

# Capítulo 2

## Dinámica analítica

### Índice

---

<b>2.1. Coordenadas generalizadas</b> . . . . .	<b>2.2</b>
<b>2.2. Ecuaciones de Lagrange</b> . . . . .	<b>2.7</b>
2.2.1. El principio de D'Alembert en coordenadas generalizadas . . . . .	2.7
2.2.2. Forma básica de las ecuaciones de Lagrange . . . . .	2.9
2.2.3. Caso en que las fuerzas provienen de un potencial. Función Lagrangiana . . . . .	2.11
2.2.4. Desarrollo explícito de las ecuaciones del movimiento . . . . .	2.17
2.2.5. Integrales primeras . . . . .	2.19
2.2.6. Sistemas naturales . . . . .	2.24
2.2.7. Sistemas con ligaduras . . . . .	2.27

---

La dinámica analítica comprende una serie de métodos cuya característica principal es el tratamiento puramente abstracto, analítico, de los sistemas mecánicos. De esta forma, se separan al máximo las consideraciones físicas y geométricas necesarias para definir el movimiento, de las puramente matemáticas para plantear y solucionar las ecuaciones. Las primeras son necesarias para formular las coordenadas, enlaces y magnitudes cinéticas de un sistema dado; una vez realizada definición de un sistema mediante la adecuada selección de las magnitudes anteriores, los métodos de la mecánica analítica permiten obtener las ecuaciones de la dinámica (o las condiciones de la estática en su caso) de forma casi automática.

El iniciador de estas técnicas fue Joseph Louis Lagrange, a partir de la

publicación de su obra *Mécanique Analytique*<sup>1</sup> en 1788. Lagrange introdujo numerosos conceptos empleados hoy día en la mecánica y en las matemáticas: formuló las ecuaciones que llevan su nombre para la dinámica; colocó sobre bases sólidas el cálculo de variaciones; fue el inventor de las palabras derivada y potencial; etc.

Otra figura clave en la mecánica analítica fue William Rowan Hamilton<sup>2</sup>, ya en el siglo XIX (1805-1865). En su obra buscó una gran generalidad, desarrollando una teoría por la que el movimiento se puede reducir a la «búsqueda y diferenciación de una sola función» (la integral de la acción  $S$ ). El punto de vista de Hamilton resultó muy fértil, resultando básico para otros campos como la mecánica cuántica, desarrollada posteriormente en el siglo XX.

## 2.1. Coordenadas generalizadas

Un planteamiento básico de la mecánica analítica es la descripción de los sistemas mediante «coordenadas generalizadas».

DEFINICIÓN: *Se denominan coordenadas generalizadas a un conjunto cualquiera de parámetros  $\{q_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ , que sirven para determinar de manera unívoca la configuración del sistema.*

Estos parámetros en principio pueden ser cualesquiera, sin necesitar ser homogéneos en cuanto a dimensiones. Por ejemplo, se pueden mezclar longitudes, ángulos, etc. Una idea clave, subyacente en la elección de coordenadas generalizadas, es que éstas pueden englobar en su propia elección los enlaces del sistema (todos o al menos una parte de ellos). De esta forma se consigue una doble ventaja: por una parte, el número de parámetros es menor que el correspondiente directamente a las coordenadas de todas las partículas. Por otra, el número de ecuaciones de enlace se ve igualmente reducido.

Un conjunto de coordenadas  $\{q_i\}$  se denomina «libre» cuando se pueden variar de forma independiente entre sí; es decir, si las variaciones de las mismas,  $\{\delta q_i\}$ , se pueden escoger de forma arbitraria. Caso de que no sea así, será porque existe alguna ligadura que relacione dichas coordenadas, bien de tipo holónomo o no holónomo.

Cuando las coordenadas generalizadas no sean libres, se deberá a que

<sup>1</sup>En ella, Lagrange se vanagloriaba de que no había ninguna figura, como botón de muestra de que los métodos propuestos estaban libres de casuística geométrica o topológica.

<sup>2</sup>Los métodos de la dinámica hamiltoniana no se tratan en este curso breve, pudiéndose consultar de forma resumida en *Curso de Mecánica*, J.M. Goicolea (2010), capítulo 12.

subsisten condiciones de enlace formuladas de manera explícita. Estas se traducirán en relaciones entre las  $q_i$  (y también sus derivadas  $\dot{q}_i$  para enlaces no holónomos). Debido a estas ligaduras el número de grados de libertad es en realidad menor que  $n$ . Por el contrario, si las coordenadas son libres, su número es precisamente el número de grados de libertad del sistema.

Por ejemplo, en el sistema plano rígido de la figura 2.1, al tener una articulación, basta con una única coordenada angular ( $n = 1$ ;  $q_1 \equiv \theta$ ). En esta elección ya quedan englobados implícitamente los enlaces, tanto los internos (ligaduras de sólido rígido) como los externos (articulación). El sistema tiene un grado de libertad.

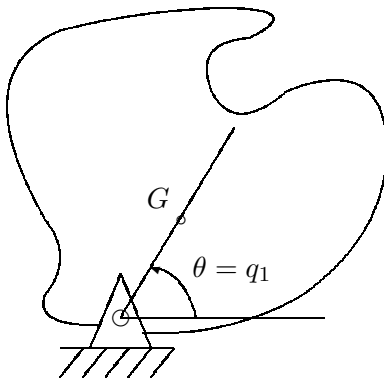


Figura 2.1: El movimiento del sólido articulado de la figura queda descrito por una única coordenada generalizada, el ángulo  $\theta$ . De esta forma se engloban todos los enlaces, tanto internos (ligaduras de sólido rígido) como externos (rótula cilíndrica en  $O$ ).

Supongamos ahora el caso general de un sistema con un número finito de partículas ( $N$ ), sujeto a  $m$  ligaduras holónomas y  $k$  anholónomas. Será posible su descripción mediante un conjunto más reducido de  $n = 3N - m$  parámetros o coordenadas generalizadas. Esquemáticamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{m_i, \mathbf{r}_i, i = 1, \dots, N\} \\ + \\ m \text{ enlaces holónomos} \\ + \\ k \text{ enlaces anholónomos} \end{array} \right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{m_i, i = 1, \dots, N\}, \{q_j, j = 1, \dots, n\}. \\ + \\ k \text{ enlaces anholónomos} \end{array} \right.$$

Esta reducción en el número de coordenadas se efectúa gracias a la eliminación de los  $m$  enlaces holónomos, que quedarán implícitos en la elección de

las coordenadas generalizadas. Por el contrario, los  $k$  enlaces anholónomos no es posible eliminarlos, debiendo quedar planteados de forma expresa.

Un caso extremo de reducción en el número de coordenadas es el del sólido rígido. Considerado como un medio continuo, es infinitamente subdivisible, teniendo por tanto un número infinito de partículas y por tanto de coordenadas. Sin embargo, recordemos (apartado 1.2) que los enlaces internos del sólido (distancia constante entre dos partículas cualesquiera) permiten reducir el número de coordenadas generalizadas del sólido a 6.

