estas dos direcciones:

$$\mathbf{a} = \underbrace{\dot{\Omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{d}}_{\text{tangenc.}} - \underbrace{\Omega^2 \mathbf{d}}_{\text{normal}} - \underbrace{\Omega \mathbf{k} \wedge \mathbf{v}_C}_{\text{tangenc.}} + \text{normal}. \quad (6.34)$$

Aceleración del centro instantáneo de rotación.— Otra consideración interesante surge al desarrollar el campo de aceleraciones en relación al punto material situado en un instante dado sobre el CIR. Para diferenciar este *punto material* del sólido del *punto geométrico* CIR, denominaremos C^*

⁹Nótese que C , Centro Instantáneo de Rotación, queda definido por una condición geométrica, por lo que no coincidirá necesariamente con una misma partícula del sólido a lo largo del movimiento. Sería incorrecto por tanto asignar a la derivada de \mathbf{r}_C el valor (nulo) de la velocidad del punto del sólido situado en C . En general, $d\mathbf{r}_C/dt = \mathbf{v}_C$ tiene un valor no nulo, que para distinguir de la velocidad del punto del sólido, denominamos «velocidad de sucesión».

al punto material, mientras que el CIR (punto geométrico) es C . Aunque en un instante dado la posición de ambos coincide ($\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_{C^*}$), su velocidad difiere:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_C &= \frac{d\mathbf{r}_C}{dt} \neq \mathbf{0}, \\ \mathbf{v}_{C^*} &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

El campo de aceleraciones puede calcularse particularizando la expresión general (6.27) para $O \equiv C^*$ y $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{d} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_C$,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{C^*} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{d} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{d}).$$

Otra expresión equivalente para el campo de aceleraciones es la proporcionada por (6.34).

Si se particulariza la expresión (6.34) para el propio centro instantáneo de rotación $P = C^*$, teniendo en cuenta $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, resulta

$$\mathbf{a}_{C^*} = -\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_C.$$

Como consecuencia, es interesante observar que, aunque la velocidad del punto del sólido situado en el CIR sea nula ($\mathbf{v}_{C^*} = \mathbf{0}$), su aceleración no lo tiene porqué ser ($\mathbf{a}_{C^*} \neq \mathbf{0}$). Esto se debe a que el CIR coincide con distintos puntos del sólido en distintos instantes, y una partícula que está situada sobre el CIR en un momento dado dejará de tener velocidad nula al instante siguiente, por lo que su aceleración no será en general nula.

EJEMPLO 6.2: La escalera recta de la figura 6.9 se mueve en un plano vertical, apoyándose sobre la arista superior de un muro vertical de altura h perpendicular al plano del movimiento, mientras el extremo A desliza sobre el suelo horizontal con velocidad constante v dirigida hacia el muro. En el instante inicial la distancia entre el muro y el extremo A tiene un valor b . Se pide determinar, en función del ángulo ϕ que forma la escalera con la horizontal:

- Velocidad y aceleración angulares de la escalera;
- Posición del centro instantáneo de rotación y velocidad del punto C de la escalera;
- Ecuaciones de las polares fija y móvil.

Solución.

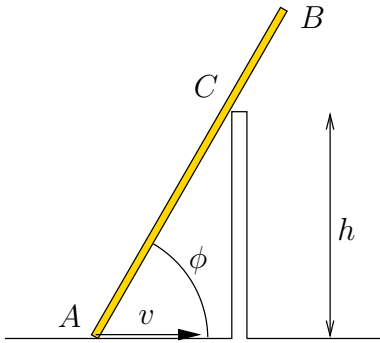


Figura 6.9: *Ejemplo 6.2*; escalera que desliza sobre el suelo horizontal y se apoya sobre un muro de altura h .

a.— La velocidad del punto C de la escalera ha de ser paralela a la propia escalera. Como también conocemos la velocidad del punto A , trazando perpendiculares a ambas se obtiene el CIR que llamaremos I (figura 6.10). Escribiendo la relación geométrica que define el ángulo ϕ y derivando:

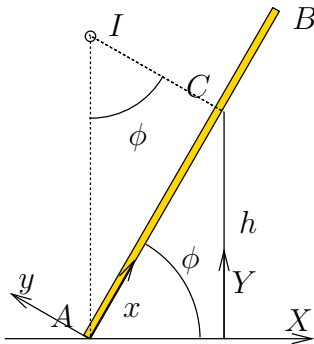


Figura 6.10: *Ejemplo 6.2*; El CIR (I) se encuentra sobre las perpendiculares a las velocidades de los puntos A y C de la escalera.

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{h}{b - vt} \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi}(1 + \operatorname{tg}^2 \phi) = \frac{vh}{(b - vt)^2}.$$

De aquí despejamos la velocidad angular $\Omega = \dot{\phi}$:

$$\dot{\phi} = \frac{vh}{(b - vt)^2 + h^2}.$$

Derivando una segunda vez se obtiene la aceleración:

$$\ddot{\phi} = \frac{2hv^2(b - vt)}{[(b - vt)^2 + h^2]^2}.$$

Otras expresiones de velocidad y aceleración que resultan convenientes son en función del propio ángulo ϕ :

$$(-X_A) = \frac{h}{\operatorname{tg} \phi} \Rightarrow v = -\frac{h\dot{\phi}}{\operatorname{sen}^2 \phi} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{v}{h} \operatorname{sen}^2 \phi \quad (6.35)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{v}{h} 2\dot{\phi} \operatorname{sen} \phi \cos \phi = 2 \frac{v^2}{h^2} \operatorname{sen}^3 \phi \cos \phi \quad (6.36)$$

b.— El centro instantáneo de rotación tiene las coordenadas:

$$\begin{aligned} X_I &= -\frac{h}{\operatorname{tg} \phi} = -(b - vt); \\ Y_I &= \frac{h}{\operatorname{sen}^2 \phi} = \frac{(b - vt)^2 + h^2}{h}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

la velocidad del punto C de la barra se puede obtener empleando la propiedad de equiproyectividad, con el punto A de velocidad conocida. Llamando α al ángulo que forma la velocidad en cada punto con la recta que los une:

$$v_A \cos \alpha_A = v_C \cos \alpha_C \Rightarrow v_C = v \cos \phi.$$

También podría haberse obtenido v_C considerando que es una rotación alrededor del CIR:

$$v_C = \dot{\phi} \overline{IC} = \dot{\phi} Y_I \cos \phi = v \cos \phi.$$

En expresión vectorial,

$$\mathbf{v}_C = v \cos \phi (\cos \phi \mathbf{I} + \operatorname{sen} \phi \mathbf{J}).$$

c.— La polar fija (base) viene definida por la ecuación del CIR (6.37), de forma paramétrica a través de ϕ (o t). Eliminando este parámetro se puede escribir la ecuación implícita:

$$Y = h + \frac{X^2}{h}.$$

Se trata de una parábola de eje vertical cuyo vértice está en C .

La polar móvil (ruleta) se define a través de las coordenadas del CIR en la referencia móvil (Axy):

$$x = \frac{h}{\operatorname{sen} \phi}; \quad y = \frac{x}{\operatorname{tg} \phi} = \frac{h}{\operatorname{sen} \phi \operatorname{tg} \phi}$$

En la figura 6.11 se dibujan las polares en varias configuraciones distintas del movimiento, pudiéndose observar el movimiento de rodadura sin deslizamiento de la polar móvil sobre la fija.

