

Capítulo 5

Oscilaciones lineales con varios grados de libertad

Índice

5.1. Ecuaciones del movimiento	5.2
5.1.1. Ecuaciones acopladas en sistemas lineales	5.2
5.1.2. Linealización de las ecuaciones	5.4
5.1.3. Formulación matricial	5.7
5.2. Oscilaciones libres	5.10
5.2.1. Oscilaciones sin amortiguamiento; problema de autovalores	5.10
5.2.2. Frecuencias propias y modos normales de vibración	5.11
5.2.3. Caso de autovalores múltiples	5.17
5.2.4. Análisis modal; coordenadas normales	5.18
5.2.5. Condiciones iniciales	5.22
5.2.6. Oscilaciones libres con amortiguamiento	5.23
5.3. Oscilaciones forzadas	5.27
5.3.1. Oscilaciones sin amortiguamiento; Resonancia	5.27
5.3.2. Oscilaciones con amortiguamiento; régimen transitorio y permanente	5.29
5.4. Métodos para la obtención de modos y frecuencias propias	5.30

5.1. Ecuaciones del movimiento

5.1.1. Ecuaciones acopladas en sistemas lineales

Consideremos un sistema definido por n coordenadas generalizadas q_i , que denotaremos también mediante el vector de coordenadas $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ para simplificar. Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en función de las incógnitas $\mathbf{q}(t)$ se denomina lineal cuando las ecuaciones homogéneas correspondientes cumplen dicha condición de linealidad en relación a las soluciones: si $\mathbf{q}_1(t)$ y $\mathbf{q}_2(t)$ son dos soluciones de las ecuaciones homogéneas¹, cualquier combinación lineal de ambas $a_1\mathbf{q}_1(t) + a_2\mathbf{q}_2(t)$ para $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ arbitrarios será también solución de la ecuación.

En el caso de los sistemas mecánicos, las ecuaciones generales de la dinámica (2.37) son de segundo orden en función del tiempo. Cuando son lineales adoptan la forma siguiente:

$$a_{ij}\ddot{q}_j + c_{ij}\dot{q}_j + k_{ij}q_j = f_i(t), \quad (5.1)$$

donde el rango de los índices² es $i, j = 1 \dots n$. Si todas las matrices de coeficientes a_{ij}, c_{ij}, k_{ij} fuesen diagonales, es decir que sólo fueran distintos de cero para $i = j$, las ecuaciones anteriores serían en realidad un conjunto de n ecuaciones desacopladas de 1 gdl cada una. En este caso se podrían resolver independientemente mediante los procedimientos del capítulo 4. En el caso general si alguna de las matrices de coeficientes no es diagonal se produce un acoplamiento entre los distintos grados de libertad, debiendo resolverse de manera conjunta el sistema de ecuaciones acopladas.

A continuación se desarrolla un ejemplo representativo de un sistema dinámico lineal con tres grados de libertad acoplados, en el cual se obtienen las ecuaciones mediante el procedimiento de Lagrange (capítulo 2).

EJEMPLO 5.1: Supongamos un sistema formado por tres carros que pueden considerarse como masas puntuales, conectadas entre sí por resortes lineales y amortiguadores. La primera está conectada de igual manera a un punto fijo, y están obligadas todas ellas a moverse según una misma recta (figura 5.1).

¹Se denomina homogénea a una ecuación diferencial en la que no hay términos independientes de las funciones \mathbf{q} y de sus derivadas $\dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$.

²En esta expresión y en el resto del capítulo se sobreentenderán los sumatorios sobre los índices repetidos, extendidos a lo largo de su rango, salvo indicación en contra. Quedan exceptuadas también las expresiones en las que estos índices afecten a vectores o matrices, en cuyo caso se indicará de forma expresa el sumatorio si lo hay.

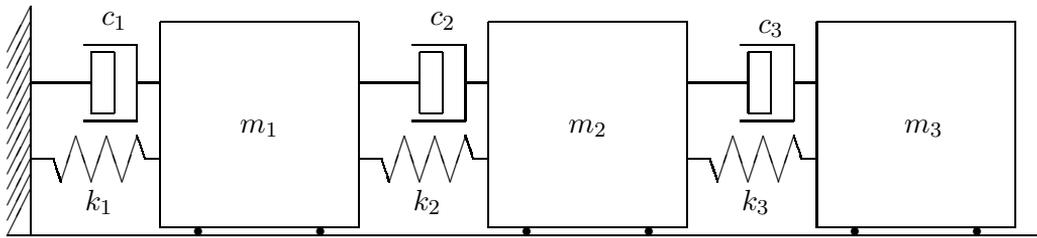


Figura 5.1: Sistema lineal con 3 grados de libertad, formado por tres masas unidas mediante resortes y amortiguadores lineales.

Obtendremos en primer lugar las ecuaciones de Lagrange del movimiento. Para ello tomamos coordenadas absolutas de cada masa en relación con la posición de equilibrio, $\mathbf{q} = (x_1, x_2, x_3)$. La posición de equilibrio sería por tanto $\mathbf{q}_0 = (0, 0, 0)$. La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2,$$

y la energía potencial

$$V = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_3(x_3 - x_2)^2.$$

Derivando se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1\ddot{x}_1; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2\ddot{x}_2; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} \right) = m_3\ddot{x}_3.$$

Las fuerzas generalizadas deben incluir los términos conservativos y los no conservativos provenientes de los amortiguadores:

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\frac{\partial V}{\partial x_1} + Q_1^N \\ &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) - c_1\dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ Q_2 &= -k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_3 - x_2) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) \\ Q_3 &= -k_3(x_3 - x_2) - c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) \end{aligned}$$

Resultan por tanto las ecuaciones del movimiento siguientes:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3x_3 - c_2\dot{x}_1 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - c_3\dot{x}_3 = 0 \\ m_3\ddot{x}_3 - k_3x_2 + k_3x_3 - c_3\dot{x}_2 + c_3\dot{x}_3 = 0 \end{cases}$$

En estas ecuaciones se pueden identificar los coeficientes de las ecuaciones (5.1):

$$\begin{aligned}
 [a_{ij}] &= \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}, & [c_{ij}] &= \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{pmatrix}, \\
 [k_{ij}] &= \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Se obtiene por tanto un sistema de 3 ecuaciones diferenciales lineales y acopladas, al no ser diagonales ni los coeficientes c_{ij} ni los k_{ij} .

5.1.2. Linealización de las ecuaciones

Para un sistema general las ecuaciones serán no lineales. Sin embargo, si existe una posición de equilibrio estable, por la propia definición del mismo (ver apartado 3.3) se producirán pequeñas oscilaciones o vibraciones alrededor de esta posición si la excitación del sistema es suficientemente pequeña. En este caso podremos linealizar las ecuaciones admitiendo la hipótesis de pequeñas oscilaciones: las fuerzas desarrolladas dependerán linealmente de las coordenadas y de las velocidades, y los parámetros del sistema se podrán considerar constantes e iguales a los correspondientes a la posición de equilibrio. En lo que sigue de este apartado se discute la obtención de estas ecuaciones linealizadas en un caso general, así como las propiedades del sistema de ecuaciones y sus matrices de coeficientes. Como veremos más adelante el movimiento oscilatorio que se produce tiene naturaleza armónica, similar al caso de un grado de libertad que se estudió en el capítulo 4.

La dinámica analítica proporciona un marco teórico adecuado para plantear las ecuaciones en este tipo de sistemas. Adoptamos para ello las siguientes

HIPÓTESIS.—

1. El sistema es holónomo con vínculos esclerónomos (es decir, vínculos que no dependen de t). En estas condiciones la energía cinética es una expresión homogénea de segundo grado en las velocidades generaliza-

das \dot{q}_i (ver apartado 2.2.4, ecuaciones (2.33) y (2.30))³:

$$T = \frac{1}{2} a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l, \quad \text{siendo } a_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_l} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \quad (5.3)$$

2. Existe una *posición de equilibrio estable*, en la que tomaremos convencionalmente el origen de coordenadas ($q_i = 0$), con objeto de simplificar las expresiones.

La condición de equilibrio se puede definir por la ausencia de movimiento, $\dot{q}_i = \ddot{q}_i = 0$. Se puede comprobar fácilmente que esta condición es equivalente a la anulación de las fuerzas generalizadas Q_i . En efecto, partiremos de las ecuaciones de Lagrange (2.27),

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^N. \quad (5.4)$$

Desarrollando de forma general estas ecuaciones (2.37), y teniendo en cuenta que se trata de un sistema esclerónomo ($\partial \mathbf{r}_i / \partial t = 0$), se obtiene:

$$a_{jk} \ddot{q}_k + [kl, j] \dot{q}_k \dot{q}_l = - \frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^N = Q_j, \quad (5.5)$$

siendo $[kl, j] = \frac{1}{2} (\partial a_{jk} / \partial q_l + \partial a_{jl} / \partial q_k - \partial a_{kl} / \partial q_j)$. Particularizando para unas condiciones iniciales de reposo ($\dot{q}_j = 0$), se comprueba fácilmente⁴ que la condición de equilibrio ($\ddot{q}_j = 0$) es equivalente a la condición de nulidad de las fuerzas generalizadas, $Q_j = 0$.

3. Al ser estable la posición de equilibrio, una perturbación pequeña del mismo producirá igualmente *oscilaciones pequeñas* respecto de la posición de equilibrio. Supondremos pequeñas tanto las coordenadas relativas a la posición de equilibrio (q_j), así como las velocidades y las aceleraciones (\dot{q}_j, \ddot{q}_j), por lo que los términos cuadráticos de estas componentes se pueden despreciar en relación con los términos lineales. Asimismo, los parámetros del sistema se podrán considerar constantes, al suponer que no varía apreciablemente la configuración del mismo.