En general, existirán unas relaciones entre los vectores de posición de cada partícula y las coordenadas generalizadas del tipo:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_j, t) \quad (i = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, n) \quad (2.1)$$

A los vectores de posición de cada partícula  $\{\mathbf{r}_i\}$  los denominaremos, por extensión, «coordenadas vectoriales». Está claro que éstas son equivalentes a definir las  $3N$  coordenadas cartesianas correspondientes. Por otra parte, éstas sólo serán libres para un sistema sin ligadura ninguna; en cualquier otro caso, no formarán un conjunto libre.

Podrá existir dependencia del tiempo en la definición de las coordenadas generalizadas (2.1) cuando se hayan tomado sistemas de coordenadas móviles, o bien cuando haya enlaces móviles.

A partir de las relaciones (2.1), las velocidades se obtienen derivando:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}, \quad (2.2)$$

llamándose por extensión «velocidades generalizadas» a los términos  $\dot{q}_j = dq_j/dt$ .

**EJEMPLO 2.1:** Se considera un sistema formado por dos masas puntuales ( $m_1, m_2$ ) unidas entre sí por un hilo sin masa de longitud  $\ell$ , estando  $m_1$  a su vez unida a un punto fijo  $O$  por un hilo de igual longitud (*péndulo doble*). El conjunto se mueve en un plano vertical. Obtener los grados de libertad y las las coordenadas libres del sistema así como la expresión de las coordenadas cartesianas en función de ellas.

*Solución.* El sistema tiene dos partículas en un plano, cuya configuración en principio estará fijada por sus coordenadas  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ . Existen dos enlaces holónomos que definen la distancia fija  $\ell$  entre  $m_1$  y  $O$  y entre  $m_2$  y  $m_1$ :

$$\begin{aligned} \ell^2 &= x_1^2 + y_1^2; \\ \ell^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \end{aligned}$$

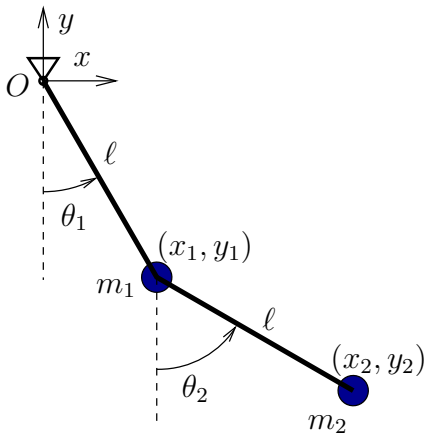


Figura 2.2: Definición de coordenadas y grados de libertad en un péndulo doble

Por tanto el sistema tiene dos grados de libertad. Al tratarse de un sistema con enlaces holónomos es posible encontrar un conjunto de 2 coordenadas generalizadas libres. En efecto, podemos considerar para ello los ángulos  $(\theta_1, \theta_2)$ . En función de ellos las coordenadas cartesianas se expresan como:

$$\begin{aligned} x_1 &= l \operatorname{sen} \theta_1, & y_1 &= -l \cos \theta_1; \\ x_2 &= l \operatorname{sen} \theta_1 + l \operatorname{sen} \theta_2, & y_2 &= -l \cos \theta_1 - l \cos \theta_2. \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 2.2: Se considera ahora dos masas  $m_0$  y  $m_1$  unidas por un hilo sin masa de longitud constante  $l$ . La masa  $m_0$  se mueve según una recta horizontal con velocidad impuesta  $v$ , mientras que  $m_1$  permanece en el mismo plano vertical. Obtener los grados de libertad y las las coordenadas libres del sistema así como la expresión de las coordenadas cartesianas en función de ellas.

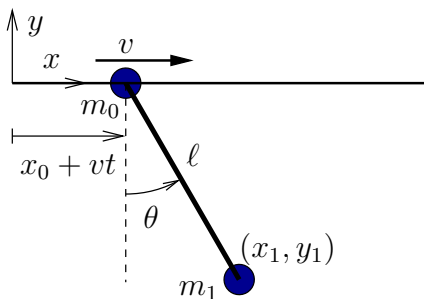


Figura 2.3: Definición de coordenadas y grados de libertad en un péndulo cuya base tiene un movimiento prescrito, con velocidad constante  $v$ . Se considera que en el instante inicial la posición de  $m_0$  es  $x_0$ .

*Solución.* El sistema consta en principio de dos masas, aunque la primera tiene su movimiento totalmente prescrito, por lo cual no es objeto de estudio mediante las ecuaciones de la dinámica. La otra masa tiene dos coordenadas cartesianas  $(x_1, y_1)$  sujetas a un enlace holónimo,  $\ell^2 = x_1^2 + x_2^2$ , por lo cual el sistema posee un solo grado de libertad. Podemos tomar como coordenada libre el ángulo  $\theta$ , expresándose:

$$x_1 = x_0 + vt + \ell \operatorname{sen} \theta; \quad y_1 = -\ell \cos \theta.$$

Se observa en la ecuación anterior que la expresión de  $x_1$  depende explícitamente del tiempo. Esto es debido al enlace móvil (movimiento impuesto) de  $m_0$ . Asimismo, podemos considerar que el sistema de coordenadas (generalizadas) para definir la posición de  $m_1$  es móvil, ya que el origen de las coordenadas polares está en  $m_0$ .  $\square$

**EJEMPLO 2.3:** Establecer los grados de libertad, coordenadas generalizadas y enlaces de un sistema formado por dos partículas  $A$  y  $B$ , unidas por una varilla rígida sin masa de longitud  $l$ . El conjunto se mueve sobre un plano horizontal liso, existiendo en  $A$  un pequeño cuchillo que obliga a que ese punto se mueva según la dirección de la varilla (figura 2.4).

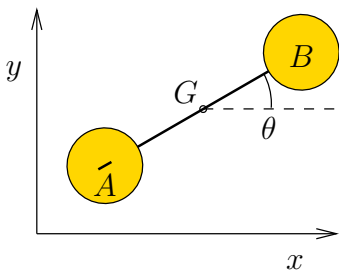


Figura 2.4: Sistema de dos partículas  $A$  y  $B$ , unidas rígidamente, con cuchillo en el apoyo de  $A$  que materializa un enlace anholónimo.