□

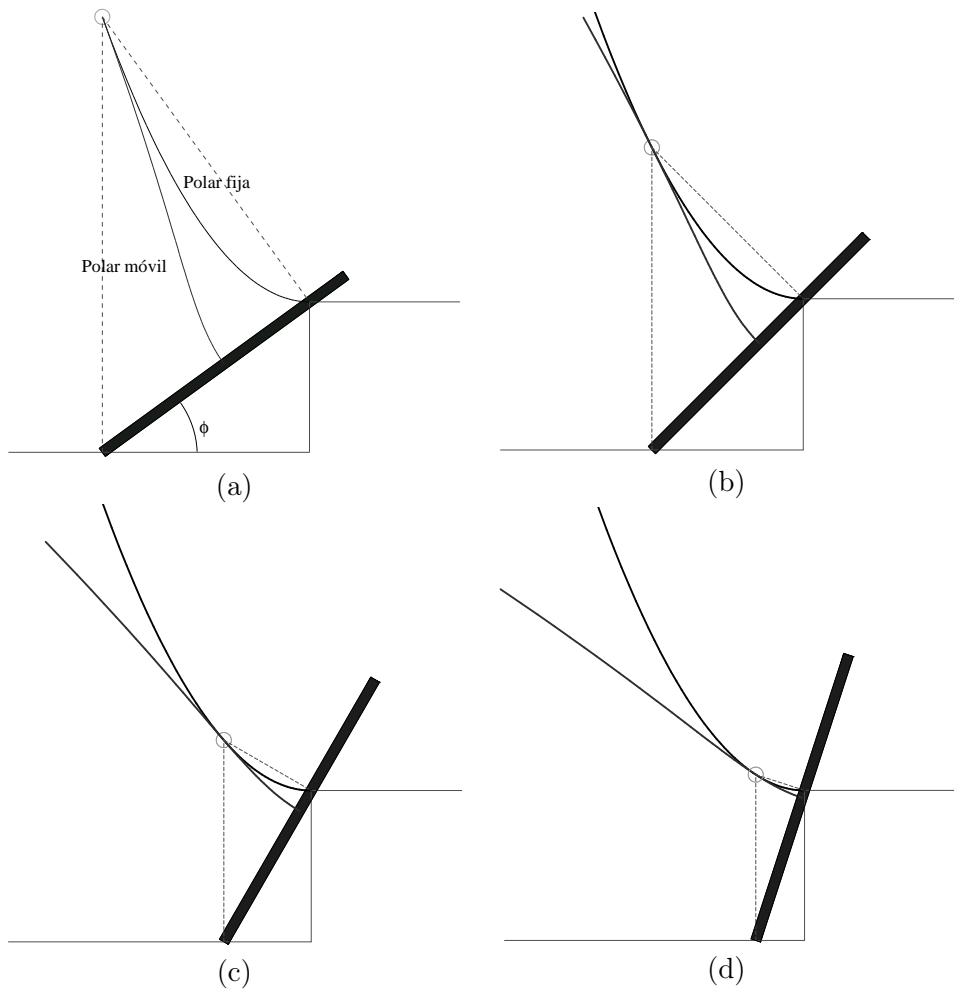


Figura 6.11: *Ejemplo 6.2*; configuración del sistema, CIR y dibujo de las polares fija y móvil en distintas posiciones (a) $\phi = \pi/5$ (b) $\phi = \pi/4$ (c) $\phi = \pi/3$ (d) $\phi = 2\pi/5$

6.2. Composición de movimientos

6.2.1. Composición de movimientos infinitesimales

El campo de velocidades del sólido es equivalente a la definición de los movimientos infinitesimales, como queda expresado en la ecuación (6.20). Supongamos que se efectúan dos movimientos sucesivos de un sólido \mathcal{B} , el primero caracterizado por la velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}_1$ y el segundo por $\boldsymbol{\Omega}_2$. Las rotaciones infinitesimales serán respectivamente $d\boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\Omega}_1 dt$ y $d\boldsymbol{\theta}_2 = \boldsymbol{\Omega}_2 dt$. El desplazamiento infinitesimal relativo a O para el primer movimiento será

$$d\rho_1 = d\mathbf{r} - (d\mathbf{r}_O)_1 = d\boldsymbol{\theta}_1 \wedge \boldsymbol{\rho}. \quad (6.38)$$

El desplazamiento debido al segundo movimiento es

$$d\rho_2 = d\boldsymbol{\theta}_2 \wedge \boldsymbol{\rho}_1 = d\boldsymbol{\theta}_2 \wedge (\boldsymbol{\rho} + d\rho_1) \approx d\boldsymbol{\theta}_2 \wedge \boldsymbol{\rho}, \quad (6.39)$$

donde se han despreciado los infinitésimos de segundo orden. Sumando los dos desplazamientos (6.38) y (6.39),

$$d\rho = d\rho_1 + d\rho_2 = (d\boldsymbol{\theta}_2 + d\boldsymbol{\theta}_1) \wedge \boldsymbol{\rho}. \quad (6.40)$$

En definitiva, el movimiento relativo a O , que corresponde a las rotaciones infinitesimales, se obtiene como la suma vectorial de dichos vectores de rotación. Esto es equivalente a considerar una velocidad de rotación resultante como suma de las dos velocidades:

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_1 + \boldsymbol{\Omega}_2. \quad (6.41)$$

Respecto a las traslaciones de ambos movimientos es obvio que se verifica también la suma,

$$d\mathbf{r}_O = (d\mathbf{r}_O)_1 + (d\mathbf{r}_O)_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_O = (\mathbf{v}_O)_1 + (\mathbf{v}_O)_2. \quad (6.42)$$

Un corolario importante de este resultado es, puesto que la suma de vectores es conmutativa, que la composición de velocidades hereda dicha propiedad, es indiferente el orden en el que se consideran los movimientos individuales.

6.2.2. Composición del movimiento de 2 sistemas

A continuación realizaremos la interpretación de la composición de movimientos a partir de las propiedades de los campos de momentos o sistemas de vectores deslizantes (SVD) correspondientes. Comenzaremos por el caso

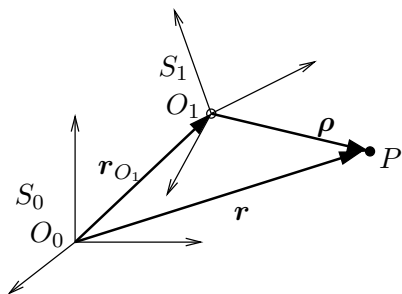


Figura 6.12: *Composición de movimientos entre dos sistemas S_0 y S_1 .*

elemental de la composición de movimientos relativos a dos sistemas. Supongamos uno S_0 «fijo» y otro S_1 «móvil» (figura 6.12). Según la expresión del campo de velocidades en el movimiento relativo (1.26) las velocidades son:

$$\underbrace{\mathbf{v}_{\text{abs}}}_{\mathbf{v}_{S_0}} = \underbrace{\mathbf{v}_{O_1} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}}_{\mathbf{v}_{\text{arr}}} + \underbrace{\mathbf{v}_{\text{rel}}}_{\mathbf{v}_{S_1}};$$

donde se han tomado las magnitudes \mathbf{v}_{S_1} como relativas, y \mathbf{v}_{S_0} como absolutas. Así, para obtener las velocidades respecto a S_0 basta con sumar a la velocidad respecto a S_1 el término de arrastre correspondiente al movimiento del punto como sólido rígido.

6.2.3. Composición del movimiento de n sistemas

Supongamos ahora el caso general de composición de n movimientos, en el que el movimiento esté definido respecto de un sistema S_n , el de éste a su vez respecto de otro S_{n-1} , y así sucesivamente hasta llegar a S_0 . Interesa conocer el movimiento absoluto (respecto de S_0), resultante de esta composición de n movimientos.

El campo de velocidades de S_n respecto a S_{n-1} es un campo de momentos:

$$\mathbf{v}_{n|n-1} = \mathbf{v}_{O_n} + \boldsymbol{\Omega}_n \wedge \boldsymbol{\rho}_n,$$

siendo \mathbf{v}_{O_n} la velocidad del origen O_n de S_n , relativa a S_{n-1} , y $\boldsymbol{\Omega}_n$ la velocidad de rotación de S_n relativa a S_{n-1} .