³ En esta expresión y en el resto del capítulo se sobreentenderán los sumatorios sobre los índices repetidos, extendidos a lo largo de su rango, salvo indicación en contra. Quedan exceptuadas también las expresiones en las que estos índices afecten a vectores o matrices, como la segunda de las ecuaciones que se citan, en cuyo caso se indicará de forma expresa el sumario si lo hay.

⁴ Téngase en cuenta que la matriz de coeficientes a_{jk} es definida positiva y por tanto regular.

Desarrollaremos ahora las fuerzas generalizadas Q_i de las ecuaciones (5.5). Admitiremos que estas fuerzas puedan depender de las coordenadas generalizadas $\mathbf{q} = (q_1, q_2 \dots q_n)$ y de sus velocidades $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2 \dots \dot{q}_n)$, y supondremos también que no dependen explícitamente del tiempo ($\partial Q_j / \partial t = 0$). Esto equivale a considerar un *sistema autónomo*, en el que las únicas fuerzas actuantes provienen de cambios en la propia configuración del sistema (fuerzas interiores), o de la velocidad (resistencias viscosas), no existiendo fuerzas debidas a agentes exteriores variables con el tiempo. Con estas premisas realizamos un desarrollo en serie de primer orden alrededor de la posición de equilibrio, que nos permitirá *linealizar* la expresión de las fuerzas generalizadas en función de coordenadas y velocidades:

$$Q_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \underbrace{Q_i|_0}_{=0} + \left. \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \right|_0 q_j + \left. \frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j} \right|_0 \dot{q}_j + \mathcal{O}(\mathbf{q}^2) + \mathcal{O}(\dot{\mathbf{q}}^2)$$

Emplearemos la terminología siguiente para los coeficientes que aparecen:

$$k_{ij} = -\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \quad \text{Coeficientes de } \textit{rigidez}$$

$$c_{ij} = -\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j} \quad \text{Coeficientes de } \textit{amortiguamiento viscoso}$$

Supondremos aquí que las fuerzas provienen de un potencial ($Q_i = -\partial V / \partial q_i$), por lo que los coeficientes de rigidez serán:

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}. \quad (5.6)$$

Es fácil comprobar la simetría de estos coeficientes, heredada de las propiedades de las derivadas: $k_{ij} = k_{ji}$.

Análogamente, para las fuerzas dependientes de la velocidad, se puede adoptar la hipótesis de que provienen de una función \mathcal{R} , denominada *función de disipación de Rayleigh*, definida a partir de los coeficientes simétricos c_{ij} como:

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} c_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (5.7)$$

de forma que

$$c_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}. \quad (5.8)$$

El significado de \mathcal{R} puede establecerse calculando la tasa de energía disipada por unidad de tiempo por las fuerzas viscosas no conservativas:

$$\mathcal{D} = -Q_i^N \dot{q}_i = (c_{ij} \dot{q}_j) \dot{q}_i = 2\mathcal{R}$$

Por el segundo principio de la termodinámica esta disipación debe ser positiva o nula, lo que conduce a la condición $\mathcal{R} \geq 0$, o de forma equivalente, a que los coeficientes c_{ij} definen una forma cuadrática semidefinida positiva.

Las ecuaciones del movimiento (5.4) quedan pues expresadas como:

$$a_{jk} \ddot{q}_k + [kl, j] \dot{q}_k \dot{q}_l = -k_{ij} q_j - c_{ij} \dot{q}_j + \mathcal{O}(\mathbf{q}^2) + \mathcal{O}(\dot{\mathbf{q}}^2)$$

Empleando ahora la hipótesis 3 arriba enunciada de pequeñas oscilaciones, se puede aproximar la ecuación anterior eliminando los términos de orden cuadrático. Se obtienen así las *ecuaciones linealizadas* del movimiento:

$$m_{ij} \ddot{q}_j + c_{ij} \dot{q}_j + k_{ij} q_j = 0; \quad i = 1 \dots n \quad (5.9)$$

Estas ecuaciones son válidas siempre que el sistema sea autónomo, sin fuerzas exteriores que lo exciten. Este caso se denomina de *vibraciones libres*. En caso contrario se obtendría un sistema con *vibraciones forzadas*, en el que habría que añadir a la derecha de la igualdad los términos de fuerzas exteriores correspondientes:

$$m_{ij} \ddot{q}_j + c_{ij} \dot{q}_j + k_{ij} q_j = f_i(t); \quad i = 1 \dots n \quad (5.10)$$

Las ecuaciones (5.9) ó (5.10) gobiernan el estudio de las vibraciones en sistemas lineales, siendo válidas también de forma bastante aproximada para el estudio de pequeñas oscilaciones en la mayoría de los sistemas reales no lineales. Como se comprueba inmediatamente, son una generalización directa de la ecuación (4.17) para las oscilaciones con un grado de libertad estudiada en el capítulo 4:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t).$$

5.1.3. Formulación matricial

En las ecuaciones (5.9) los coeficientes m_{ij} juegan el papel de masas, los c_{ij} definen el amortiguamiento viscoso, y los k_{ij} la rigidez del sistema.

Podemos emplearlos para definir las matrices siguientes⁵:

$[\mathbf{M}] = [m_{ij}]$	Matriz de masas
$[\mathbf{C}] = [c_{ij}]$	Matriz de amortiguamiento
$[\mathbf{K}] = [k_{ij}]$	Matriz de rigidez
$\{\mathbf{q}\} = \{q_j\}$	Vector columna de coordenadas
$\{\mathbf{f}\} = \{Q_j\}$	Vector columna de fuerzas externas

De esta forma para el caso de oscilaciones libres (5.9) la ecuación matricial resulta ser

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (5.11)$$

y para oscilaciones forzadas (5.10),

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{f}\}. \quad (5.12)$$

La matriz $[\mathbf{M}]$ define la energía cinética como una forma cuadrática de las velocidades (ecuación (5.3)),

$$T = \frac{1}{2}m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = \frac{1}{2}\{\dot{\mathbf{q}}\}^T[\mathbf{M}]\{\dot{\mathbf{q}}\}$$

La matriz $[\mathbf{M}] = [m_{ij}]$, por la definición de sus componentes (ver (2.30)) es simétrica. Por otra parte, la energía cinética, por su definición, es esencialmente positiva, por lo que la matriz de masa ha de ser además definida positiva:

$$\forall \dot{q}_i, \quad \frac{1}{2}m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j > 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{M}] > 0. \quad (5.13)$$

Restringiéndonos al caso en que las fuerzas provienen de un potencial, la definición de las componentes de $[\mathbf{K}] = [k_{ij}]$, ver ecuación (5.6), la caracteriza también como simétrica. Para estudiar su signo, desarrollamos en serie de potencias el potencial V alrededor de la posición de equilibrio,

$$V(\mathbf{q}) = V(\mathbf{0}) + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial q_i}\bigg|_0}_{=0} q_i + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\bigg|_0}_{=k_{ij}} q_i q_j + \dots \quad (5.14)$$

⁵Emplearemos la notación habitual en este curso para las expresiones matriciales: $\{\mathbf{q}\} \equiv \{q_i\}$, $\{\mathbf{a}\} \equiv \{a_i\}$ (negritas entre llaves) para matrices columna ($n \times 1$), $\|\mathbf{a}\| = \{\mathbf{a}\}^T \equiv \|a_i\|$, $\|\mathbf{q}\| = \{\mathbf{q}\}^T \equiv \|q_i\|$ para matrices fila ($1 \times n$), y $[\mathbf{M}] \equiv [M_{ij}]$, $[\mathbf{K}] \equiv [K_{ij}]$, $[\mathbf{A}] \equiv [A_{ij}]$ (negritas *rectas* o corchetes) para matrices de 2 índices ($n \times n$). Reservaremos las "negritas itálicas" (\mathbf{x} , \mathbf{a} , \mathbf{R} , \mathbf{I}) para vectores o tensores. Procuraremos distinguir de esta manera entre el tensor \mathbf{R} y la matriz de componentes del mismo en un triedro dado, $[\mathbf{R}]$.

La condición para que el equilibrio sea estable, en virtud de lo cual las oscilaciones alrededor del mismo se mantienen pequeñas, equivale a que el potencial V tenga un mínimo local, es decir que sea $V(\mathbf{q}) - V(\mathbf{0}) > 0$. Esta afirmación la demostraremos más adelante (apartado 5.2.2). Supondremos además que los coeficientes de las derivadas segundas k_{ij} en el desarrollo anterior son significativos, sin que se necesite recurrir a derivadas de orden superior para establecer la condición de mínimo. En virtud de ello, se deduce que la forma cuadrática definida por k_{ij} es definida positiva además de simétrica:

$$\forall q_i, \quad k_{ij}q_iq_j > 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{K}] > \mathbf{0}. \quad (5.15)$$

Por último, como ya se justificó en el apartado anterior, los coeficientes de amortiguamiento viscosos definen una matriz simétrica y semidefinida positiva:

$$\forall \dot{q}_i, \quad c_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{C}] \geq \mathbf{0}. \quad (5.16)$$

EJEMPLO 5.2: Para el caso del ejemplo anterior 5.1, expresar las ecuaciones matriciales y las matrices del sistema, comprobando sus características.

Estas ecuaciones se pueden expresar matricialmente en la forma definida por (5.11),

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}$$

siendo las matrices del sistema las obtenidas en (5.2):

$$[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}; \quad [\mathbf{C}] = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{pmatrix};$$

$$[\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix}.$$

Las tres matrices son obviamente simétricas. Teniendo en cuenta que todos los parámetros m_i, c_i, k_i son positivos, las matrices son también definidas positivas. Por ejemplo para la matriz $[\mathbf{K}]$ los menores principales son todos positivos

$$M_1 = k_1 + k_2 > 0; M_2 = k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1 > 0; M_3 = k_1k_2k_3 > 0.$$

La comprobación es similar para la matriz $[\mathbf{C}]$, y más obvia para $[\mathbf{M}]$.