*Solución.* Al estar en un plano, se precisan en principio 4 coordenadas cartesianas para definir la configuración,  $\{x_A, y_A, x_B, y_B\}$ . Estas se hallan sujetas a 2 condiciones de enlace. Primeramente, el enlace holónimo correspondiente a la varilla rígida entre  $A$  y  $B$

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2.$$

Por otra parte, la condición de apoyo mediante el cuchillo de cargas en  $A$  resulta en imponer que la velocidad de este punto lleve la dirección de la varilla, lo que constituye un enlace anholónimo:

$$-\dot{x}_A(y_B - y_A) + \dot{y}_A(x_B - x_A) = 0.$$

El sistema posee por tanto 2 grados de libertad. Podrían escogerse coordenadas generalizadas que eliminen el enlace holónimo (aunque no el anholónimo). Tomaremos para ello las coordenadas del centro de masas  $(x, y)$  y el ángulo  $\theta$  formado con el eje  $x$ , un total de tres coordenadas. En función de éstas, la velocidad de  $A$  se expresa como  $\mathbf{v}_A = (\dot{x} + \frac{l}{2}\dot{\theta} \sin \theta)\mathbf{i} + (\dot{y} - \frac{l}{2}\dot{\theta} \cos \theta)\mathbf{j}$ , y la normal a la varilla es  $\mathbf{n} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$ . La condición del enlace es  $\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n} = 0$ , resultando

$$-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta - \frac{l}{2}\dot{\theta} = 0. \quad (2.3)$$

De esta forma, el sistema queda definido por tres coordenadas generalizadas sujetas a una ecuación de enlace anholónimo. A pesar de que tiene dos grados de libertad, debido a la naturaleza de este enlace no es posible definir explícitamente un conjunto de dos coordenadas libres.  $\square$

## 2.2. Ecuaciones de Lagrange

### 2.2.1. El principio de D'Alembert en coordenadas generalizadas

Sea un sistema sometido a enlaces lisos. El principio de D'Alembert (1.94) expresa:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{f}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad \forall \{\delta \mathbf{r}_i\} \text{ compatibles.} \quad (2.4)$$

En esta expresión  $\mathbf{f}_i$  incluyen sólo las fuerzas activas, excluyendo las reacciones de los enlaces lisos.

Considerando una variación « $\delta$ » (es decir, infinitesimal y a tiempo constante) de las coordenadas en (2.1), se obtienen los desplazamientos virtuales:

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.5)$$

Nótese que en esta expresión no existe término  $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \delta t$ , ya que  $\delta t = 0$  para un desplazamiento virtual. La variación  $\delta$  se realiza en un instante fijo de tiempo, no a lo largo del movimiento. En esto difiere de los desplazamientos infinitesimales reales a lo largo del movimiento, que a partir de (2.2) serían

$$d\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} dt.$$

Sustituyendo (2.5) en (2.4) y reorganizando el orden de las sumas  $i, j$ :

$$\sum_{j=1}^n \left[ \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0, \quad \forall \{\delta q_j\} \text{ compatibles.} \quad (2.6)$$

Analicemos con mayor detalle cada uno de los dos términos dentro del corchete en esta expresión. El primero define unos coeficientes escalares que llamaremos «Fuerzas generalizadas»:

$$Q_j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

Es inmediato comprobar que  $Q_j$  son precisamente los coeficientes de  $\delta q_j$  en la expresión del trabajo virtual  $\delta W$ :

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \sum_j^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \quad (2.8)$$

El segundo término de (2.6) se puede expresar como:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \quad (2.9)$$

Para lo que sigue, debemos precisar que consideraremos la dependencia funcional de todas las magnitudes cinéticas sobre el conjunto de variables independientes  $(q_j, \dot{q}_j, t)$ . Esta aclaración precisa el significado de las derivadas parciales. Así,  $\partial/\partial q_j(\cdot)$  indicará la derivada parcial respecto de la coordenada  $q_j$ , manteniéndose constantes el resto de coordenadas  $q_k$  ( $k \neq j$ ) así como las velocidades  $\dot{q}_j$  y el tiempo  $t$ .

Para continuar el desarrollo de la expresión (2.9), establezcamos antes dos igualdades que será necesario emplear:

$$1. \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$

*Demostración.* En efecto, desarrollando el primer término,

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \overbrace{\left[ \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right]}^{\dot{\mathbf{r}}_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta_{kj} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad \square$$



$$2. \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}.$$

*Demostración.* En efecto, desarrollando ambos términos por separado:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j \partial t}; \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial \dot{q}_j}, \end{aligned}$$

siendo ambas expresiones iguales, por la igualdad de las derivadas cruzadas.  $\square$

Empleando estos dos resultados y la definición de energía cinética,  $T \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$ , la ecuación (2.9) resulta:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

Finalmente, empleando (2.7) y (2.10), el principio de D'Alembert (2.4) queda expresado en coordenadas generalizadas como:

$$\boxed{\sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0, \quad \forall \{\delta q_j\} \text{ compatibles}} \quad (2.11)$$

Esta expresión, al tratarse del principio de D'Alembert, puede ser considerada por tanto como *ecuación fundamental de la dinámica*.

Conviene notar que en (2.11) no se emplean fuerzas físicas en ningún término. Tan sólo entran los coeficientes  $Q_j$ , *fuerzas generalizadas*, calculadas directamente a partir de la expresión (2.7) o como coeficientes del trabajo virtual  $\delta W$  (2.8) según se ha dicho. Al igual que en el principio de D'Alembert, en la definición de  $Q_j$  tampoco intervienen las fuerzas de reacción de los enlaces lisos, que no realizan trabajo virtual.

### 2.2.2. Forma básica de las ecuaciones de Lagrange

La expresión (2.11) es completamente general por lo que se puede aplicar a cualquier sistema, tanto con enlaces holónomos como no holónomos. En el

caso en que *todos los enlaces sean holónomos*, será posible siempre establecer un conjunto de coordenadas libres  $\{q_j\}$ , en el que las variaciones  $\{\delta q_j\}$  se puedan escoger de manera arbitraria, manteniendo la compatibilidad con los enlaces. En este caso, (2.11) equivale a enunciar que cada uno de los coeficientes de las  $\{\delta q_j\}$  ha de anularse:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, \dots, n).} \quad (2.12)$$

Estas expresiones son las llamadas *ecuaciones de Lagrange*, en su forma básica.

OBSERVACIONES:

- En (2.12) existe una ecuación por cada grado de libertad, por lo que la elección de coordenadas generalizadas libres conduce directamente al mínimo número de ecuaciones dinámicas.
- Se trata de ecuaciones diferenciales de segundo orden (al existir derivadas temporales de los términos  $\partial T / \partial \dot{q}_j$ , que dependen, a su vez, de  $\dot{q}_j$ ).
- De las ecuaciones (2.12) han quedado eliminadas todas las reacciones de enlace que no realizan trabajo virtual, correspondientes a los enlaces lisos. Esto contrasta con las ecuaciones procedentes de los teoremas Newtonianos en las que, en principio, deben considerarse también estas reacciones.
- Una vez evaluadas las expresiones de  $T$  y de  $Q_j$ , las ecuaciones de Lagrange se pueden obtener de forma automática sin más que aplicar las reglas analíticas de derivación correspondientes a (2.12). Es posible incluso automatizar su obtención mediante una programación adecuada de sistemas de matemática simbólica, como MAPLE, MATHEMATICA, MACSYMA, etc.
- El significado físico del término  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right)$  en (2.12) es el de las fuerzas de inercia. Para comprobarlo, tomemos como coordenadas las propias coordenadas vectoriales  $\mathbf{r}_j$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j} \right) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j} \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) \right] = \frac{d}{dt} (m_j \dot{\mathbf{r}}_j) = m_j \ddot{\mathbf{r}}_j.$$