Para obtener el movimiento respecto a S_{n-2} basta considerar la expresión anterior de $\mathbf{v}_{n|n-1}$ como velocidad relativa respecto a S_{n-1} , y sumarle el término de arrastre correspondiente al movimiento de S_{n-1} respecto a S_{n-2} :

$$\mathbf{v}_{n|n-2} = \underbrace{\mathbf{v}_{O_{n-1}} + \boldsymbol{\Omega}_{n-1} \wedge \boldsymbol{\rho}_{n-1}}_{\mathbf{v}_{\text{arr}} = \mathbf{v}_{n-1|n-2}} + \underbrace{\mathbf{v}_{O_n} + \boldsymbol{\Omega}_n \wedge \boldsymbol{\rho}_n}_{\mathbf{v}_{\text{rel}} = \mathbf{v}_{n|n-1}},$$

A continuación se repite la operación, considerando $\mathbf{v}_{n|n-2}$ como velocidad relativa, y así consecutivamente hasta llegar a S_0 .

Se puede interpretar esta composición considerando cada campo de velocidades relativo como el campo de momentos de un sistema de vectores deslizantes (SVD). La velocidad absoluta, composición de los diversos movimientos relativos, es el resultado de la suma de los campos de momentos. Esta suma es igual al campo de momentos del sistema suma, composición de todos los campos de momentos. La composición de SVD se realiza sumando las resultantes ($\mathbf{\Omega} = \sum_{i=1}^n \mathbf{\Omega}_i$) y los momentos en un punto O dado ($\mathbf{v}_O = \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_O)_{i|i-1}$). Por lo tanto, realizando la suma de los SVD relativos tendremos caracterizado el SVD que corresponde al movimiento absoluto composición de los mismos.

El campo de aceleraciones (1.29) en un movimiento relativo no se puede interpretar como la suma de un campo de momentos. Por tanto no se puede aplicar el método de composición de SVD. Para calcular las aceleraciones es necesario ir componiendo uno a uno los movimientos relativos, calculando para cada composición los términos de aceleración relativa y Coriolis correspondientes.

EJEMPLO 6.3: Composición de *dos traslaciones*.

Solución. Cada traslación como SVD se reduce a un par (momento $\mathbf{v}_O \neq \mathbf{0}$, resultante $\mathbf{\Omega} = \mathbf{0}$). La suma los dos SVD se reduce a otro par, suma vectorial de los dos; por lo tanto, el movimiento compuesto es otra traslación, de velocidad la suma $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. \square

EJEMPLO 6.4: Composición de *dos rotaciones de ejes concurrentes*.

Solución. Son dos sistemas con resultante no nula ($\mathbf{\Omega} \neq \mathbf{0}$) y momento nulo en el eje ($\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$ para $O \in$ eje). La suma es otra rotación pura, de resultante $\mathbf{\Omega}_1 + \mathbf{\Omega}_2$, aplicada en el punto de intersección de los ejes de rotación. \square

EJEMPLO 6.5: Composición de *dos rotaciones de ejes paralelos*.

Solución. Se puede interpretar como un caso particular de ejes concurrentes que se cortan en un punto impropio. El resultado es otra rotación, de eje paralelo y coplanario a los anteriores, situado a la distancia adecuada (se calcula ésta de forma que el momento \mathbf{v} en un punto sea igual y de signo contrario para cada una de las rotaciones componentes). En el caso degenerado en que ambas rotaciones sean iguales y de distinto signo, el resultado es una traslación pura, con velocidad igual al producto de la velocidad de rotación por la distancia entre los ejes. \square

EJEMPLO 6.6: Composición de *dos rotaciones de ejes no concurrentes ni paralelos*.

Solución. El resultado es un sistema general (traslación más rotación), por lo que la interpretación como SVD no ofrece ventaja especial. \square

EJEMPLO 6.7: Interpretación del movimiento de la tierra (figura 6.13).

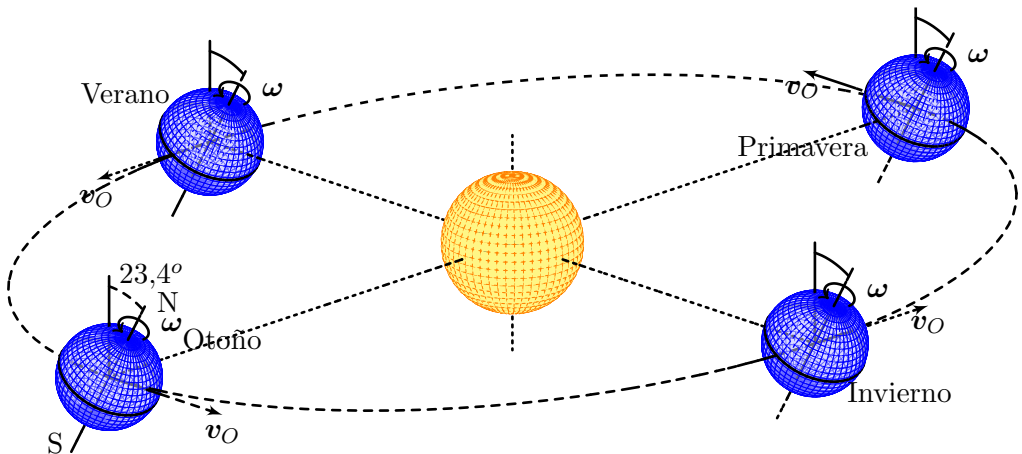


Figura 6.13: *Movimiento de la tierra: composición de traslación y rotación.*

Solución. Se trata de un caso particular interesante, que se puede interpretar como resultado de la composición de dos movimientos elementales:

- Traslación* de la Tierra alrededor del Sol, con órbita elíptica (aproximadamente circular)¹⁰, a la distancia media de 149 millones de kilómetros. El período orbital es de 365,2564 días. La trayectoria de esta órbita forma un plano denominado «*eclíptica*».
- Rotación* ω de la Tierra en torno a su eje Norte-Sur, que mantiene su dirección aproximadamente invariante, con una inclinación aproximada de $23,4^\circ$ respecto de la normal al plano de la eclíptica. La rotación

¹⁰ No debe confundirse una traslación circular o elíptica con una rotación; en la traslación todos los puntos del sólido tienen igual velocidad en un instante dado, aunque esta velocidad del conjunto varíe con el tiempo, describiendo así trayectorias curvas para cada punto.

propia de este movimiento es la rotación sidérea, que tiene un período (día sidéreo) algo menor a 1 día solar¹¹.

Por consiguiente, el movimiento de la Tierra es un movimiento helicoidal tangente general con deslizamiento, no equivale a una rotación instantánea salvo en dos puntos singulares de la órbita: los solsticios de verano e invierno, en los que se cumple $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_O = 0$.