5.2. Oscilaciones libres

5.2.1. Oscilaciones sin amortiguamiento; problema de autovalores

En este caso no existen fuerzas dependientes de la velocidad, ni fuerzas exteriores aplicadas, por lo que las ecuaciones del movimiento (5.12) quedan

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}, \quad (5.17)$$

o en componentes,

$$m_{ij}\ddot{q}_j + k_{ij}q_j = 0. \quad (5.18)$$

Buscaremos una solución de la forma

$$\begin{aligned} \{\mathbf{q}\} &= C\{\mathbf{a}\}e^{i\omega t} \\ q_j &= Ca_j e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

En la expresión anterior $C = D + iE \in \mathbb{C}$ es una constante compleja, en función de la unidad imaginaria $i \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{-1}$; $\{\mathbf{a}\}$ es un vector de constantes que más adelante (apartado 5.2.2) demostraremos es real ($\in \mathbb{R}^n$), y $e^{i\omega t}$ indica la notación de Euler para la exponencial compleja:

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t.$$

La utilización de magnitudes complejas en (5.19) se realiza únicamente por conveniencia, para facilitar los desarrollos. Lógicamente el movimiento físico corresponde a coordenadas reales, por lo que habrá que tomar únicamente la parte real de esta expresión. La notación compleja facilita la representación de funciones armónicas, ya que la constante compleja C incluye dos constantes reales. En efecto, desarrollando la parte real de (5.19),

$$\begin{aligned} \{\mathbf{q}\} &= \Re[(D + iE)(\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t)] \{\mathbf{a}\} \\ &= (D \cos \omega t - E \operatorname{sen} \omega t) \{\mathbf{a}\}; \end{aligned}$$

y si definimos unas nuevas constantes (B, δ) como $B = \sqrt{D^2 + E^2}$ y $\operatorname{tg} \delta = -E/D$, esta expresión equivale a su vez a

$$\begin{aligned} \{\mathbf{q}\} &= \{\mathbf{a}\} \Re \left[B e^{i(\omega t - \delta)} \right] \\ &= \{\mathbf{a}\} B \cos(\omega t - \delta). \end{aligned} \quad (5.20)$$

La solución considerada debe cumplir la ecuación del movimiento (5.17). Para ello se deriva dos veces (5.19),

$$\begin{aligned}\{\ddot{\mathbf{q}}\} &= -\omega^2 C \{\mathbf{a}\} e^{i\omega t} \\ &= -\omega^2 \{\mathbf{q}\},\end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación (5.17),

$$(-\omega^2 [\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]) \{\mathbf{a}\} C e^{i\omega t} = \{\mathbf{0}\}.$$

De esta ecuación se puede eliminar el escalar $C e^{i\omega t} \neq 0$, resultando

$$(-\omega^2 [\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]) \{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (5.21)$$

Esta expresión define un sistema de ecuaciones lineales homogéneas en función de las incógnitas $\{\mathbf{a}\}$, lo que constituye un *problema de autovalores generalizado*. En efecto, denominando $\lambda = \omega^2$, se trata de obtener los vectores $\{\mathbf{a}\}$ que verifican

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{a}\} = \lambda[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}\} \quad (5.22)$$

para algún valor de λ . Para que existan soluciones distintas de la trivial $\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{0}\}$, el sistema de ecuaciones homogéneo (5.21) debe ser singular, es decir, debe anularse el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\det([\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}]) = 0. \quad (5.23)$$

Esta ecuación de compatibilidad se denomina la *ecuación característica* del problema de autovalores (5.22). Resulta una ecuación polinómica de grado n en λ , que poseerá en general n raíces λ_k , $k = 1, 2, \dots, n$. Estas raíces λ_k se denominan *autovalores* o *valores propios*⁶, correspondiendo a los valores de λ que hacen posible una solución no trivial de (5.22); cada uno de ellos está asociado a un vector solución $\{\mathbf{a}_k\}$, estos se denominan *autovectores* o *vectores propios*⁷.

5.2.2. Frecuencias propias y modos normales de vibración

Los valores $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$ se denominan *frecuencias propias* del sistema, debido a que representan las frecuencias angulares de las posibles soluciones armónicas del tipo (5.19). Los valores de λ_k son positivos al ser las matrices $[\mathbf{K}]$ y $[\mathbf{M}]$ simétricas y definidas positivas, por tanto admiten raíz cuadrada real y positiva.

⁶En inglés *eigenvalues*.

⁷En inglés *eigenvectors*.

La linealidad de la ecuación (5.17) lleva aparejada la linealidad de las soluciones: si $\{\mathbf{x}_1\}$ y $\{\mathbf{x}_2\}$ son soluciones de la ecuación, cualquier combinación lineal de las mismas ($\mu\{\mathbf{x}_1\} + \nu\{\mathbf{x}_2\}$) también es solución. La comprobación es inmediata, sin más que sustituir en (5.17):

$$\begin{aligned} & [\mathbf{M}](\mu\{\ddot{\mathbf{x}}_1\} + \nu\{\ddot{\mathbf{x}}_2\}) + [\mathbf{K}](\mu\{\mathbf{x}_1\} + \nu\{\mathbf{x}_2\}) = \\ & \mu \underbrace{([\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{x}}_1\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{x}_1\})}_{=\{\mathbf{0}\}} + \nu \underbrace{([\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{x}}_2\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{x}_2\})}_{=\{\mathbf{0}\}} = \{\mathbf{0}\}. \end{aligned}$$

Supondremos en principio que los autovalores λ_k son todos distintos, no existiendo soluciones múltiples de (5.23). El caso de autovalores múltiples se tratará más abajo. Por tanto, cada λ_k definirá una solución posible del tipo (5.19), en función de una constante arbitraria C_k . Por lo dicho antes la solución más general será una combinación lineal de las mismas, del tipo

$$\begin{aligned} \{\mathbf{q}\} &= C_1\{\mathbf{a}_1\}e^{i\omega_1 t} + C_2\{\mathbf{a}_2\}e^{i\omega_2 t} + \dots + C_n\{\mathbf{a}_n\}e^{i\omega_n t} \\ &= \sum_{k=1}^n C_k\{\mathbf{a}_k\}e^{i\omega_k t} \end{aligned} \quad (5.24)$$

En esta expresión, los valores de $\{\mathbf{a}_k\}$ y ω_k vienen dados por la solución del problema de autovalores (5.22). Quedan $2n$ constantes por determinar, correspondientes a las constantes complejas $C_k = D_k + iE_k$, que se definirán a partir de las $2n$ condiciones iniciales.

Adelantando algunos resultados que demostraremos más adelante, los n autovalores λ_k son reales y positivos, por lo que $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$ son números reales. Tomaremos sólo la raíz positiva, ya que la negativa carece de sentido físico. Por tanto, la solución será, tomando la parte real de (5.24)

$$\{\mathbf{q}\} = \sum_{k=1}^n (D_k \cos \omega_k t - E_k \operatorname{sen} \omega_k t) \{\mathbf{a}_k\} \quad (5.25)$$

o bien con la notación alternativa (5.20),

$$\{\mathbf{q}\} = \sum_{k=1}^n B_k \{\mathbf{a}_k\} \cos(\omega_k t - \delta_k) \quad (5.26)$$

siendo $B_k = \sqrt{D_k^2 + E_k^2}$.

Esta expresión ofrece una interpretación del movimiento como la suma de n “*modos de vibración*” $\{\mathbf{a}_k\}$, cada uno de ellos vibrando según una ley

armónica con su frecuencia característica, ω_k . La amplitud de cada modo en función del tiempo es $B_k \cos(\omega_k t - \delta_k)$.

La solución general, en cualquiera de las formas (5.24), (5.25) ó (5.26) depende de $2n$ constantes que se determinan a partir de las $2n$ condiciones iniciales del problema: coordenadas iniciales $\{\mathbf{q}_0\}$ y velocidades iniciales $\{\dot{\mathbf{q}}_0\}$.

Propiedades de los autovalores y modos normales (autovectores)

1. Todos los autovalores son reales: $\lambda_k \in \mathbb{R}$.

Para demostrarlo emplearemos la propiedad de *hermiticidad*⁸ de las matrices $[\mathbf{K}]$ y $[\mathbf{M}]$. Sea un autovalor λ_k , que cumple:

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_k\} = \lambda_k[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\} \quad (k \text{ no sumado}). \quad (5.27)$$

Tomando conjugados de los traspuestos de esta expresión,

$$\{\mathbf{a}_k\}^\dagger[\mathbf{K}] = \lambda_k^* \{\mathbf{a}_k\}^\dagger[\mathbf{M}]. \quad (5.28)$$

Pre-multiplicando la ecuación (5.27) por $\{\mathbf{a}_k\}^\dagger$, post-multiplicando (5.28) por $\{\mathbf{a}_k\}$ y restando ambas expresiones se obtiene:

$$0 = (\lambda_k - \lambda_k^*) \{\mathbf{a}_k\}^\dagger[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\}. \quad (5.29)$$

Veamos ahora que el segundo factor de esta expresión no puede ser nulo. Suponiendo en general una expresión compleja para el autovalor como

$$\{\mathbf{a}_k\} = \{\alpha_k\} + i\{\beta_k\}; \quad \{\mathbf{a}_k\}^\dagger = \{\alpha_k\}^T - i\{\beta_k\}^T,$$

resulta

$$\begin{aligned} \{\mathbf{a}_k\}^\dagger[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\} &= \{\alpha_k\}^T[\mathbf{M}]\{\alpha_k\} + \{\beta_k\}^T[\mathbf{M}]\{\beta_k\} \\ &\quad + i \underbrace{(\{\alpha_k\}^T[\mathbf{M}]\{\beta_k\} - \{\beta_k\}^T[\mathbf{M}]\{\alpha_k\})}_{=0} \end{aligned}$$

La condición de definida positiva de la matriz $[\mathbf{M}]$ obliga a que la expresión anterior sea estrictamente positiva. Por tanto, de la expresión (5.29) se deduce

$$\lambda_k = \lambda_k^* \quad \Rightarrow \quad \lambda_k \in \mathbb{R},$$

como queríamos demostrar.