- Los términos  $\partial T/\partial q_j$  pueden interpretarse como fuerzas ficticias procedentes de la elección de coordenadas generalizadas  $\{q_j\}$ . En caso de que éstas sean simplemente las componentes cartesianas de los vectores  $\{\mathbf{r}_i\}$ , desaparecerían. Estas fuerzas se añaden a las fuerzas generalizadas  $Q_j$  en la dirección de  $q_j$ .
- En el caso en que las coordenadas  $\{q_j\}$  no sean libres, sus variaciones  $\{\delta q_j\}$  no pueden ser arbitrarias, y no es posible llegar a ecuaciones como las (2.12). Es necesario partir de la ley fundamental (2.11) y emplear técnicas especiales de resolución, según se discute en el apartado 2.2.7.

### 2.2.3. Caso en que las fuerzas provienen de un potencial. Función Lagrangiana

Si las fuerzas aplicadas proceden de un potencial  $V$ ,

$$\mathbf{f}_i = -\mathbf{grad}_i V = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i},$$

las fuerzas generalizadas tendrán entonces la expresión:

$$Q_j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}. \quad (2.13)$$

En lo que sigue, admitimos la hipótesis de que el potencial  $V$  depende de las coordenadas y posiblemente del tiempo<sup>3</sup>, pero no de las velocidades<sup>4</sup>:

$$V = V(q_j, t) = V(\mathbf{r}_i, t).$$

Sustituyendo (2.13) y agrupando términos, las ecuaciones de Lagrange (2.12) se pueden escribir como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

<sup>3</sup>Ya se ha comentado (apartado 1.1.3) que si el potencial no es constante (es decir,  $\partial V(\mathbf{r}_i, t)/\partial t \neq 0$ ), las fuerzas no son conservativas a pesar de provenir de un potencial.

<sup>4</sup>En caso de existir fuerzas de tipo electromagnético, esta suposición no es válida, ya que las fuerzas dependen de la velocidad con la que se mueven las partículas con carga. Es posible definir un potencial generalizado dependiente de la velocidad para este caso, y establecer las ecuaciones de Lagrange correspondientes, aunque que no trataremos aquí este aspecto para no complicar el desarrollo.

Se define la *función Lagrangiana* como:

$$L(q_j, \dot{q}_j, t) \stackrel{\text{def}}{=} T(q_j, \dot{q}_j, t) - V(q_j, t);$$

al no depender  $V$  de las velocidades, se verifica  $\partial T / \partial \dot{q}_j = \partial L / \partial \dot{q}_j$ . De esta forma, las ecuaciones quedan finalmente:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, \dots, n).} \quad (2.14)$$

Estas expresiones constituyen las *ecuaciones de Lagrange* en su forma estándar, aplicables para sistemas en que las fuerzas provienen de un potencial.

Es necesario comprender la importancia de la función Lagrangiana  $L$  en la caracterización dinámica de un sistema: basta con conocer su expresión,  $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ , para poder determinar a partir de ella las ecuaciones dinámicas (2.14); toda la información dinámica del sistema está por tanto contenida en la estructura de  $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ .

**EJEMPLO 2.4:** Sea el problema de Poggendorf (ver ejemplo 1.8). Resolver por los métodos de la dinámica analítica, obteniendo las ecuaciones de Lagrange.

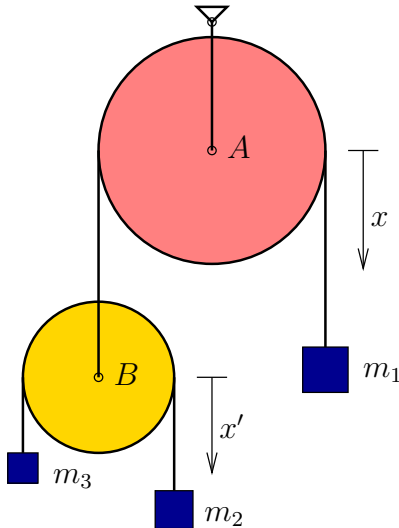


Figura 2.5: Ejemplo 2.4; Problema de Poggendorf.

*Solución.* El sistema es conservativo, ya que las poleas son lisas y sólo actúa la gravedad. La función Lagrangiana es:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2 + m_1gx_1 + m_2gx_2 + m_3gx_3. \quad (2.15)$$

El sistema tiene en realidad dos grados de libertad sólo, ya que existe un enlace holónomo (1.97), que permite escribir:

$$x_3 = -2x_1 - x_2; \quad \dot{x}_3 = -2\dot{x}_1 - \dot{x}_2. \quad (2.16)$$

Eliminando  $\dot{x}_3$  de (2.15), se expresa la Lagrangiana en función de coordenadas libres:

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3(2\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 + m_1gx_1 + m_2gx_2 - m_3g(2x_1 + x_2). \quad (2.17)$$

Las ecuaciones de Lagrange se obtienen calculando las derivadas de  $L$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_1} \Rightarrow (m_1 + 4m_3)\ddot{x}_1 + 2m_3\ddot{x}_2 = m_1g - 2m_3g; \quad (2.18)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_2} \Rightarrow (m_2 + m_3)\ddot{x}_2 + 2m_3\ddot{x}_1 = m_2g - m_3g. \quad (2.19)$$

Estas ecuaciones coinciden con las que se obtuvieron antes (1.101) mediante la aplicación directa del principio de D'Alembert.  $\square$

EJEMPLO 2.5: Para el problema del semidisco calculado anteriormente mediante las ecuaciones de Newton-Euler (1.6), obtener la Lagrangiana y la ecuación de Lagrange en función del grado de libertad  $\theta$  (figura 2.6).

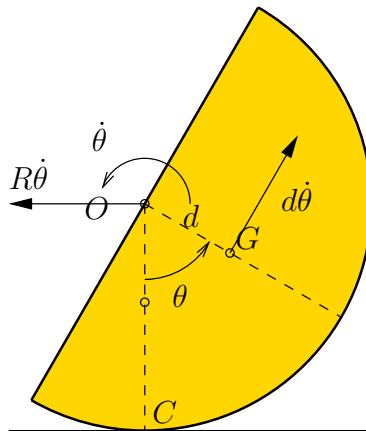


Figura 2.6: Ejemplo 2.5 . Semidisco que rueda sin deslizar en una configuración genérica, definida por el ángulo  $\theta$ . La distancia del centro de masas  $G$  vale  $d = \frac{4R}{3\pi}$ .

*Solución.* El sistema es conservativo, ya que no se produce deslizamiento en la base y las únicas fuerzas que trabajan son las de la gravedad. Está definido por un único grado de libertad ( $\theta$ ), ya que la condición de rodadura restringe dos grados de libertad de los teóricos tres que tendría un sólido rígido en movimiento plano.