En la realidad, el movimiento de la tierra tiene algunas perturbaciones adicionales sobre el sencillo esquema delineado arriba, como por ejemplo, las pequeñas oscilaciones de la dirección del eje de la Tierra, o el fenómeno de precesión de los equinoccios. Este último consiste en una lenta variación de la orientación del eje de rotación de la tierra, precesionando alrededor de la perpendicular al eje de la eclíptica, de periodo 26.000 años (ver el apartado 8.4 para una discusión de éste fenómeno desde el punto de vista de la dinámica). \square

6.2.4. Movimiento de sólidos tangentes

Consideremos dos sólidos, S_1 (fijo) y S_2 (móvil) que permanecen tangentes durante el movimiento. A lo largo del mismo, el punto de tangencia A define sendas curvas en cada uno de los dos sólidos, que denominamos C_1 y C_2 (figura 6.14). Es posible imaginar intuitivamente estas curvas como dibujadas por una partícula entintada, que se sitúa constantemente en el punto A , y que va manchando los dos sólidos. Expresando la velocidad de sucesión del punto geométrico A en cada sistema:

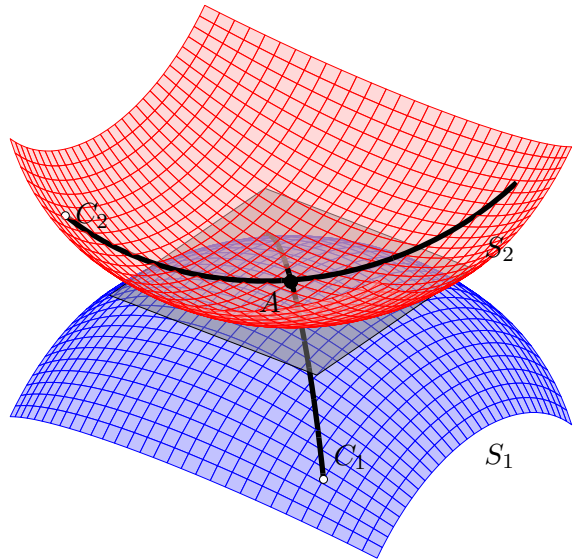
$$\mathbf{v}_{\text{abs}} = \mathbf{v}_{\text{arr}} + \mathbf{v}_{\text{rel}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_{A|1} = \mathbf{v}_{\text{arr}} + \mathbf{v}_{A|2} \quad (6.43)$$

$\mathbf{v}_{A|1}$ es tangente a C_1 , y $\mathbf{v}_{A|2}$ lo es a C_2 . A su vez, ambas velocidades pertenecen al plano tangente común. Por lo tanto, $\mathbf{v}_{\text{arr}} = \mathbf{v}_{A|1} - \mathbf{v}_{A|2}$ (velocidad del punto del sólido S_2 que coincide con A en un instante dado) ha de ser tangente a ambos sólidos. Esta velocidad se llama *velocidad de deslizamiento*: $\mathbf{v}_d \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{v}_{A|1} - \mathbf{v}_{A|2}$.

El movimiento (relativo) en el punto de contacto se puede reducir entonces a una velocidad de deslizamiento \mathbf{v}_d y una rotación de velocidad instantánea $\boldsymbol{\Omega}$, cuyo eje pasa por el punto de tangencia.

¹¹ Para volver a estar enfrentado con el sol, un punto de la superficie de la tierra tiene que girar algo más que 360° , ya que durante ese tiempo la tierra se ha trasladado algo en su órbita alrededor del sol; por tanto, 1 día solar (86 400 s.) equivale a un giro algo mayor a los 360° del día sidéreo (86 164 s.).

Figura 6.14: *Huella dejada por el punto de contacto A sobre los sólidos tangentes S_1 y S_2 .*



En un caso general, $\boldsymbol{\Omega}$ tendrá una proyección sobre el plano tangente, llamada velocidad de rodadura $\boldsymbol{\Omega}_r$, y otra normal al mismo, llamada velocidad de pivotamiento $\boldsymbol{\Omega}_p$ (figura 6.15). Denominando \boldsymbol{N} a la normal común en el punto de tangencia,

$$\boldsymbol{\Omega}_p \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{N})\boldsymbol{N}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_r \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_p$$

Cuando la velocidad relativa en el punto de contacto es nula ($\boldsymbol{v}_d = \mathbf{0}$) no hay deslizamiento entre ambos sólidos. Se dice entonces que un sólido

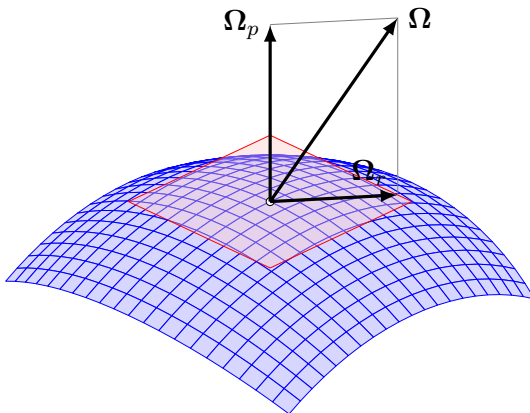


Figura 6.15: *Componentes de rodadura y pivotamiento de la velocidad de rotación, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_p + \boldsymbol{\Omega}_r$.*

«rueda sin deslizar» sobre el otro. Este término no implica, por lo general, que la rodadura se efectúe sin pivotamiento, sino tan sólo la ausencia de deslizamiento.

EJEMPLO 6.8: Un cilindro recto de radio r se mueve manteniéndose tangente a un cono fijo, de radio de la base r y semiángulo α , de forma que compartan en todo momento una generatriz. Una base del cilindro rueda con velocidad uniforme sin deslizar sobre la base del cono, de forma que realiza una revolución completa alrededor del eje del cono en un tiempo τ . La otra base del cilindro se mantiene en contacto con el vértice del cono. Obtener las expresiones de:

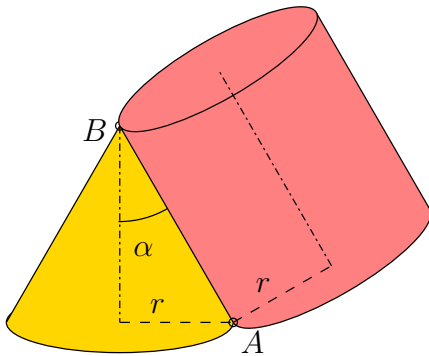


Figura 6.16: Ejemplo 6.8; sección del cono y cilindro por el plano meridional.

- velocidad de rotación del cilindro, calculando la componente de pivotamiento;
- axoides del movimiento y aceleración angular del cilindro;
- aceleración del punto A de la base del cilindro en contacto con la base del cono.

(Examen parcial, 3/2/1995)

Solución.

a.— En la figura se muestra una sección por el plano meridional, que contiene a los ejes del cono (BC) y del cilindro (QM), así como a la generatriz común AB . El punto A de contacto entre las bases tiene velocidad nula, debido a la condición de rodadura. Asimismo, el punto O de corte del eje del cilindro con el eje del cono es un punto fijo del movimiento. Por lo tanto, el movimiento instantáneo es una rodadura alrededor del eje OA . A su vez, en los sucesivos instantes del movimiento, el plano meridional de

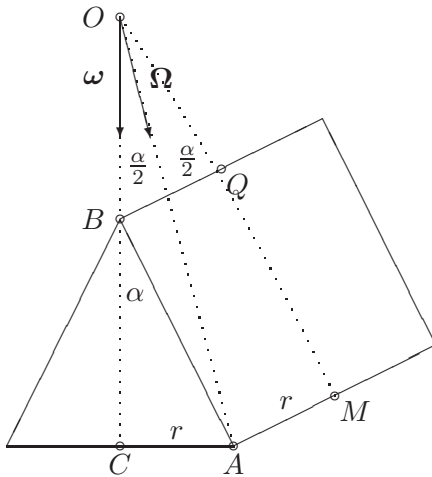


Figura 6.17: Ejemplo 6.8; eje instantáneo de rotación y descomposición del vector Ω

la figura va girando alrededor del eje OC . En consecuencia, a lo largo del movimiento el eje instantáneo OA define un cono de eje OC .

En la figura observamos que el ángulo $\widehat{COM} = \alpha$. Asimismo, los triángulos rectángulos AOC y AOM son iguales por compartir hipotenusa y tener un cateto igual (r), por lo que los ángulos $\widehat{AOC} = \widehat{AOM} = \alpha/2$ son iguales.