⁸Se dice que una matriz es *hermítica* cuando su adjunta, es decir la conjugada y traspuesta, es igual a ella misma: $[\mathbf{A}]^\dagger = ([\mathbf{A}]^T)^* = [\mathbf{A}]$. Esta propiedad es evidente para una matriz real simétrica.

2. *Todos los autovectores son reales:* $\{\mathbf{a}_k\} \in \mathbb{R}^n$.

Sea un autovector cualquiera $\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{a}_k\}$, del cual ya sabemos que su autovalor asociado es real, $\lambda \in \mathbb{R}$. La ecuación (5.27) es un sistema homogéneo con coeficientes reales, que en componentes puede expresarse como

$$(k_{ij} - \lambda m_{ij})a_j = \alpha_{ij}a_j = 0, \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Las posibles soluciones a este sistema tienen la propiedad de que el cociente entre dos componentes cualesquiera es real: $a_k/a_l \in \mathbb{R}$. Por tanto, dada la indeterminación que existe para la solución, podremos escoger de forma arbitraria una componente real, p. ej. $a_1 = 1$, con lo que el resto de componentes habrá de ser igualmente real.

3. *Los autovalores son positivos:* $\lambda_k > 0$.

Se parte de la igualdad (5.27),

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_k\} = \lambda_k[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\}. \quad (5.30)$$

Pre-multiplicando por $\{\mathbf{a}_k\}^T$ y despejando λ_k , se obtiene

$$\lambda_k = \frac{\{\mathbf{a}_k\}^T[\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_k\}}{\{\mathbf{a}_k\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\}}. \quad (5.31)$$

Tanto el numerador como el denominador en esta expresión son estrictamente positivos, al ser definidas positivas las matrices $[\mathbf{K}]$ y $[\mathbf{M}]$ respectivamente. Por tanto, $\lambda_k > 0$, como queríamos demostrar.

Si algún autovalor fuera negativo, $\lambda_k < 0$, la frecuencia propia asociada sería imaginaria, $\omega_k = \pm\sqrt{\lambda_k} = \pm(a + ib)$, y sustituyendo en la solución (5.19) se obtendría una exponencial real creciente, no acotada, que indicaría un equilibrio inestable e invalidaría la hipótesis hecha de pequeñas oscilaciones. Esto podría ocurrir en el caso en que no se tuviese un mínimo del potencial, en cuyo caso los coeficientes $[\mathbf{K}]$ podrían no ser definidos positivos. Este razonamiento prueba que para la estabilidad del movimiento se requiere la condición de mínimo del potencial.

4. *Ortogonalidad:*

Dos modos de vibración $\{\mathbf{a}_k\}$ y $\{\mathbf{a}_l\}$, correspondientes a autovalores distintos $\lambda_k \neq \lambda_l$, son ortogonales respecto a la matriz de masa $[\mathbf{M}]$:

$$\{\mathbf{a}_k\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_l\} = 0 \quad (5.32)$$

La expresión anterior se puede interpretar como la anulación del producto interior de los vectores $\{\mathbf{a}_k\}$ y $\{\mathbf{a}_l\}$, en la métrica definida por $[\mathbf{M}]$.

En efecto, debe cumplirse:

$$\begin{aligned}\lambda_k[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\} &= [\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_k\} \\ \lambda_l[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_l\} &= [\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_l\}\end{aligned}$$

Premultiplicando la primera igualdad por $\{\mathbf{a}_l\}^T$, la segunda por $\{\mathbf{a}_k\}^T$ y restando ambas entre sí, gracias a la simetría de $[\mathbf{M}]$ y de $[\mathbf{K}]$ obtenemos

$$(\lambda_k - \lambda_l)\{\mathbf{a}_k\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_l\} = 0 \quad (5.33)$$

Al ser $\lambda_k \neq \lambda_l$ queda demostrada la ortogonalidad.

5. *Los autovalores y autovectores son intrínsecos:*

Esto quiere decir que son independientes de la elección de coordenadas. En efecto, si suponemos un cambio de coordenadas cartesianas definido por la matriz $[\mathbf{U}]$,

$$\{\mathbf{q}\} = [\mathbf{U}]\{\mathbf{y}\}, \quad (5.34)$$

al sustituir en la ecuación matricial (5.17) resulta:

$$[\mathbf{M}][\mathbf{U}]\{\ddot{\mathbf{y}}\} + [\mathbf{K}][\mathbf{U}]\{\mathbf{y}\} = \{\mathbf{0}\};$$

la ecuación característica es ahora:

$$| -\lambda[\mathbf{M}][\mathbf{U}] + [\mathbf{K}][\mathbf{U}] | = |[\mathbf{U}] \cdot | - \lambda[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}] | = 0.$$

Si el cambio de coordenadas es regular, es decir $|[\mathbf{U}]| \neq 0$, se deduce por tanto la misma ecuación característica (5.23). De ella resultarán los mismos autovalores λ_k . Los vectores propios correspondientes estarán ligados a los obtenidos con las coordenadas originales $\{\mathbf{q}\}$ mediante las relaciones de cambio de coordenadas (5.34).

6. *Los vectores propios son linealmente independientes.*

Los vectores propios asociados a autovalores distintos son *linealmente independientes*. En efecto, si suponemos una combinación lineal cualquiera

$$\alpha_1\{\mathbf{a}_1\} + \alpha_2\{\mathbf{a}_2\} + \dots + \alpha_k\{\mathbf{a}_k\} + \dots + \alpha_n\{\mathbf{a}_n\} = \{\mathbf{0}\}$$

premultiplicando por $\{\mathbf{a}_k\}^T[\mathbf{M}]$ obtenemos $\alpha_k = 0$. Puesto que esta operación se puede realizar para todos los valores $k = 1, \dots, n$, se deduce que la única posibilidad es que todos los coeficientes α_k sean nulos. Los n vectores propios forman por tanto una base del espacio vectorial R^n .

Normalización de los vectores propios

Al ser solución de un sistema homogéneo, los vectores propios están indefinidos respecto de, al menos, un parámetro. Así, si $\{\mathbf{a}_k\}$ es vector propio, cualquier vector paralelo al mismo $\mu\{\mathbf{a}_k\}$ (para $\mu \in \mathbb{R}$) también lo es:

$$(-\lambda_k[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}])(\mu\{\mathbf{a}_k\}) = \mu\{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}$$

podemos por tanto escoger los vectores propios de forma que cumplan algún criterio de normalización. Una posibilidad es que su norma respecto de la matriz de masas sea unidad:

$$\{\mathbf{a}_k\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\} = 1 \quad (k \text{ no sumado}). \quad (5.35)$$

Para hacer esta normalización, el procedimiento que se sigue en la práctica es tomar en primer lugar una solución cualquiera para (5.30), que podemos denominar $\{\mathbf{v}_k\}$. A continuación, este vector propio se normaliza dividiéndolo por su norma

$$\{\mathbf{a}_k\} = \frac{\{\mathbf{v}_k\}}{\sqrt{\{\mathbf{v}_k\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{v}_k\}}} \quad (5.36)$$

En este caso, considerando (5.32) y (5.36), se verificará

$$\{\mathbf{a}_k\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_l\} = \delta_{kl} \quad (\delta_{kl} = 0 \text{ si } k \neq l; \quad \delta_{kl} = 1 \text{ si } k = l) \quad (5.37)$$

La normalización realizada en (5.36) no suele ser la más conveniente en la práctica, y no es la única opción posible. Otra posibilidad sería adoptar el convenio de que la primera componente de cada vector propio fuese de valor unidad, o bien que la máxima componente de cada vector propio fuese la unidad. Estas alternativas pueden ser preferibles para expresar los vectores propios en cálculos manuales, con objeto de evitar las operaciones aritméticas que implica (5.36). En estos casos, la norma respecto de la matriz de masa no será unidad,

$$\{\mathbf{a}_k\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\} = M_k \quad (5.38)$$

El valor M_k se denomina *masa modal* del modo $\{\mathbf{a}_k\}$. Conviene advertir que no se trata de una magnitud intrínseca de los modos de vibración, sino que

depende de cómo se hayan escogido y normalizado. La expresión general del producto interno de dos autovalores será

$$\{\mathbf{a}_k\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_l\} = \delta_{kl}M_k \quad (k \text{ no sumado}). \quad (5.39)$$

La ortogonalidad respecto de $[\mathbf{M}]$ implica también ortogonalidad respecto de $[\mathbf{K}]$: premultiplicando (5.30) por $\{\mathbf{a}_l\}^T$,

$$\{\mathbf{a}_l\}^T[\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_k\} = \{\mathbf{a}_l\}^T(\omega_k^2[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\}) = \delta_{kl}M_k\omega_k^2 \quad (k \text{ no sumado}). \quad (5.40)$$

5.2.3. Caso de autovalores múltiples

La propiedad de ortogonalidad (5.32), conducente a obtener un conjunto de n vectores propios normalizados y ortogonales entre sí respecto de $[\mathbf{M}]$, se ha basado en la no existencia de soluciones múltiples de la ecuación característica (5.23), por lo que todos los autovalores en (5.33) eran distintos.

En el caso en que existan autovalores múltiples como solución de (5.23) es posible también obtener un conjunto de vectores propios normalizados y mutuamente ortogonales. A continuación se describe en líneas generales el procedimiento de obtención.

Supongamos que uno de los autovalores λ es una solución doble. En ese caso, el sistema de ecuaciones homogéneo (5.21) poseerá como soluciones para este valor de λ un subespacio de dimensión 2, por lo que se podrán escoger dos vectores solución independientes, $\{\mathbf{a}'_k\}$ y $\{\mathbf{a}'_l\}$, que supondremos ya normalizados, es decir cumpliendo cada uno la condición (5.35).