La función Lagrangiana es

$$L = T - V = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 - Mgy_G,$$

siendo

$$\begin{aligned} I_G &= \left( \frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right) MR^2; \\ y_G &= R - \frac{4R}{3\pi} \cos \theta; \\ v_G^2 &= R^2\dot{\theta}^2 + \left( \frac{4R}{3\pi} \right)^2 \dot{\theta}^2 - 2R\frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2 \cos \theta. \end{aligned}$$

(La expresión de  $v_G$  se obtiene considerando que es la suma del arrastre del centro del aro  $R\dot{\theta}$  y la rotación de  $G$  alrededor del mismo  $d\dot{\theta}$ .)

Desarrollando la expresión resulta

$$L = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi} \cos \theta \right) MR^2\dot{\theta}^2 - MRg \left( 1 - \frac{4}{3\pi} \right). \quad (2.20)$$

Realizando las derivadas se obtiene la ecuación de Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \theta} \Rightarrow \\ \left( \frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi} \cos \theta \right) MR^2\ddot{\theta} + \frac{4}{3\pi} MR^2\dot{\theta}^2 \operatorname{sen} \theta &= -MRg \frac{4}{3\pi} \operatorname{sen} \theta. \end{aligned} \quad (2.21)$$

De esta ecuación se puede despejar la aceleración,

$$\ddot{\theta} = - \frac{8 \left( \dot{\theta}^2 + g/R \right) \operatorname{sen} \theta}{9\pi - 16}. \quad (2.22)$$

Se trata de la misma ecuación obtenida antes por los procedimientos de Newton–Euler (1.75), aunque ahora de forma mucho más sencilla.  $\square$

**EJEMPLO 2.6:** El péndulo doble de la figura está formado por dos varillas rígidas y sin masa, con sendas masas ( $m_1, m_2$ ) en los extremos. Las varillas

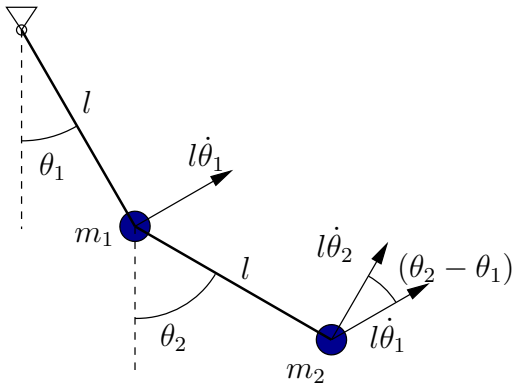


Figura 2.7: Ejemplo 2.6.

están unidas mediante articulaciones entre sí y a un punto fijo. El movimiento se desarrolla en un plano vertical, sometido al peso propio. Determinar las ecuaciones de la dinámica, empleando como coordenadas (libres) los ángulos  $(\theta_1, \theta_2)$  (ver figura 2.7).

*Solución.* El sistema es conservativo y descrito mediante coordenadas libres. La velocidad de  $m_1$  es  $l\dot{\theta}_1$  y la de  $m_2$  se halla como suma de los dos vectores (figura 2.7)  $l\dot{\theta}_1$  y  $l\dot{\theta}_2$  que forman un ángulo  $(\theta_2 - \theta_1)$ . Con todo, la Lagrangiana resulta:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1l^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l^2 \left[ \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right] + m_1gl \cos \theta_1 + m_2g(l \cos \theta_1 + l \cos \theta_2). \quad (2.23)$$

Derivando la Lagrangiana se obtienen las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \Rightarrow (m_1 + m_2)l^2\ddot{\theta}_1 + m_2l^2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - m_2l^2\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + (m_1 + m_2)gl \sin \theta_1 = 0 \quad (2.24)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \Rightarrow m_2l^2\dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + m_2l^2\ddot{\theta}_2 + m_2l^2\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2gl \sin \theta_2 = 0. \quad \square \quad (2.25)$$

### Unicidad de la función Lagrangiana

La elección de una función Lagrangiana para representar un sistema no es única. Para comprender esto basta considerar un potencial distinto que difiera en una constante aditiva ( $V' = V + \text{cte.}$ ), como sabemos, estos dos potenciales son equivalentes por completo. Por tanto, dos Lagrangianas que difieran en una constante también serán equivalentes. Este resultado se puede generalizar, ya que es posible comprobar que dos Lagrangianas que difieran entre sí en una derivada total de alguna función que dependa exclusivamente de coordenadas y tiempo, son equivalentes<sup>5</sup>.

En efecto, sean  $L$  y  $L'$  tales que

$$L'(q_j, \dot{q}_j, t) \stackrel{\text{def}}{=} L(q_j, \dot{q}_j, t) + \frac{d}{dt}F(q_j, t); \quad (2.26)$$

siendo  $F(q_j, t)$  una función cualquiera de  $q_j$  y  $t$  pero no de las velocidades  $\dot{q}_j$ . Por la definición funcional de  $F$ , desarrollando la derivada temporal:

$$L' - L = \frac{dF}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t},$$

y las contribuciones de este término en las ecuaciones de Lagrange son:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) \right] &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial F}{\partial q_j} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t} \\ \bullet \quad \frac{\partial}{\partial q_j} \left[ \frac{dF}{dt} \right] &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} \end{aligned}$$

Como se ve, al restar ambos términos en (2.14) se anulan entre sí, y el resultado neto, de emplear  $L'$ , son las mismas ecuaciones dinámicas que para  $L$ .

### Caso de fuerzas no conservativas

En los casos en que existan algunas fuerzas que procedan de un potencial ( $Q_j^V \stackrel{\text{def}}{=} -\partial V / \partial q_j$ ) y otras que no ( $Q_j^N$ ):

$$Q_j = Q_j^V + Q_j^N = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^N,$$

<sup>5</sup>Las transformaciones que ocasionan una variación de  $L$  de este tipo se denominan «transformaciones de gauge», término proveniente del inglés, aunque la traducción directa en castellano «transformaciones de galga» no parece tampoco muy atractiva.



es posible definir una Lagrangiana parcial  $L = T - V$ , resultando entonces las ecuaciones:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^N, \quad j = 1, \dots, n} \quad (2.27)$$

donde sólo aparecen expresamente las fuerzas no conservativas  $Q_j^N$ .