El punto Q del eje del cilindro desarrolla un movimiento circular, alrededor del eje OC . Su velocidad es

$$v_Q = \frac{2\pi}{\tau} r \cos \alpha;$$

por otra parte, interpretando el movimiento como rotación de velocidad Ω alrededor del eje OA

$$v_Q = \Omega \cdot \overline{OQ} \sin \frac{\alpha}{2} = \Omega r \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \sin \frac{\alpha}{2}$$

Igualando ambas expresiones, y en función del versor $\mathbf{u} = \mathbf{r}_{OA}/|\mathbf{r}_{OA}|$, se obtiene

$$\Omega = \frac{4\pi}{\tau} \cos \frac{\alpha}{2} \mathbf{u}.$$

La componente de pivotamiento es la proyección sobre la normal a AB :

$$\Omega_p = \Omega \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \Omega_p = \frac{2\pi}{\tau} \sin \alpha.$$

b.— En el movimiento, el eje OA gira alrededor del eje OC con velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = (2\pi/\tau)\mathbf{k}$, siendo $\mathbf{k} = \mathbf{r}_{OC}/|\mathbf{r}_{OC}|$. Por tanto los axoides son:

Axoides fijo: cono de eje OC , vértice O , semiángulo $\alpha/2$.

Axoides móvil: cono de eje OM , vértice O , semiángulo $\alpha/2$.

La aceleración angular, al ser constante el módulo de $\boldsymbol{\Omega}$, proviene de la rotación $\boldsymbol{\omega}$:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} = \frac{4\pi^2}{\tau^2} \operatorname{sen} \alpha \mathbf{j}.$$

siendo \mathbf{j} el versor normal al plano de la figura.

c.— Para obtener la aceleración de A se aplica la expresión general

$$\mathbf{a}_A = \underbrace{\mathbf{a}_O}_{=0} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{r}_{OA} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\underbrace{\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}_{OA}}_{=0})$$

obteniéndose

$$\mathbf{a}_A = \frac{4\pi^2}{\tau^2} r \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \mathbf{v} = \frac{8\pi^2}{\tau^2} r \cos \frac{\alpha}{2} \mathbf{v}.$$

siendo \mathbf{v} el versor perpendicular a OA dentro del plano de la figura. \square

6.3. Rotación finita del sólido

6.3.1. Composición de rotaciones finitas

Como se ha visto antes (sección 6.2.1) la composición de rotaciones infinitesimales es conmutativa, el resultado es independiente del orden en que se produzcan dichas rotaciones. Este resultado es relevante para la expresión del campo de velocidades a partir de la velocidad de rotación.

Al contrario que para las rotaciones infinitesimales, *la composición de rotaciones finitas no es una operación conmutativa*. Esto se puede comprobar fácilmente mediante un ejemplo significativo, aplicando sucesivamente a un sólido dos rotaciones finitas elementales según ejes distintos, en diferente orden (figura 6.18). Esta falta de conmutatividad se debe a que, como se verá a continuación, las rotaciones finitas se caracterizan como un tensor de rotación. De forma equivalente, en componentes sería el producto de la matriz de componentes del tensor por el vector posición. La composición de rotaciones equivale pues al producto de tensores (o de matrices en componentes), operación que no es conmutativa.

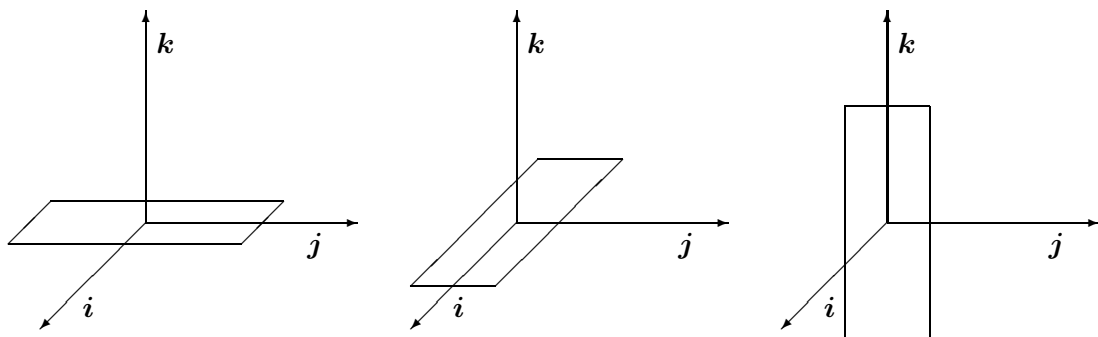
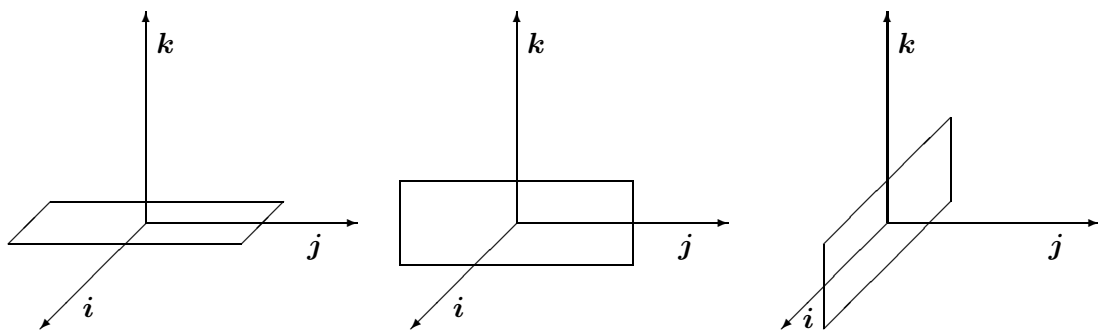
a) rotación $\frac{\pi}{2}\mathbf{k}$ seguida de $\frac{\pi}{2}\mathbf{j}$.b) rotación $\frac{\pi}{2}\mathbf{j}$ seguida de $\frac{\pi}{2}\mathbf{k}$.

Figura 6.18: *Las rotaciones finitas no son conmutativas: en el caso a) se realiza primero la rotación $(\pi/2)\mathbf{k}$ seguida de $(\pi/2)\mathbf{j}$; en el caso b) $(\pi/2)\mathbf{j}$ seguida de $(\pi/2)\mathbf{k}$, siendo el resultado claramente diferente.*

6.3.2. La Rotación finita como cambio de base

Comenzaremos por desarrollar una interpretación matricial de la rotación finita a través del cambio de base asociado. Sea $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ una base ortonormal ligada al sólido (*triedro del cuerpo*) y $(O; \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ una base ortonormal fija (*triedro fijo*). Se puede interpretar la rotación del sólido a partir del cambio de base entre ambos triedros. Supongamos este cambio definido

por una matriz $[\mathbf{R}]$, de forma que¹²:

$$(i\ j\ k) = (I\ J\ K) [\mathbf{R}]. \tag{6.44}$$

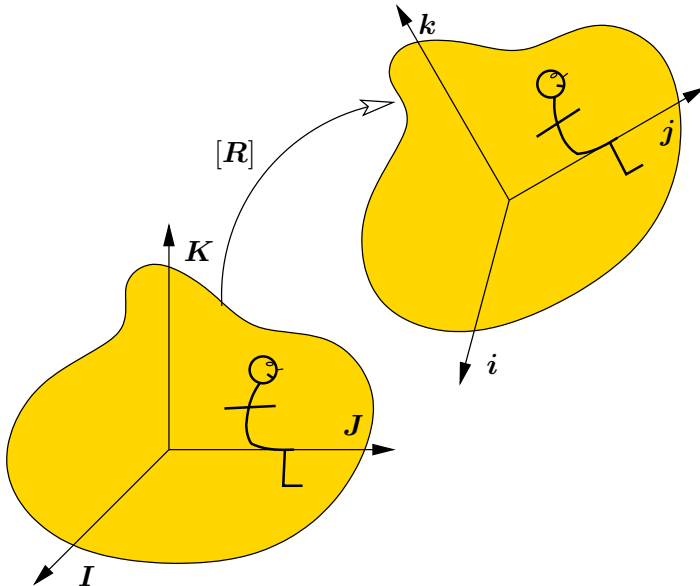


Figura 6.19: La rotación finita equivale a un cambio de base definido por la matriz $[\mathbf{R}]$, que permita pasar del triedro fijo $(I\ J\ K)$ al triedro del cuerpo $(i\ j\ k)$