Deseamos obtener dentro de este subespacio dos vectores $\{\mathbf{a}_k\}$ y $\{\mathbf{a}_l\}$, ortogonales entre sí y a todos los demás vectores propios correspondientes a los otros autovalores. Escogemos para ello el primero directamente como $\{\mathbf{a}_k\} = \{\mathbf{a}'_k\}$. Este vector cumple la condición de ortogonalidad respecto a los vectores propios de autovalores distintos, ya que es válido el mismo razonamiento seguido en (5.33). Para el otro vector $\{\mathbf{a}_l\}$, suponemos una combinación lineal arbitraria de $\{\mathbf{a}'_k\}$ y $\{\mathbf{a}'_l\}$, en función de dos escalares c_1 y c_2 :

$$\{\mathbf{a}_l\} = c_1\{\mathbf{a}'_k\} + c_2\{\mathbf{a}'_l\}$$

imponiendo la ortogonalidad con $\{\mathbf{a}_k\}$,

$$\{\mathbf{a}_l\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\} = c_1M_k + c_2\{\mathbf{a}'_l\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}'_k\} = 0, \quad (5.41)$$

de donde se obtiene una relación entre c_1 y c_2 ,

$$\frac{c_1}{c_2} = -\frac{\{\mathbf{a}'_l\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}'_k\}}{M_k} = -\mu_l.$$

Obtenemos otra relación expresando la masa modal de $\{\mathbf{a}_l\}$,

$$\{\mathbf{a}_l\}^T [\mathbf{M}] \{\mathbf{a}_l\} = M_l = c_1^2 + c_2^2 + 2c_1c_2\mu_l. \quad (5.42)$$

De las dos ecuaciones (5.41) y (5.42) determinamos los valores precisos de c_1 y c_2 . De esta forma se obtienen dos vectores propios asociados al autovalor λ , que son ortogonales a todos los demás y entre sí.

En el caso de haber autovalores de multiplicidad mayor ($m > 2$), se sigue un procedimiento similar. En primer lugar se escoge un primer vector normalizado del subespacio asociado de dimensión m ; a continuación se aplica el procedimiento anterior para obtener un segundo vector dentro de este subespacio, ortogonal al primero; y así sucesivamente, imponiendo cada vez las condiciones de ortogonalidad con todos los vectores anteriores, hasta obtener los m vectores ortogonales entre sí.

El método descrito es análogo al procedimiento clásico de ortogonalización de Gram-Schmidt, que se puede consultar en los textos de álgebra lineal⁹.

5.2.4. Análisis modal; coordenadas normales

La solución general de las ecuaciones (5.17), debido a la linealidad de las soluciones, se puede expresar como una combinación lineal de las mismas, de la forma (5.26):

$$\{\mathbf{q}\} = \sum_{k=1}^n B_k \{\mathbf{a}_k\} \cos(\omega_k t - \delta_k). \quad (5.43)$$

Denominando a_{ki} a la componente i del vector propio $\{\mathbf{a}_k\}$, la expresión anterior se puede escribir en componentes como

$$q_i = B_k a_{ki} \cos(\omega_k t - \delta_k) \quad (5.44)$$

donde se sobreentiende el sumatorio implícito en el índice repetido k . Definamos ahora unos coeficientes (función del tiempo)

$$u_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} B_k \cos(\omega_k t - \delta_k) \quad (5.45)$$

que denominamos *coordenadas normales*. En función de ellas (5.44) queda

$$q_i(t) = a_{ki} u_k(t) \quad (5.46)$$

⁹Cristóbal Mateos: *Álgebra Lineal*, Servicio de Publicaciones de la E.T.S.I.C.C.P. de Madrid; Juan de Burgos: *Álgebra Lineal*, McGraw-Hill, 1993

Esta expresión puede interpretarse como un cambio de coordenadas para obtener las coordenadas normales $u_k(t)$ a partir de las coordenadas originales $q_i(t)$. La matriz del cambio es la definida por los coeficientes a_{ki} , que son constantes en relación al tiempo, y que como hemos visto son precisamente las componentes de los modos normales de vibración.

Las componentes a_{ki} definidos para la expresión (5.44) constituyen la llamada *Matriz Modal*, $[\mathbf{A}] \stackrel{\text{def}}{=} [a_{ki}]$. Según la definición hecha antes de estos coeficientes, esta matriz está formada por los modos normales como filas,

$$[\mathbf{A}] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \{\mathbf{a}_1\}^T \\ \{\mathbf{a}_2\}^T \\ \vdots \\ \{\mathbf{a}_n\}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}) \\ (a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}) \end{pmatrix}. \quad (5.47)$$

El cambio de coordenadas establecido por (5.46) está definido por la traspuesta de la matriz modal, $[\mathbf{A}]^T$. La expresión de la solución $\{\mathbf{q}\}$ en función de las coordenadas normales $\{\mathbf{u}\}$ es pues:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{q}\} &= [\mathbf{A}]^T \{\mathbf{u}\} \\ &= u_1(t)\{\mathbf{a}_1\} + u_2(t)\{\mathbf{a}_2\} + \dots + u_n(t)\{\mathbf{a}_n\}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Las coordenadas normales así definidas poseen una propiedad notable, ya que en función de ellas las ecuaciones del movimiento quedan desacopladas. Al realizar el cambio a las coordenadas normales, en lugar de un sistema de n ecuaciones simultáneas acopladas (5.17), se obtienen n ecuaciones independientes, cada una con una sola variable, que se pueden solucionar una a una. En efecto, sustituyendo (5.48) en (5.17),

$$[\mathbf{M}][\mathbf{A}]^T \{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}][\mathbf{A}]^T \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{0}\}$$

y premultiplicando por la matriz modal $[\mathbf{A}]$,

$$[\mathbf{A}][\mathbf{M}][\mathbf{A}]^T \{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{A}][\mathbf{K}][\mathbf{A}]^T \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{0}\}$$

Desarrollando en componentes los productos de matrices en esta ecuación, la componente (ij) de $[\mathbf{A}][\mathbf{M}][\mathbf{A}]^T$ corresponde a

$$([\mathbf{A}][\mathbf{M}][\mathbf{A}]^T)_{ij} = a_{ik}m_{kl}a_{jl} = \{\mathbf{a}_i\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_j\} = \delta_{ij}M_i,$$

es decir, se trata del producto interior a través de $[\mathbf{M}]$ del modo $\{\mathbf{a}_i\}$ (fila i de $[\mathbf{A}]$) y el modo $\{\mathbf{a}_j\}$ (columna j de $[\mathbf{A}]^T$), que como se vió en (5.39) son

las deltas de Kronecker multiplicadas por las masas modales. Por tanto el resultado es una matriz diagonal:

$$[\mathbf{A}][\mathbf{M}][\mathbf{A}]^T = [\mathbf{M}_D] = \begin{pmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_n \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

En el caso en que la normalización se haya hecho con masas modales unitarias (5.37), esta sería la matriz identidad.

Análogamente, el otro producto de matrices, empleando (5.40), resulta otra matriz diagonal

$$[\mathbf{A}][\mathbf{K}][\mathbf{A}]^T = [\mathbf{K}_D] = \begin{pmatrix} M_1\omega_1^2 & & & \\ & M_2\omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_n\omega_n^2 \end{pmatrix} \quad (5.50)$$

Por lo tanto, la ecuación (5.17) queda expresada en coordenadas normales como

$$[\mathbf{M}_D]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}_D]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{0}\}. \quad (5.51)$$

En componentes, equivale a n ecuaciones desacopladas (independientes)

$$M_k\ddot{u}_k + M_k\omega_k^2 u_k = 0 \quad (k = 1 \dots n \text{ no sumado}). \quad (5.52)$$

Este resultado no debería extrañar si se recuerda la definición de $u_k(t)$ realizada antes (5.45). En efecto, esta ecuación define las $u_k(t)$ como funciones armónicas de frecuencias ω_k , que son precisamente las soluciones generales de ecuaciones del tipo (5.52). Existe una identidad formal entre definir $u_k(t)$ explícitamente en función de constantes B_k y δ_k por determinar como en (5.45), o definir las como soluciones de las ecuaciones (5.52). En definitiva, las ecuaciones (5.52) en u_k son n ecuaciones desacopladas, correspondientes cada una a un sistema de un grado de libertad: la amplitud del modo de vibración correspondiente.

Esta observación permite interpretar las vibraciones libres de un sistema de n grados de libertad como la suma de las oscilaciones por separado de n modos normales de vibración, independientes unos de otros. Así las coordenadas normales $u_k(t)$ son las amplitudes de cada modo, coeficientes variables con el tiempo por los que multiplicamos a los modos de vibración para obtener la vibración total del sistema.

Hacemos notar que el desarrollo realizado arriba para demostrar la existencia y propiedades de ortogonalidad de los modos de vibración, resumido en las ecuaciones (5.49) y (5.50), puede resumirse mediante el llamado teorema de diagonalización simultánea¹⁰. Este afirma que, dada una matriz simétrica $[\mathbf{M}]$ definida positiva, y otra matriz $[\mathbf{K}]$ simétrica, existe siempre una matriz $[\mathbf{A}]$ no singular tal que $[\mathbf{A}][\mathbf{M}][\mathbf{A}]^T = [\mathbf{1}]$ y $[\mathbf{A}][\mathbf{K}][\mathbf{A}]^T = [\mathbf{D}]$, siendo $[\mathbf{1}]$ la matriz unidad y $[\mathbf{D}]$ una matriz diagonal. Si además $[\mathbf{K}]$ es definido positivo, los términos de la diagonal de $[\mathbf{D}]$ serán todos positivos como es nuestro caso.

EJEMPLO 5.3: Sea un péndulo doble, formado por dos masas iguales m unidas por varillas rígidas sin masa de longitud l , la primera de las cuales está articulada en un punto fijo (figura 5.2). Estudiar las pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio vertical calculando las frecuencias propias y modos normales de vibración.