### Transformaciones admisibles de coordenadas

Las coordenadas generalizadas empleadas son una elección, es fácil comprender que no son únicas. Por ejemplo, en lugar de una coordenada  $q_j$  podría igualmente haberse considerado un múltiplo de esta  $\beta q_j$  para cualquier  $\beta \neq 0$ . Si se emplean unas coordenadas distintas válidas  $\{\hat{q}_j\}$  estas darán lugar a un conjunto de ecuaciones de Lagrange también distintas pero equivalentes. La condición general para admitir otras coordenadas puede resumirse en que la transformación sea regular, es decir que el determinante de su jacobiano no se anule<sup>6</sup>:

$$\left| \frac{\partial \hat{q}_j}{\partial q_i} \right| \neq 0. \quad (2.28)$$

## 2.2.4. Desarrollo explícito de las ecuaciones del movimiento

### Expresiones de la energía cinética y momentos generalizados

La energía cinética es una función cuadrática de las velocidades. Esta propiedad se conserva al expresarla en coordenadas generalizadas. En efecto, desarrollando su expresión a partir de (2.2) se obtiene en el caso general

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 = T_2 + T_1 + T_0, \quad (2.29)$$

---

<sup>6</sup> *Curso de Mecánica*, J.M. Goicolea (2010), apartado 7.2.3.

siendo  $T_2$  un término cuadrático en función de  $\dot{q}_j$ ,  $T_1$  lineal y  $T_0$  independiente de  $\dot{q}_j$ :

$$T_2 = \sum_{k,l=1}^n \frac{1}{2} a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l, \quad \text{siendo } a_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \quad (2.30)$$

$$T_1 = \sum_{k=1}^n a_k \dot{q}_k, \quad \text{siendo } a_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (2.31)$$

$$T_0 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 \quad (2.32)$$

En el caso en que no exista dependencia explícita del tiempo en la definición de las coordenadas generalizadas ( $\partial \mathbf{r}_i / \partial t = 0$ ), la expresión de la energía cinética será cuadrática homogénea en  $\dot{q}_j$ ,

$$T = T_2 = \sum_{k,l=1}^n \frac{1}{2} a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l, \quad (2.33)$$

esto sucederá si no se emplean sistemas de coordenadas móviles ni hay enlaces reónomos (es decir, dependientes del tiempo).

Por otra parte, los momentos generalizados se definen como

$$p_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, \dots, n); \quad (2.34)$$

admitiendo que el potencial no depende de las velocidades, se obtiene

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_k + a_j. \quad (2.35)$$

### Forma general de las ecuaciones

En función de los momentos generalizados, las ecuaciones de Lagrange (2.14) pueden reescribirse como

$$\dot{p}_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (2.36)$$

Desarrollando estas expresiones puede comprobarse<sup>7</sup> que la forma más general de las ecuaciones puede expresarse como

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{l,k=1}^n [kl, j] \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^n \gamma_{jk} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{jk}}{\partial t} \dot{q}_k + \frac{\partial a_j}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0, \quad (2.37)$$

donde se han empleado los coeficientes

$$[kl, j] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l} + \frac{\partial a_{jl}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{kl}}{\partial q_j} \right), \quad (2.38)$$

$$\gamma_{jk} = -\gamma_{kj} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial a_j}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \quad (j, k = 1, \dots, n). \quad (2.39)$$

En las ecuaciones (2.37) se distinguen términos proporcionales a las aceleraciones ( $\ddot{q}_k$ ), términos cuadráticos en las velocidades ( $\dot{q}_k \dot{q}_l$ ), términos lineales en las velocidades ( $\dot{q}_k$ ) y por último términos independientes.

### 2.2.5. Integrales primeras

#### Coordenadas cíclicas

Partiendo de las ecuaciones de Lagrange expresadas en la forma (2.36), si la función Lagrangiana  $L$  no depende explícitamente de una coordenada  $q_j$  —es decir,  $\partial L / \partial q_j = 0$ —, se verifica la conservación del momento generalizado correspondiente:

$$\boxed{\text{si } \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j = \text{cte.}} \quad (2.40)$$

Se dice entonces que  $q_j$  es una «coordenada cíclica» o ignorable. Las expresiones (2.40) constituyen integrales primeras del movimiento, ya que son ecuaciones en las que intervienen sólo derivadas primeras de las coordenadas.

Se puede interpretar el significado de las coordenadas cíclicas considerando que, si una coordenada  $q_j$  es cíclica, se puede sustituir ( $q_j$ ) por ( $q_j + C$ ), siendo  $C$  una constante, y las ecuaciones no varían. Esto se debe a que  $L$  no depende de  $q_j$ , y por otra parte  $\dot{q}_j$  es invariante ante ese cambio. Por el contrario, hacemos notar que el hecho de que una coordenada sea cíclica no quiere decir que su valor sea constante, ni tampoco la velocidad generalizada correspondiente.

<sup>7</sup> *Curso de Mecánica*, J.M. Goicolea (2010), apartado 7.2.4

Sin embargo, para una coordenada cíclica  $q_j$ , será posible eliminar de las ecuaciones la velocidad correspondiente  $\dot{q}_j$ , empleando la integral primera (2.40). Si el sistema tiene  $n$  grados de libertad, de los que  $k$  corresponden a coordenadas cíclicas, se podrán eliminar éstas y quedar descrito el movimiento mediante dos conjuntos desacoplados de ecuaciones:  $k$  ecuaciones (2.40) para las coordenadas cíclicas, y  $(n - k)$  ecuaciones (2.14) para las demás coordenadas. El problema se ve considerablemente simplificado, procediéndose en primer lugar a resolver estas últimas  $(n - k)$  ecuaciones; una vez resueltas, se obtiene el valor de las  $k$  coordenadas cíclicas<sup>8</sup>.

Es posible extender el concepto de coordenada cíclica para el caso en que las fuerzas no procedan de un potencial. Para ello se define el momento generalizado en dirección  $j$  como

$$p_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}.$$

La condición de coordenada cíclica será entonces:

$$\boxed{\text{si } \frac{\partial T}{\partial q_j} = 0 \text{ y } Q_j = 0 \Rightarrow p_j = \text{cte.}}$$

### Integral de Jacobi o de la Energía

En ocasiones es posible obtener una integral primera cuyo significado está relacionado con la energía total del sistema a partir de la función Lagrangiana. Para ello, observamos que la derivada total de  $L$  respecto del tiempo es

$$\frac{d}{dt}L(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Sustituyendo a partir de (2.14),  $\partial L / \partial q_j = \frac{d}{dt}(\partial L / \partial \dot{q}_j)$ , y operando:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right] + \frac{\partial L}{\partial t}$$

Agrupando los términos con derivadas totales, se deduce

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right] = - \frac{\partial L}{\partial t},$$

<sup>8</sup>En *Curso de Mecánica*, J.M. Goicolea (2010), apartado 12.7 se describe el procedimiento general de Routh para proceder a esta reducción.

de donde se obtiene la expresión de la llamada «integral de Jacobi»:

$$\boxed{\text{si } \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad h \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = \text{cte}} \quad (2.41)$$

OBSERVACIONES:

- En el caso en que  $\partial \mathbf{r}_i / \partial t = 0$ , según vimos, la energía cinética es una expresión cuadrática homogénea en  $\dot{q}_j$ . Entonces, a partir de (2.29, 2.30):

$$T = T_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_k$$

y por tanto

$$h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = 2T_2 - (T_2 - V) = T_2 + V = T + V,$$

por lo que  $h$  (2.41) coincide en este caso con la energía total,  $T + V$ .