La relación de cambio de coordenadas asociada, denominando (X, Y, Z) a las coordenadas en el triedro fijo y (x, y, z) las del triedro del cuerpo, es

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = [\mathbf{R}] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}. \tag{6.45}$$

La rotación del sólido puede por tanto interpretarse como un cambio de base, definido por la matriz $[\mathbf{R}]$, que multiplica al vector columna de coordenadas «convectivas» $(x\ y\ z)^T$ para obtener las nuevas coordenadas $(X\ Y\ Z)^T$. En esta interpretación, se trataría de distintas coordenadas (según dos triedros diferentes) para un mismo vector.

La superposición de dos rotaciones sucesivas, asociadas a dos matrices $[\mathbf{R}_1]$ y $[\mathbf{R}_2]$, equivale al producto de las mismas¹³, $[\mathbf{R}_2][\mathbf{R}_1]$. Como se sa-

¹² Recordemos que, según A.5, otra manera de definir el cambio de base es mediante las siguientes expresiones de transformación de los vectores de la misma: $i = \mathbf{R} \cdot I$; $j = \mathbf{R} \cdot J$; $k = \mathbf{R} \cdot K$, donde el tensor \mathbf{R} es aquel cuya matriz de coordenadas en la base (I, J, K) es precisamente $[\mathbf{R}]$, la misma matriz de la expresión (6.44).

¹³En efecto, si $\{x^1\} = [\mathbf{R}_1]\{x^0\}$, $\{x^2\} = [\mathbf{R}_2]\{x^1\} = [\mathbf{R}_2][\mathbf{R}_1]\{x^0\}$

be, el producto de matrices *no es una operación conmutativa*: $[\mathbf{R}_1][\mathbf{R}_2] \neq [\mathbf{R}_2][\mathbf{R}_1]$.

La condición de que ambos triedros sean ortonormales obliga a que la matriz de cambio sea ortogonal, $[\mathbf{R}]^T = [\mathbf{R}]^{-1}$ (cf. apéndice A). La matriz $[\mathbf{R}]$ es de dimensión 3×3 y tiene por tanto 9 componentes, pero la propiedad de ortogonalidad impone 6 condiciones escalares:

$$\sum_{k=1}^3 R_{ik} R_{jk} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3; i \leq j), \quad (6.46)$$

por lo que el conjunto de componentes de dicha matriz se podrá por tanto representar mediante $9 - 6 = 3$ parámetros independientes. De esta manera, la orientación del triedro del cuerpo $(i j k)$ queda definida por tres grados de libertad. Estos caracterizan el cambio del triedro fijo $(I J K)$ al triedro del cuerpo $(i j k)$, que se mueve con el sólido y define por tanto su orientación.

6.3.3. La Rotación finita como transformación ortogonal

El movimiento más general de un sólido rígido con un punto fijo se representa mediante una transformación lineal \mathbf{R} , es decir, un tensor de orden dos (cf. apéndice A). Veremos además que este tensor es ortogonal propio.

Sea \mathbf{x}° el vector posición de una partícula del sólido, medido desde el punto fijo O , en un instante inicial que tomaremos como *configuración de referencia*. Este vector \mathbf{x}° se denomina *convectivo*, siendo constante a lo largo del movimiento para una partícula dada del sólido (representa el vector posición en la configuración de referencia). De forma equivalente, \mathbf{x}° puede considerarse como el vector posición medido por un observador móvil con el sólido, para el que la situación de los puntos materiales del sólido es fija.

Por otra parte, sea \mathbf{x} el vector posición de un punto del sólido, para un observador fijo o inercial, en un instante genérico del movimiento, que denominaremos *configuración rotada*. La relación con el vector posición convectivo \mathbf{x}° se establece mediante un tensor¹⁴ \mathbf{R} :

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}^\circ \quad \Rightarrow \quad x_i = R_{ij} x_j^\circ. \quad (6.47)$$

¹⁴Puede demostrarse que esta transformación es necesariamente lineal, teniendo en cuenta en primer lugar la conservación de las distancias relativas entre \mathbf{x} y su producto por un escalar $\alpha\mathbf{x}$, que conduce a $\mathbf{R}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{R}(\mathbf{x})$; por otra parte, la conservación de los ángulos entre \mathbf{x}_1 y $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$ conduce a $\mathbf{R}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{R}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{R}(\mathbf{x}_2)$, por lo que se puede identificar con un tensor.

Es fácil comprobar porqué esta transformación debe ser ortogonal: al tratarse de un sólido rígido, la distancia al punto fijo tiene que coincidir en ambas configuraciones, la inicial y la rotada; desarrollando esta condición,

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} &= (\mathbf{x}^\circ \cdot \mathbf{R}^\text{T}) \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{x}^\circ) = \mathbf{x}^\circ \cdot ((\mathbf{R}^\text{T} \cdot \mathbf{R}) \cdot \mathbf{x}^\circ) \\ &= \mathbf{x}^\circ \cdot \mathbf{x}^\circ.\end{aligned}$$

Se deduce por tanto que el tensor \mathbf{R} debe cumplir la condición de ortogonalidad (cf. apéndice A):

$$\mathbf{R}^\text{T} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^\text{T}. \quad (6.48)$$

Tomando determinantes en la expresión anterior,

$$\det(\mathbf{R}^\text{T}) \det(\mathbf{R}) = (\det(\mathbf{R}))^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{R}) = \pm 1. \quad (6.49)$$

De las dos posibilidades que se ofrecen para el signo del determinante, debe tomarse $+1$, lo que corresponde a una *transformación ortogonal propia*. Las transformaciones ortogonales cuyo determinante vale -1 se denominan impropias, y producen, además de una rotación, una inversión en los ejes equivalente a la imagen reflejada en un espejo, lo que conllevaría inversión de los volúmenes.

Resumiendo lo expuesto en este apartado y el anterior (6.3.2), es posible interpretar la rotación \mathbf{R} desde dos puntos de vista distintos:

1. *Rotación activa*: El tensor \mathbf{R} transforma el vector \mathbf{x}° en otro vector distinto $\mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}^\circ$.
2. *Rotación pasiva*: El tensor \mathbf{R} , o su matriz de coordenadas asociada $[\mathbf{R}] = [R_{ij}]$, define un cambio de base, del triedro fijo $(\mathbf{E}_i) \equiv (\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ al triedro del cuerpo $(\mathbf{e}_i) \equiv (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, según las relaciones de cambio (6.44): $\mathbf{e}_i = \mathbf{R} \cdot \mathbf{E}_i = R_{ji} \mathbf{E}_j$. Denominando $\{\mathbf{x}\}^\circ = (xyz)^\text{T}$ a las coordenadas del vector posición de un punto en el triedro del cuerpo y $\{\mathbf{x}\} = (XYZ)^\text{T}$ a las del triedro fijo, la relación entre éstas debe ser (6.45): $\{\mathbf{x}\} = [\mathbf{R}]\{\mathbf{x}\}^\circ$.

Nótese que en la acepción como rotación pasiva, se consideran distintas coordenadas (es decir, en dos bases distintas) para un mismo vector: el sólido permanece mientras es el triedro de referencia el que rota. Por el contrario, la interpretación activa de la rotación considera dos vectores distintos: es el propio sólido el que rota.