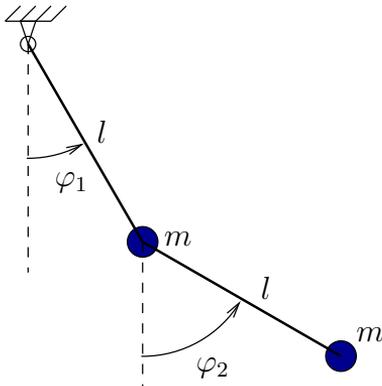


Figura 5.2: Péndulo doble formado por masas puntuales m unidas por varillas de longitud l

Empleando las coordenadas (φ_1, φ_2) definidas en la figura 5.2, la Lagrangiana es:

$$L = \frac{1}{2}ml^2 [2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)] + mgl(2 \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2).$$

Las ecuaciones de Lagrange del movimiento resultan:

$$\begin{aligned} 0 &= 2ml^2\ddot{\varphi}_1 + ml^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\ddot{\varphi}_2 - ml^2\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + 2mgl \sin \varphi_1 \\ 0 &= ml^2\dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + ml^2\ddot{\varphi}_2 + ml^2\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + mgl \sin \varphi_2 \end{aligned}$$

¹⁰Consultar por ejemplo J.A. Fernández Palacios: *Mecánica Teórica de los Sistemas de Sólidos Rígidos*, 1989.

Las ecuaciones se linealizan despreciando términos de segundo orden:

$$\begin{aligned} 0 &= 2ml^2\ddot{\varphi}_1 + ml^2\ddot{\varphi}_2 + 2mgl\varphi_1 \\ 0 &= ml^2\ddot{\varphi}_1 + ml^2\ddot{\varphi}_2 + mgl\varphi_2 \end{aligned}$$

La expresión matricial de las ecuaciones es:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}$$

$$[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{pmatrix}; \quad [\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} 2mgl & 0 \\ 0 & mgl \end{pmatrix}.$$

La ecuación característica resulta

$$\det([\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}]) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\left(\frac{g}{l} - \lambda\right)^2 - \lambda^2 = 0,$$

cuyas soluciones son

$$\lambda_1 = (2 - \sqrt{2})\frac{g}{l}; \quad \lambda_2 = (2 + \sqrt{2})\frac{g}{l}.$$

A partir de éstas podemos calcular los vectores y frecuencias propias asociados a cada una, el resultado es:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{2 - \sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{l}}; \quad \{\mathbf{a}_1\}^T = (1, \sqrt{2}); \\ \omega_2 &= \sqrt{2 + \sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{l}}; \quad \{\mathbf{a}_2\}^T = (1, -\sqrt{2}). \end{aligned}$$

5.2.5. Condiciones iniciales

Los $2n$ coeficientes (B_k, δ_k) de (5.43) se obtendrán a partir de las $2n$ condiciones iniciales $(\{\mathbf{q}_0\}, \{\dot{\mathbf{q}}_0\})$. Desarrollando esta expresión,

$$\{\mathbf{q}\} = \sum_k B_k \{\mathbf{a}_k\} \cos \delta_k \cos \omega_k t + \sum_k B_k \{\mathbf{a}_k\} \sin \delta_k \sin \omega_k t \quad (5.53)$$

por otra parte, la derivada de (5.43) es

$$\{\dot{\mathbf{q}}\} = - \sum_k B_k \{\mathbf{a}_k\} \omega_k \sin(\omega_k t - \delta_k)$$

particularizando ambas en $t = 0$,

$$\begin{aligned} \{\mathbf{q}_0\} &= \sum_k B_k \{\mathbf{a}_k\} \cos \delta_k \\ \{\dot{\mathbf{q}}_0\} &= \sum_k B_k \omega_k \{\mathbf{a}_k\} \sin \delta_k \end{aligned}$$

premultiplicando por $\{\mathbf{a}_l\}^T[\mathbf{M}]$ identificamos los coeficientes:

$$\begin{aligned} B_l M_l \cos \delta_l &= \{\mathbf{a}_l\}^T [\mathbf{M}] \{\mathbf{q}_0\} \\ B_l \omega_l M_l \sin \delta_l &= \{\mathbf{a}_l\}^T [\mathbf{M}] \{\dot{\mathbf{q}}_0\} \end{aligned} \quad (l \text{ no sumado})$$

Sustituyendo en (5.53) podremos expresar la solución directamente en función de las condiciones iniciales como

$$\{\mathbf{q}\} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{M_k} \left[\{\mathbf{a}_k\}^T [\mathbf{M}] \left(\{\mathbf{q}_0\} \cos \omega_k t + \frac{1}{\omega_k} \{\dot{\mathbf{q}}_0\} \sin \omega_k t \right) \right] \{\mathbf{a}_k\} \quad (5.54)$$

EJEMPLO 5.4: Demostrar que un sistema sometido a un desplazamiento inicial proporcional a un modo de vibración, partiendo del reposo, desarrolla un movimiento de oscilación pura en que sólo se excita ese modo de vibración.

En efecto, sea $\{\mathbf{q}_0\} = \{\mathbf{a}_p\}$, $\{\dot{\mathbf{q}}_0\} = \{\mathbf{0}\}$. Los coeficientes entre corchetes del sumatorio (5.54) serán

$$[\bullet]_k = \{\mathbf{a}_k\} [\mathbf{M}] \{\mathbf{a}_p\} \cos \omega_k t = M_k \delta_{kp} \cos \omega_k t.$$

Por tanto, el movimiento resultante será

$$\{\mathbf{q}\} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{M_k} M_k \delta_{kp} \cos \omega_k t \{\mathbf{a}_k\} = \cos \omega_p t \{\mathbf{a}_p\}.$$

5.2.6. Oscilaciones libres con amortiguamiento

Se considera ahora el caso más general de vibraciones libres en las que puedan existir fuerzas de amortiguamiento, dependientes de la velocidad. La ecuación del movimiento es (5.11):

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}$$

Buscamos la solución mediante funciones del tipo

$$\{\mathbf{q}\} = C\{\mathbf{b}\}e^{i\omega t}$$

donde al igual que antes, sólo tiene significado físico la parte real de la expresión, aunque con objeto de simplificar el desarrollo, emplearemos las constantes y la notación complejas.

En este caso, a diferencia del caso sin amortiguamiento, tanto $\{\mathbf{b}\}$ como ω pueden pertenecer al campo complejo. Sustituyendo en la ecuación matricial (5.11) y dividiendo por $Ce^{i\omega t} \neq 0$,

$$(-[\mathbf{M}]\omega^2 + i[\mathbf{C}]\omega + [\mathbf{K}])\{\mathbf{b}\} = \{\mathbf{0}\}$$

Para simplificar las expresiones, realizamos el cambio $\gamma = i\omega$. Resulta entonces

$$([\mathbf{M}]\gamma^2 + [\mathbf{C}]\gamma + [\mathbf{K}])\{\mathbf{b}\} = \{\mathbf{0}\},$$

sistema homogéneo que define un problema de autovalores complejo. Para tener solución distinta de la trivial, ha de cumplir la condición de que el determinante de la matriz de coeficientes sea nulo:

$$\det([\mathbf{M}]\gamma^2 + [\mathbf{C}]\gamma + [\mathbf{K}]) = 0 \quad (\text{ecuación característica})$$

Esta ecuación tendrá en general *soluciones complejas* que vendrán dadas por parejas de autovalores y autovectores conjugadas del tipo

$$\begin{aligned} \gamma &= -s + \Omega i, & \gamma^* &= -s - \Omega i; \\ \{\mathbf{b}\} &= \{\boldsymbol{\alpha}\} + \{\boldsymbol{\beta}\}i, & \{\mathbf{b}\}^* &= \{\boldsymbol{\alpha}\} - \{\boldsymbol{\beta}\}i. \end{aligned}$$

La contribución de esta pareja de soluciones conjugadas en la solución general será, si las afectamos de constantes (escalares) arbitrarias C_1 y C_2 ,

$$\begin{aligned} \{\mathbf{q}(t)\} &= C_1\{\mathbf{b}\}e^{\gamma t} + C_2\{\mathbf{b}\}^*e^{\gamma^* t} \\ &= e^{-st}[C_1(\{\boldsymbol{\alpha}\} + i\{\boldsymbol{\beta}\})e^{i\Omega t} + C_2(\{\boldsymbol{\alpha}\} - i\{\boldsymbol{\beta}\})e^{-i\Omega t}] \end{aligned}$$

Desarrollando la exponencial compleja y considerando tan sólo la parte real de la expresión resultante,

$$\{\mathbf{q}(t)\} = e^{-st}(C_1 + C_2)[\{\boldsymbol{\alpha}\} \cos \Omega t - \{\boldsymbol{\beta}\} \sin \Omega t] \quad (5.55)$$

Para que la expresión anterior permanezca acotada, la parte real de γ , $(-s)$, ha de ser negativa o nula. En caso contrario, el módulo de (5.55) crecería de forma exponencial, en contra de la hipótesis de movimiento acotado y pequeñas oscilaciones. Si $s = 0$ no existirá amortiguamiento para esa frecuencia característica, mientras que si $s > 0$, se producirá un amortiguamiento que provocará que al cabo de un cierto tiempo el valor de (5.55) se haga tan pequeño como se quiera.

La solución general será, por combinación lineal de todas las soluciones del tipo (5.55),

$$\{\mathbf{q}\} = \sum_{k=1}^n B_k e^{-s_k t} (\{\boldsymbol{\alpha}_k\} \cos \Omega_k t - \{\boldsymbol{\beta}_k\} \sin \Omega_k t) \quad (5.56)$$

Esta solución consta pues de un sumatorio de armónicos, cada cual con su fase y frecuencia propias, afectados cada uno de ellos por términos exponenciales decrecientes ($e^{-s_k t}$) que representan la pérdida de energía por el amortiguamiento viscoso. Al cabo de suficiente tiempo el movimiento se detiene en la práctica.