- Pudiera darse el caso de que  $\partial \mathbf{r}_i / \partial t = 0$  y, por tanto,  $T + V = h = p_j \dot{q}_j - L$ , pero que esta expresión no se mantenga constante por ser  $\partial L / \partial t \neq 0$ . Esto último ocurrirá si  $\partial V(q_j, t) / \partial t \neq 0$ , siendo en este caso el sistema no conservativo desde el punto de vista físico aunque las fuerzas procedan de un potencial.
- Por otra parte, en los casos en que existan sistemas de coordenadas móviles se verificará, como se ha dicho,  $\partial \mathbf{r}_i / \partial t \neq 0$  y por tanto  $h = p_j \dot{q}_j - L \neq T + V$ . Sin embargo, puede que exista la integral de Jacobi (si  $\partial L / \partial t = 0$ ), aunque su significado físico no será en este caso la conservación de la energía. Un ejemplo típico de esta situación es el de una referencia móvil pero inercial, con velocidad de traslación constante y rectilínea (cf. ejemplo 2.8)

**Conservación de la energía.**— Otra manera —más directa— de obtener una integral de la energía es observando que, si las fuerzas son todas conservativas, la energía se mantiene constante (1.45). En este caso, basta con expresar dicha ecuación en función de las coordenadas generalizadas para obtener, en el marco de la dinámica analítica, la integral primera de la energía, equivalente a (2.41). Recordemos que para que las fuerzas sean conservativas, además de provenir de un potencial, éste debe ser estacionario

( $\partial V/\partial t = 0$ ). En función de las coordenadas generalizadas, esta condición se impone de la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} \text{si } \exists V \text{ tal que } Q_j = -\frac{\partial V(q_j, t)}{\partial q_j}, \text{ siendo } \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \text{ y } \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}_i(q_j, t) = \mathbf{0} \\ \downarrow \\ E = T + V = \text{cte.} \end{array}$$

Hacemos notar que, en la expresión anterior, para establecer la constancia del potencial  $V$ , ha sido necesario añadir la condición  $(\partial \mathbf{r}_i/\partial t)(q_j, t) = \mathbf{0}$ , es decir, que no existan sistemas de coordenadas móviles. Otra manera más compacta de expresar la constancia de  $V$  sería en función de las coordenadas vectoriales, mediante la condición  $\partial V(\mathbf{r}_i, t)/\partial t = 0$ .

Por el contrario, en el caso en que el potencial  $V$  no sea constante, aplicando el principio de la energía cinética (1.44),

$$dT = -\sum_{k=1}^N \frac{\partial V(\mathbf{r}_i, t)}{\partial \mathbf{r}_k} \cdot d\mathbf{r}_k = -dV + \frac{\partial V(\mathbf{r}_i, t)}{\partial t} dt$$

por lo que

$$d(T + V) = \frac{\partial V(\mathbf{r}_i, t)}{\partial t} dt \neq 0,$$

es decir, no se conserva la energía  $T + V$ . Hacemos la observación de que en la expresión anterior se emplea la derivada parcial respecto del tiempo en relación con las coordenadas vectoriales (absolutas), que es en general distinta de la derivada cuando se consideran coordenadas generalizadas (posiblemente relativas o móviles):

$$\frac{\partial V(\mathbf{r}_i, t)}{\partial t} \neq \frac{\partial V(q_j, t)}{\partial t}.$$

**EJEMPLO 2.7:** Sea el sistema formado por la masa  $m_1$  que puede deslizar libremente sobre una recta horizontal, y  $m_2$  unida mediante una varilla rígida y sin masa a  $m_1$ , pudiendo girar libremente en un plano vertical.

- Considerando los parámetros (libres)  $(x, \theta)$  (ver figura 2.8), obtener las ecuaciones de Lagrange e integrales primeras que hubiere.
- Considerando ahora que se impone una velocidad constante  $v$  a  $m_1$ , discutir la existencia de integrales primeras.

*Solución.*

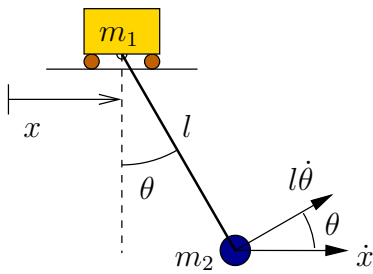


Figura 2.8: Ejemplo 2.7.

a.— Desarrollando la función Lagrangiana resulta:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2 \left( \dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta \right) + m_2gl \cos \theta. \quad (2.42)$$

Observamos que no depende explícitamente de  $x$ , por lo que ésta es una coordenada cíclica:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m_1\dot{x} + m_2(\dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta) = (\text{cte.}) \quad (2.43)$$

La ecuación de Lagrange en la otra coordenada es:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad \Rightarrow \quad m_2l^2\ddot{\theta} + m_2\ddot{x}l \cos \theta + m_2gl \sin \theta = 0. \quad (2.44)$$

En esta ecuación aparece tanto  $\theta$  como la coordenada cíclica  $x$ . Es posible eliminar esta última para obtener una ecuación diferencial función exclusivamente de las coordenadas no cíclicas. Para ello, en primer lugar se despeja derivando (2.43)

$$\ddot{x} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left( -l\ddot{\theta} \cos \theta + l\dot{\theta}^2 \sin \theta \right),$$

y sustituyendo en (2.44) resulta finalmente:

$$m_2l\ddot{\theta} \left( 1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cos^2 \theta \right) + \frac{m_2^2}{m_1 + m_2} l^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta + m_2gl \sin \theta = 0. \quad (2.45)$$

Por otra parte, todas las fuerzas son conservativas luego la energía total  $E$  se conserva:

$$\begin{aligned} E &= T + V \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2 \left( \dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta \right) - m_2gl \cos \theta \quad (\text{cte.}). \end{aligned} \quad (2.46)$$

También puede razonarse que la Lagrangiana no depende del tiempo explícitamente, por lo que la integral de Jacobi  $h$  (2.41) es constante, y además coincide con la energía  $E$  al no haber coordenadas móviles.

b.— El sistema queda ahora con el único grado de libertad  $\theta$ . La lagrangiana es:

$$L = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2(v^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2vl\dot{\theta} \cos \theta) + m_2gl \cos \theta. \quad (2.47)$$

Ahora la energía total no se conserva, ya que se realiza un trabajo externo para mover  $m_1$  con la velocidad impuesta  $v$ . Sin embargo,  $L$  no depende explícitamente del tiempo por lo que existe la integral de Jacobi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} = 0 &\Rightarrow h = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} - L \\ &= -\frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2(-v^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2vl\dot{\theta} \cos \theta) - m_2gl \cos \theta \quad (\text{cte.}) \quad \square \end{aligned} \quad (2.48)$$

### 2.2.6. Sistemas naturales

Llamaremos *sistema natural* a un sistema descrito por las ecuaciones de Lagrange en su forma estándar (2.14), en el que exista la integral de Jacobi como constante del movimiento ( $\partial L/\partial t = 0$ ) y la energía cinética sea función cuadrática homogénea de las velocidades generalizadas ( $T = T_2$ ).