La interpretación según uno u otro punto de vista es equivalente en cuanto a las expresiones en coordenadas, pudiendo adoptarse la que más

convenga en cada caso. En lo que sigue consideraremos en principio la interpretación *activa*.

Por último, añadamos que una forma explícita de obtener el tensor de rotación, a partir de los vectores unitarios de los triedros fijo y rotado, es mediante el producto tensorial o diádico de los vectores de los triedros (ver apéndice A):

$$\mathbf{R} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{E}_k \otimes \mathbf{e}_k = \mathbf{I} \otimes \mathbf{i} + \mathbf{J} \otimes \mathbf{j} + \mathbf{K} \otimes \mathbf{k}. \quad (6.50)$$

6.3.4. Ángulos de Euler

Como se ha dicho (sección 6.3.2), el movimiento de rotación de un sólido tiene tres grados de libertad, revistiendo especial interés la definición de unos parámetros adecuados que los caractericen. Hay diversas opciones para ello, unas basadas en la elección de tres parámetros libres, otras basadas en un conjunto mayor de parámetros pero sujetos a restricciones. Un ejemplo de esta última opción son los *cuaternios* formados por los parámetros de Euler. En este curso emplearemos por el contrario la opción más directa de elegir tres parámetros, que serán los denominados *ángulos de Euler*.

Definiremos los ángulos de Euler a partir de tres rotaciones elementales, que interpretaremos como sucesivos cambios de base (apartado 6.3.2), partiendo del triedro fijo $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$, hasta obtener el triedro del cuerpo $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Estos cambios son rotaciones del triedro efectuadas por orden según el esquema «313»: primer giro respecto del eje 3, seguido de un giro respecto del eje transformado 1, y por último un nuevo giro alrededor del nuevo eje 3.

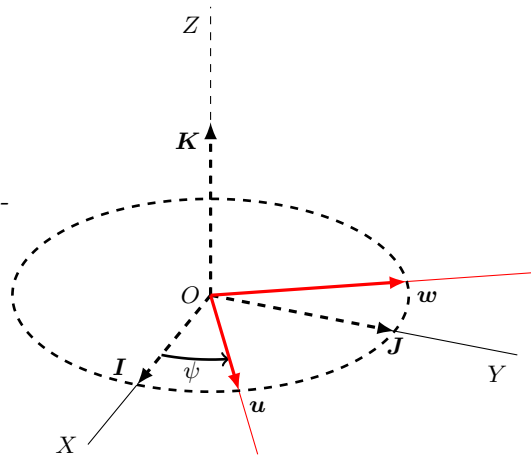
Precesión, $\psi\mathbf{K}$.— En primer lugar se efectúa un giro de ángulo ψ en torno al eje \mathbf{K} , pasando del triedro $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ al triedro $(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{K})$. Refiriéndose a la figura 6.20, las expresiones de los vectores del nuevo triedro son:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{I} \cos \psi + \mathbf{J} \operatorname{sen} \psi, \\ \mathbf{w} &= -\mathbf{I} \operatorname{sen} \psi + \mathbf{J} \cos \psi. \end{aligned}$$

La expresión matricial equivalente es

$$(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{K}) = (\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}) \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \psi & -\operatorname{sen} \psi & 0 \\ \operatorname{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{[\mathbf{R}_\psi]}.$$

Figura 6.20: rotación $\psi \mathbf{K}$ (precesión)



La matriz de rotación inversa es:

$$[\mathbf{R}_\psi]^{-1} = [\mathbf{R}_\psi]^T = \begin{pmatrix} \cos \psi & \text{sen } \psi & 0 \\ -\text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

equivalente a un giro de $(-\psi)$ alrededor de \mathbf{K} .

Nutación, $\theta \mathbf{u}$.— Se define como un giro de ángulo θ en torno al nuevo eje \mathbf{u} , obteniendo a partir del triedro $(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{K})$ el llamado *triedro intermedio*, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k})$. La operación queda ilustrada en la figura 6.21, siendo la expresión matricial del cambio:

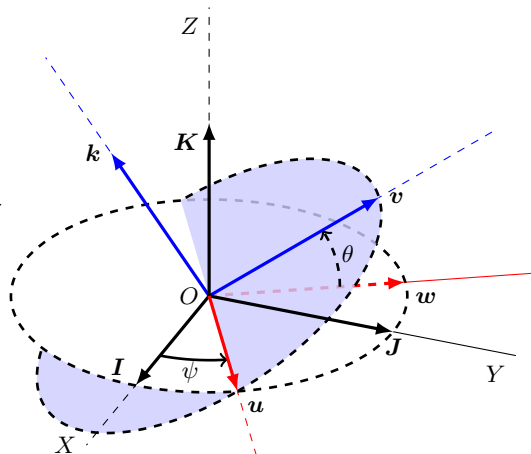
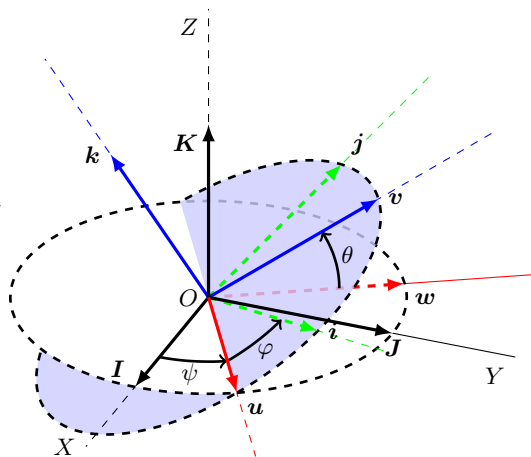


Figura 6.21: rotación $\theta \mathbf{u}$ (nutación)

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{K}) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ 0 & \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}}_{[\mathbf{R}_\theta]}.$$

Rotación propia, $\varphi\mathbf{k}$.— La última operación consiste en un giro de ángulo φ alrededor del eje \mathbf{k} , obteniendo finalmente a partir del triedro intermedio $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k})$ el *triedro del cuerpo* $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ (figura 6.22). La expresión

Figura 6.22: *rotación $\varphi\mathbf{k}$ (rotación propia)*



matricial es:

$$(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi & 0 \\ \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{[\mathbf{R}_\varphi]}.$$

La rotación total hasta obtener finalmente el triedro del cuerpo será la composición ordenada de las tres rotaciones consecutivas:

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{K}) &= (\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}) \cdot [\mathbf{R}_\psi] \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}) &= (\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{K}) \cdot [\mathbf{R}_\theta] \\ (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) &= (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}) \cdot [\mathbf{R}_\varphi] \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = (\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}) \cdot [\mathbf{R}_\psi] \cdot [\mathbf{R}_\theta] \cdot [\mathbf{R}_\varphi],$$

por tanto la matriz de rotación total es¹⁵

$$[\mathbf{R}] = [\mathbf{R}_\psi] \cdot [\mathbf{R}_\theta] \cdot [\mathbf{R}_\varphi].$$

¹⁵ La interpretación de esta rotación como transformación *activa* indica que sobre el

Su expresión en función de los ángulos de Euler resulta

$$[\mathbf{R}] = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi; & -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi; & \sin \psi \sin \theta \\ \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi; & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi; & -\cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi; & \sin \theta \cos \varphi; & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (6.51)$$

Dejamos como ejercicio sugerido al lector la comprobación de que se verifica la condición de ortogonalidad, $[\mathbf{R}]^{-1} = [\mathbf{R}]^T$.