En este caso, la transformación a coordenadas normales exigiría un cambio a ejes principales que diagonalice simultáneamente las tres matrices $[\mathbf{M}]$, $[\mathbf{K}]$, $[\mathbf{C}]$. En general no es posible realizar esta triple diagonalización simultánea. Tan sólo será factible en algunos casos particulares, como por ejemplo, bajo la hipótesis común en dinámica estructural del *amortiguamiento de Rayleigh*, por la que se considera la matriz de amortiguamiento proporcional a las de masas y de rigidez:

$$[\mathbf{C}] = \alpha[\mathbf{M}] + \beta[\mathbf{K}] \quad (5.57)$$

En este caso se comprueba fácilmente que la diagonalización simultánea se alcanza con la misma matriz modal $[\mathbf{A}]$ que se obtuvo en el caso sin amortiguamiento (ecuaciones (5.49) y (5.50), ya que

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}][\mathbf{C}][\mathbf{A}]^T &= \alpha[\mathbf{M}_D] + \beta[\mathbf{K}_D] \\ &= \begin{pmatrix} M_1(\alpha + \beta\omega_1^2) & & & \\ & M_2(\alpha + \beta\omega_2^2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_n(\alpha + \beta\omega_n^2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.58)$$

que es también una matriz diagonal.

Para obtener la matriz modal $[\mathbf{A}]$ se emplearán por tanto los mismos modos normales del problema sin amortiguamiento. Hecha la diagonalización, resultan las ecuaciones desacopladas

$$M_k \ddot{u}_k + M_k \bar{c}_k \dot{u}_k + M_k \omega_k^2 u_k = 0 \quad (k \text{ no sumado}), \quad (5.59)$$

donde $0 < \bar{c}_k = \alpha + \beta\omega_k^2$ son los coeficientes de la matriz diagonal $[\mathbf{M}_D]^{-1}[\mathbf{C}]$ en (5.58). La solución general de cada una de estas ecuaciones de 1 gdl tal como se expuso en el apartado 4.2 es

$$u_k = C_k e^{i\omega'_k t} \quad (5.60)$$

donde C_k es en general un número complejo, al igual que ω'_k . De la misma forma que antes, de esta expresión se considerará tan sólo la parte real.

Sustituyendo en la ecuación (5.59), las ω'_k deben satisfacer

$$-\omega_k'^2 + i\omega_k'\bar{c}_k + \omega_k^2 = 0$$

ecuación de segundo grado que posee dos soluciones,

$$\omega_k' = i \underbrace{\frac{\bar{c}_k}{2}}_{= s_k} \pm \underbrace{\sqrt{\omega_k^2 - \bar{c}_k^2/4}}_{= \Omega_k}$$

Sustituyendo en (5.60) y tomando la parte real,

$$\begin{aligned} u_k(t) &= \Re(C_k e^{i\Omega_k t} + C_k^* e^{-i\Omega_k t}) e^{-s_k t} \\ &= B_k \cos(\Omega_k t - \delta_k) e^{-s_k t}. \end{aligned}$$

Esta ecuación caracteriza a la amplitud modal como un movimiento afectado de una exponencial decreciente, cuya energía disminuye con el tiempo debido al amortiguamiento.

La ecuación (5.59) se puede escribir también en función de las tasas de amortiguamiento respecto al crítico, haciendo el cambio $\bar{c}_k = \alpha + \beta\omega_k^2 = 2\xi_k\omega_k$:

$$\ddot{u}_k + 2\xi_k\omega_k \dot{u}_k + \omega_k^2 u_k = 0 \quad (k \text{ no sumado}); \quad (5.61)$$

En este caso, la solución de cada amplitud modal será $u_k(t) = B_k \cos(\Omega_k t - \delta_k) e^{-\xi_k\omega_k t}$.

Un caso que reviste especial interés en la práctica es aquél en el que se conoce directamente la tasa de amortiguamiento de los modos de vibración, obtenida mediante un análisis modal experimental o a partir de una especificación en una norma, aunque se desconoce la forma exacta que tenga la matriz de amortiguamiento. Supongamos que los amortiguamientos modales unitarios son ξ_k , medidos como razón del amortiguamiento crítico. En este caso puede obtenerse esta matriz mediante

$$[\mathbf{C}] = \sum_{k=1}^n 2\xi_k\omega_k \frac{1}{M_k} ([\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\})(\{\mathbf{a}_k\}^T[\mathbf{M}]). \quad (5.62)$$

En efecto, realizando el producto por los vectores propios en esta matriz resulta una expresión diagonal,

$$\{\mathbf{a}_l\}^T[\mathbf{C}]\{\mathbf{a}_p\} = 2\xi_l\omega_l M_l \delta_{lp} \quad (l \text{ no sumado}). \quad (5.63)$$

La ecuación desacoplada resultante para cada modo será

$$\ddot{u}_k + 2\xi_k\omega_k \dot{u}_k + \omega_k^2 u_k = 0 \quad (k \text{ no sumado}). \quad (5.64)$$

5.3. Oscilaciones forzadas

5.3.1. Oscilaciones sin amortiguamiento; Resonancia

La ecuación matricial incluye en este caso un término independiente, debido a las fuerzas de excitación externas:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{f}(t)\} \quad (5.65)$$

Esta ecuación tiene por solución general una solución particular de la completa (5.65) más la solución general de la homogénea (5.17):

$$\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{q}\}^h + \{\mathbf{q}\}^p \quad (5.66)$$

La solución general de la homogénea es la obtenida anteriormente para las vibraciones libres (5.26).

Para la solución particular de la completa estudiemos el caso concreto en que las fuerzas son armónicas,

$$\{\mathbf{f}(t)\} = \{\mathbf{F}\} \text{sen } \alpha t,$$

siendo $\{\mathbf{F}\}$ un vector de constantes.

Busquemos una solución particular del mismo tipo,

$$\{\mathbf{q}\}^p = \{\mathbf{D}\} \text{sen } \alpha t.$$

El vector de constantes $\{\mathbf{D}\}$ se calcula sustituyendo $\{\mathbf{q}\}^p$ en la ecuación (5.65):

$$(-\alpha^2[\mathbf{M}]\{\mathbf{D}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\}) \text{sen } \alpha t = \{\mathbf{F}\} \text{sen } \alpha t$$

por lo que

$$\{\mathbf{D}\} = (-\alpha^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}])^{-1}\{\mathbf{F}\} \quad (5.67)$$

En el caso en que α coincida con una de las frecuencias propias del sistema ($\alpha = \omega_k$), la matriz a invertir en (5.67) se hace singular y no tiene solución por lo tanto. Esto físicamente equivale a una *resonancia* del sistema, debido a que el modo de vibración afectado absorbe constantemente la energía de excitación suministrada con su misma frecuencia propia, hasta que la amplitud del mismo se hace infinita.

Otra forma de estudiar las oscilaciones forzadas es mediante el análisis modal; haciendo el cambio (5.48) a las coordenadas normales en (5.65) y premultiplicando por la matriz modal $[\mathbf{A}]$,

$$[\mathbf{A}][\mathbf{M}][\mathbf{A}]^T\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{A}][\mathbf{K}][\mathbf{A}]^T\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{f}(t)\} \quad (5.68)$$

Los productos de matrices de esta expresión se simplifican empleando (5.49) y (5.50),

$$\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\boldsymbol{\Omega}]^2\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{M}_D]^{-1}[\mathbf{A}]\{\mathbf{f}(t)\} \quad (5.69)$$

donde hemos denominado $[\boldsymbol{\Omega}] = \text{diag}(\omega_1 \dots \omega_n)$ a la matriz diagonal con las frecuencias propias. En componentes,

$$\ddot{u}_k + \omega_k^2 u_k = M_k^{-1} \eta_k(t) \quad (k = 1 \dots n \text{ no sumado}) \quad (5.70)$$

donde los coeficientes $\eta_k(t)$ representan

$$\eta_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} a_{kj} f_j(t) \quad (k \text{ no sumado}), \quad (5.71)$$

denominándose “*fuerzas modales*”. Se pueden interpretar también como las proyecciones del vector de fuerzas sobre cada modo de vibración,

$$\eta_k = \{\mathbf{a}_k\}^T \{\mathbf{f}\} = a_{kj} f_j. \quad (5.72)$$

Resulta por tanto un conjunto de n ecuaciones desacopladas (5.70) de 1 grado de libertad cada una, que podremos resolver independientemente.

En el caso particular en que las fuerzas sean armónicas,

$$\{\mathbf{f}(t)\} = \{\mathbf{F}\} \text{sen } \alpha t \quad \Leftrightarrow \quad f_j(t) = F_j \text{sen } \alpha t, \quad (5.73)$$

resultando las ecuaciones

$$\ddot{u}_k + \omega_k^2 u_k = M_k^{-1} \eta_k(t) = \Gamma_k \text{sen } \alpha t \quad (k \text{ no sumado}), \quad (5.74)$$

denominándose $\Gamma_k = M_k^{-1} \{\mathbf{a}_k\}^T \{\mathbf{F}\}$ el “*coeficiente de participación modal*” de $\{\mathbf{F}\}$ en el modo k .

Se producirá resonancia si coincide la frecuencia de la excitación con alguna frecuencia propia ($\alpha = \omega_k$ para fuerzas armónicas del tipo arriba descrito). En este caso la amplitud de ese modo tendería a infinito, en el caso teórico en que no hubiera amortiguamiento. En los casos reales deberá considerarse el amortiguamiento que conducirá a un valor finito aunque elevado de la amplitud modal (ver apartado siguiente). Además en cualquier caso interviene la participación modal Γ_k que puede ser mayor o menor.

En la práctica los coeficientes de participación modal de las fuerzas habituales suelen ser altos para los modos más bajos (ω_k pequeñas), y progresivamente más pequeños para los modos altos (ω_k grandes). Es por esto que los modos más bajos suelen ser los que más importancia tienen en la dinámica estructural, al ser los que concentran la mayor parte de la energía en las vibraciones. A menudo se hace la simplificación consistente en considerar únicamente un número limitado de modos de vibración, despreciando los de frecuencias más altas. Esto resulta de gran utilidad cuando los modelos de cálculo poseen un número elevado de grados de libertad, ya que se llega a tener decenas de miles para algunos cálculos tridimensionales reales.

5.3.2. Oscilaciones con amortiguamiento; régimen transitorio y permanente

En este caso la ecuación matricial del problema es la (5.12) completa,

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{f}(t)\}. \quad (5.75)$$

En el caso en que la matriz de amortiguamiento $[\mathbf{C}]$ sea diagonalizable simultáneamente con $[\mathbf{M}]$ y $[\mathbf{K}]$ tal y como se ha considerado en el apartado 5.2.6, se podrá hacer una descomposición modal resultando n ecuaciones desacopladas de un grado de libertad:

$$\ddot{u}_k + 2\xi_k\omega_k\dot{u}_k + \omega_k^2 u_k = M_k^{-1}\eta_k(t) \quad (k = 1\dots n \text{ no sumado}). \quad (5.76)$$

La solución de estas ecuaciones proporciona el procedimiento denominado *análisis modal* que suele ser en la práctica el más conveniente. Además de por el desacoplamiento de las ecuaciones, como ya se ha comentado antes no suele ser necesario considerar más que un número reducido de modos.

Estudiamos a continuación el régimen permanente y transitorio a partir de la ecuación matricial (5.75). Al igual que en el apartado 5.3.1, la solución general se podrá expresar como una solución particular de la completa más la solución general de la homogénea (5.11):

$$\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{q}\}^p + \{\mathbf{q}\}^h \quad (5.77)$$

La solución de la homogénea corresponde al caso de vibraciones libres con amortiguamiento, y tiene un valor apreciable sólo durante un tiempo limitado llamado *régimen transitorio*, desapareciendo al cabo del tiempo. Esta solución se ha estudiado antes, en el apartado 5.2.6.

La solución particular de la completa es la que define el llamado *régimen permanente*. Supongamos el caso particular más significativo, una excitación armónica del tipo

$$\begin{aligned} \{\mathbf{f}(t)\} &= \Re(\{\mathbf{F}\}e^{i\alpha t}) \\ &= \{\mathbf{F}\} \cos \alpha t \end{aligned}$$

Buscaremos una solución particular del tipo $\{\mathbf{q}\}^p = \{\mathbf{D}\}e^{i\alpha t}$, para lo que sustituimos esta expresión en (5.12) obteniendo

$$(-\alpha^2[\mathbf{M}] + i\alpha[\mathbf{C}] + [\mathbf{K}])\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (5.78)$$

Esta ecuación lineal se resuelve mediante la regla de Cramer, obteniendo los elementos del vector solución $\{\mathbf{D}\}$ como:

$$D_j = \frac{\det_j(\alpha)}{\det(\alpha)}$$

donde $\det(\alpha) = | -\alpha^2[\mathbf{M}] + i\alpha[\mathbf{C}] + [\mathbf{K}] |$, y $\det_j(\alpha)$ es el determinante de la matriz de coeficientes anterior en la que se ha sustituido la columna j -ésima por el término independiente $\{\mathbf{F}\}$. No hace falta repetir que, de estas expresiones complejas, al final se considerará sólo la parte real.

Los valores de la frecuencia de excitación α que hacen mínimo el denominador, $\det(\alpha)$, son los que producen resonancia en el sistema, para el régimen permanente que es el más significativo. Debido al amortiguamiento, aquí la amplitud de oscilación no tiende a infinito, sino que se mantiene acotada, aunque con valores elevados que pueden provocar la pérdida de linealidad o incluso la rotura del sistema.

Si el amortiguamiento es suficientemente pequeño, como suele ocurrir en numerosas aplicaciones prácticas, las frecuencias de resonancia tienen un valor aproximadamente igual a las frecuencias propias sin amortiguamiento ω_k . A menudo será válido también el considerar de forma aproximada que el régimen permanente es el que sale de la solución particular a la ecuación sin amortiguamiento (5.67). Esto equivaldría a considerar que existe un pequeño amortiguamiento (inevitable), pero que para el cálculo de régimen permanente se puede despreciar el valor del mismo, lo que puede ser una aproximación válida en numerosos casos prácticos de la dinámica estructural.

5.4. Métodos para la obtención de modos y frecuencias propias

En sistemas con pocos grados de libertad (2 ó 3) la obtención de frecuencias propias y modos normales de vibración se puede realizar manualmente, resolviendo la ecuación característica y el problema de autovalores asociado. Para casos con mayor número de grados de libertad existen otros procedimientos, susceptibles de tratamiento numérico y resolución en el ordenador. Expondremos aquí un método basado en la “deflacción” de matrices (*Método de Stodola*), aplicable a casos con un número moderado de grados de libertad. Para los casos con un elevado número de grados de libertad, existen procedimientos más eficaces, como los métodos de iteración por subespacios o el método de Lanczos, que pueden consultarse en la bibliografía de métodos numéricos en mecánica computacional y elementos finitos¹¹.

Supongamos, para no complicar la exposición, que todos los autovalores

¹¹ver p.ej.: T.J.R. Hughes, *The Finite Element Method*, capítulo 10, Prentice-Hall Inc., 1987; K.J. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, 1982.

son distintos y no nulos. El problema de autovalores definido por

$$(-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}])\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{0}\}$$

se puede expresar también, multiplicando por $[\mathbf{K}]^{-1}$, como

$$[\mathbf{D}]\{\mathbf{u}\} = \mu\{\mathbf{u}\}$$

siendo

$$[\mathbf{D}] \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{K}]^{-1} \cdot [\mathbf{M}]$$

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} 1/\omega^2$$

Empezamos por tomar un vector $\{\mathbf{u}_1\}$ cualquiera, que será combinación lineal de los vectores propios o modos normales de vibración, ya que como vimos éstos forman una base de \mathbb{R}^n . Si multiplicamos $\{\mathbf{u}_1\}$ por la matriz $[\mathbf{D}]$, cada componente en esta base se verá multiplicada por el autovalor μ_i correspondiente. La componente en la dirección del mayor autovalor, $\mu = \mu_1$ (supuesto $\mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > \dots > \mu_n$), se verá multiplicada por un valor mayor que las demás. Al vector resultante lo denominamos $\{\mathbf{u}_2\}$

$$\{\mathbf{u}_2\} = [\mathbf{D}]\{\mathbf{u}_1\}$$

Repitiendo el proceso sucesivamente, se obtienen una sucesión de vectores $\{\mathbf{u}_n\}$:

$$\{\mathbf{u}_3\} = [\mathbf{D}]\{\mathbf{u}_2\}; \quad \{\mathbf{u}_4\} = [\mathbf{D}]\{\mathbf{u}_3\}; \quad \dots \quad \{\mathbf{u}_n\} = [\mathbf{D}]\{\mathbf{u}_{n-1}\}$$

En el límite ($n \rightarrow \infty$), en el vector $\{\mathbf{u}_n\}$ predominará el autovector correspondiente al máximo autovalor, μ_1 (es decir, para el mínimo valor de la frecuencia que será ω_1). Hemos de tomar la precaución de normalizar el vector $\{\mathbf{u}_n\}$ tras cada iteración, para evitar valores numéricos excesivamente grandes. Cuando se hayan realizado suficientes iteraciones será por tanto

$$[\mathbf{D}]\{\mathbf{u}_n\} \approx \mu\{\mathbf{u}_n\}$$

con un error menor que una tolerancia prefijada. Entonces se adopta $\mu_1 = \mu$ como autovalor, y $\{\mathbf{u}_n\}$ como vector propio correspondiente. La frecuencia propia es $\omega_1 = 1/\sqrt{\mu_1}$, y llamamos $\{\mathbf{a}_1\}$ al vector propio una vez normalizado,

$$\{\mathbf{a}_1\} = \frac{\{\mathbf{u}_n\}}{\sqrt{\{\mathbf{u}_n\}^T [\mathbf{M}] \{\mathbf{u}_n\}}}$$

Consideramos ahora la nueva matriz

$$[\mathbf{D}]_2 = [\mathbf{D}] - \mu_1 \underbrace{\{\mathbf{a}_1\}\{\mathbf{a}_1\}^T}_{n \times n} \cdot [\mathbf{M}] \quad (5.79)$$

Vemos que, al multiplicar esta matriz por $\{\mathbf{a}_1\}$ el resultado se anula:

$$[\mathbf{D}]_2\{\mathbf{a}_1\} = [\mathbf{D}]\{\mathbf{a}_1\} - \mu_1\{\mathbf{a}_1\} \cdot 1 = \{\mathbf{0}\}$$

mientras que para los otros vectores propios ($k \neq 1$) se obtiene el mismo resultado que antes,

$$[\mathbf{D}]_2\{\mathbf{a}_k\} = [\mathbf{D}]\{\mathbf{a}_k\} - \mu_1\{\mathbf{a}_1\} \overbrace{\{\mathbf{a}_1\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\}}^{\delta_{1k}=0} = [\mathbf{D}]\{\mathbf{a}_k\}$$

Repitiendo el proceso de deflacción con esta matriz $[\mathbf{D}]_2$, obtendremos el autovalor/autovector siguiente ($\mu_2 = 1/\omega_2^2$).

Una vez obtenido, normalizaríamos el vector propio y obtendríamos la matriz $[\mathbf{D}]_3$ de la misma forma que (5.79). Proseguiríamos así sucesivamente, hasta obtener todos los autovalores y vectores propios.

Este procedimiento tiene la ventaja que los modos se obtienen de forma sucesiva, comenzando por los de frecuencias propias más bajas. Estos suelen ser los más importantes en cuanto a su participación en la solución real, por lo que a menudo basta con obtener los m modos más bajos. Este método permite calcular sólo los modos más importantes, deteniendo el proceso cuando se ha calculado el modo m .