De los triedros definidos anteriormente los más utilizados a efectos prácticos son el *triedro fijo* $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ y el *triedro del cuerpo* $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. A veces interesa también emplear también el denominado *triedro intermedio*, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k})$ cuya relación con el triedro fijo viene dada por

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}) = (\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}) \cdot [\mathbf{R}_\psi] \cdot [\mathbf{R}_\theta].$$

La matriz de transformación correspondiente al triedro intermedio es

$$[\mathbf{R}_{\text{int}}] = [\mathbf{R}_\psi] \cdot [\mathbf{R}_\theta] = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \\ \sin \psi & \cos \psi \cos \theta & -\cos \psi \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Para calcular las matrices inversas haremos uso en general de la condición de ortogonalidad, evaluando en su lugar las traspuestas:

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}_{\text{int}}]^{-1} &= ([\mathbf{R}_\psi] \cdot [\mathbf{R}_\theta])^T = [\mathbf{R}_\theta]^T \cdot [\mathbf{R}_\psi]^T; \\ [\mathbf{R}]^{-1} &= ([\mathbf{R}_\psi] \cdot [\mathbf{R}_\theta] \cdot [\mathbf{R}_\varphi])^T = [\mathbf{R}_\varphi]^T \cdot [\mathbf{R}_\theta]^T \cdot [\mathbf{R}_\psi]^T. \end{aligned}$$

Hacemos notar que una rotación general siempre se puede descomponer de esta manera, por lo que los ángulos de Euler (ψ, θ, φ) son una parametrización adecuada de las rotaciones.

Sin embargo, existen posiciones singulares en las que la representación mediante ángulos de Euler no es única. Por ejemplo, basta considerar los casos $\theta = 0$ ó $\theta = \pi$, correspondientes a rotaciones alrededor del eje (O, \mathbf{k}) , en los que la descomposición del giro entre ψ y φ no es unívoca.

sólido se efectúa primero \mathbf{R}_φ seguida de \mathbf{R}_θ y por último \mathbf{R}_ψ . Por el contrario para la interpretación *pasiva* como cambios del triedro o base sigue el orden inverso, en el que el primer cambio ha sido $[\mathbf{R}_\psi]$ seguido de $[\mathbf{R}_\theta]$ y de $[\mathbf{R}_\varphi]$.

6.3.5. Expresiones de la velocidad de rotación

Interesa expresar la velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}$ a través de sus expresiones en alguno de los triedros descritos en el apartado anterior, especialmente en el del sólido $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, intermedio $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k})$ o fijo $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$. Según la definición realizada de los ángulos de Euler en el apartado anterior, $\boldsymbol{\Omega}$ se puede descomponer según las tres direcciones correspondientes a éstos como¹⁶:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi} \mathbf{K} + \dot{\theta} \mathbf{u} + \dot{\varphi} \mathbf{k}. \quad (6.52)$$

Las componentes de esta expresión no están definidas según direcciones ortonormales, es decir $(\mathbf{K}, \mathbf{u}, \mathbf{k})$ no forman triedro, por lo que resulta conveniente desarrollarlas en alguno de los triedros definidos anteriormente. En cualquier caso debemos notar que las distintas expresiones de $\boldsymbol{\Omega}$ que se desarrollan a continuación se refieren siempre a la velocidad de rotación *total* o *absoluta* del sólido, no se trata en ningún caso de la velocidad de rotación relativa a uno u otro triedro.

Expresión de $\boldsymbol{\Omega}$ en el triedro del cuerpo

Denominamos (p, q, r) a las componentes de $\boldsymbol{\Omega}$ en este triedro:

$$\boldsymbol{\Omega} = p \mathbf{i} + q \mathbf{j} + r \mathbf{k}$$

Para obtenerlas desarrollamos \mathbf{K} y \mathbf{u} en la expresión (6.52). La expresión de \mathbf{K} se obtiene de

$$(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}) = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \cdot ([\mathbf{R}_\psi] \cdot [\mathbf{R}_\theta] \cdot [\mathbf{R}_\varphi])^{-1}$$

resultando

$$\mathbf{K} = \sin \theta \sin \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \cos \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}. \quad (6.53)$$

La expresión de \mathbf{u} se obtiene de

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}) = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \cdot [\mathbf{R}_\varphi]^{-1},$$

resultando

$$\mathbf{u} = \cos \varphi \mathbf{i} - \sin \varphi \mathbf{j}.$$

Se obtiene finalmente:

$$\begin{cases} p = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi, \\ q = -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi, \\ r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta. \end{cases} \quad (6.54)$$

¹⁶En esta expresión se ha tenido en cuenta que, al referirse la velocidad a rotaciones infinitesimales ($d\psi = \dot{\psi} dt, \dots$), éstas sí se pueden sumar vectorialmente al contrario de lo que ocurre para rotaciones finitas.

Expresión de Ω en el triedro intermedio

En este caso denotamos las componentes por (p', q', r') :

$$\Omega = p'\mathbf{u} + q'\mathbf{v} + r'\mathbf{k}.$$

Desarrollamos \mathbf{K} en la expresión (6.52) mediante

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{K}) \cdot [\mathbf{R}_\theta],$$

resultando¹⁷

$$\mathbf{K} = \text{sen } \theta \mathbf{v} + \text{cos } \theta \mathbf{k}.$$

Se obtiene así

$$\begin{cases} p' = \dot{\theta}, \\ q' = \dot{\psi} \text{sen } \theta, \\ r' = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \text{cos } \theta \quad [= r]. \end{cases} \quad (6.55)$$

La expresión anterior prodría haberse deducido también de particularizar (6.54) para $\varphi = 0$, ya que el triedro intermedio no es sino el triedro del cuerpo anulando la rotación propia, $\varphi \mathbf{k}$.

Expresión de Ω en el Triedro Fijo

Por último, si llamamos (P, Q, R) a las componentes en este triedro:

$$\Omega = P\mathbf{I} + Q\mathbf{J} + R\mathbf{K},$$

la expresión de las mismas resulta

$$\begin{cases} P = \dot{\varphi} \text{sen } \psi \text{sen } \theta + \dot{\theta} \text{cos } \psi, \\ Q = -\dot{\varphi} \text{cos } \psi \text{sen } \theta + \dot{\theta} \text{sen } \psi, \\ R = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \text{cos } \theta. \end{cases} \quad (6.56)$$

La comprobación de estas expresiones queda propuesta como ejercicio al lector.

¹⁷ También puede obtenerse este resultado mediante proyección directa en la figura 6.21

Expresión de la velocidad de rotación a partir de la matriz de rotación \mathbf{R}

Podemos derivar la transformación de rotación (6.47), en función del vector material o convectivo \mathbf{x}° que como sabemos es constante:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}^\circ \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{x}^\circ \quad (6.57)$$

y teniendo en cuenta la relación inversa $\mathbf{x}^\circ = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{x}$,

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{x}. \quad (6.58)$$

Se puede comprobar fácilmente¹⁸ que la expresión $\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T$ define un tensor hemisimétrico, por lo que definiremos

$$\widehat{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T. \quad (6.59)$$

Esta ecuación servirá para obtener las componentes de $\boldsymbol{\Omega}$, teniendo en cuenta su equivalencia con el operador hemisimétrico (6.9):

$$[\widehat{\boldsymbol{\Omega}}] = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} = [\dot{\mathbf{R}}] \cdot [\mathbf{R}]^T. \quad (6.60)$$

En esta expresión, los términos $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ indican las componentes en el triedro que se escoja, equivaliendo a (p, q, r) en el triedro del cuerpo, (p', q', r') en el intermedio o (P, Q, R) si se emplea el fijo. Particularizando en los distintos triedros puede comprobarse la equivalencia con las expresiones de las componentes de $\boldsymbol{\Omega}$ obtenidas anteriormente por métodos vectoriales (respectivamente (6.54), (6.55) y (6.56)).

¹⁸Basta para ello derivar la expresión $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = 1$, obteniendo $\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}^T = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T + (\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T)^T = 0$