Como se ha comentado antes (apartado 2.2.5), en este caso la integral de Jacobi resulta tener un significado físico claro, la energía total del sistema,

$$h = T + V.$$

Al conservarse  $h$  se mantiene igualmente constante la energía, resultando conservativo desde el punto de vista físico.

Teniendo en cuenta que en un sistema natural los coeficientes en las ecuaciones (2.31, 2.30) cumplen  $a_j = 0$  y  $\partial a_{ij}/\partial t = 0$ , las ecuaciones del movimiento tienen una expresión considerablemente más sencilla que en el caso general (2.37), resultando

$$\sum_{k=1}^n a_{jk}\ddot{q}_k + \sum_{k,l=1}^n [kl, j]\dot{q}_k\dot{q}_l + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (2.49)$$

En esta expresión se observa que las velocidades generalizadas  $\dot{q}_j$  intervienen únicamente en términos cuadráticos.

Podemos observar que un sistema holónomo con integral de Jacobi, en el que fuese  $T_1 = 0$  pero  $T_0 \neq 0$ , tiene ecuaciones del movimiento muy



similares a (2.49), ya que  $T_0$  puede considerarse agrupado con la energía potencial  $V$ ,

$$V' = V - T_0,$$

de forma que la energía cinética restante es una expresión cuadrática homogénea en las  $\dot{q}_j$ , al igual que en un sistema natural.

EJEMPLO 2.8: Sea un sistema formado por una masa y un resorte lineal, capaz de moverse en una dirección, unido en su base a un punto que se tiene un movimiento impuesto con velocidad uniforme  $v_0$ . Sea  $l_0$  la longitud natural del muelle,  $k$  su constante, y  $x$  la elongación respecto de la natural. Discutir la existencia de una integral primera de la energía.

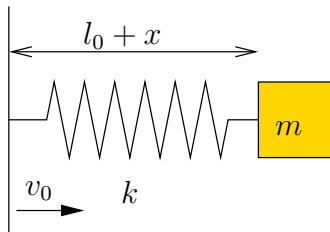


Figura 2.9: Sistema formado por una masa  $m$  y un muelle de constante  $k$  y longitud natural  $l_0$ , capaz de moverse en dirección  $x$ , cuya base tiene un movimiento impuesto de velocidad constante  $v_0$ .

*Solución.* La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m(v_0 + \dot{x})^2$$

por lo que sus componentes homogéneas son

$$T_2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2; \quad T_1 = mv_0\dot{x}; \quad T_0 = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

La energía potencial es

$$V = \frac{1}{2}kx^2.$$

Se comprueba inmediatamente que  $\partial L/\partial t = 0$ , por lo que existe la integral de Jacobi, que vale

$$h = T_2 - T_0 + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

En este ejemplo,  $T_0$  es constante, por lo que la conservación de  $h$  conduce también a la conservación de  $T_2 + V$ , aunque ambas constantes tengan distinto valor.

Otro procedimiento para analizar este ejemplo sería, considerando que el sistema de referencia móvil con la base es inercial, realizar los cálculos relativos a él:

$$T' = \frac{1}{2}m\dot{x}^2;$$

$$V' = \frac{1}{2}kx^2.$$

En este caso obtendríamos un sistema natural, en el que se conserva la energía total  $T' + V'$ . Observamos que ésta coincide con  $T_2 + V$  relativa al sistema fijo inicial, que ya habíamos visto se conservaba.  $\square$

**EJEMPLO 2.9:** Un disco circular de radio  $a$ , situado en un plano horizontal, tiene un movimiento de rotación impuesto alrededor de su centro con velocidad constante  $\omega$ . En su perímetro está anclado un muelle, de longitud natural  $r_0$ , que en su otro extremo tiene una masa  $m$ . Obtener las ecuaciones del movimiento e identificar los términos giroscópicos<sup>9</sup>.

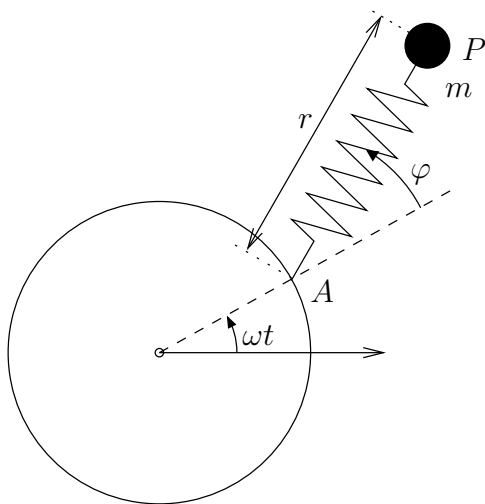


Figura 2.10: Disco que gira con velocidad constante  $\omega$ , con un resorte fijado en su perímetro, al cual está sujeta a su vez una partícula de masa  $m$ .

*Solución.* Para calcular la energía cinética debemos expresar antes la velocidad del punto  $P$ , lo que puede hacerse a través del movimiento relativo al disco,

<sup>9</sup>Se denomina así a los términos lineales en las velocidades y con coeficientes hemisimétricos  $\gamma_{jk}$  en las ecuaciones (2.37), véase *Curso de Mecánica*, J.M. Goicolea (2010), apartado 7.2.8.

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_P &= \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{P|A} \\ &= [-a\omega \operatorname{sen}(\omega t) - r(\omega + \dot{\varphi}) \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) + \dot{r} \cos(\omega t + \varphi)] \mathbf{i} \\ &\quad + [a\omega \cos(\omega t) + r(\omega + \dot{\varphi}) \cos(\omega t + \varphi) + \dot{r} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)] \mathbf{j}\end{aligned}$$

La expresión de la Lagrangiana es

$$L = \frac{m}{2} [a^2\omega^2 + r^2(\omega + \dot{\varphi})^2 + \dot{r}^2 + 2ar\omega(\omega + \dot{\varphi}) \cos \varphi + 2a\omega\dot{r} \operatorname{sen} \varphi] - \frac{k}{2}(r-r_0)^2.$$

Las ecuaciones de Lagrange resultan

$$\begin{aligned}m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 - 2mr\omega\dot{\varphi} - mr\omega^2 - ma\omega^2 \cos \varphi + k(r - r_0) &= 0 \\ mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + 2mr\omega\dot{r} + mar\omega^2 \operatorname{sen} \varphi &= 0\end{aligned}$$

En la primera ecuación —respecto a  $r$ — el término giroscópico es  $-2mr\omega\dot{\varphi}$ , y en la segunda ecuación —respecto a  $\varphi$ — el término correspondiente es  $+2mr\omega\dot{r}$ . La matriz de coeficientes hemisimétricos es por tanto

$$[\gamma_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & -2mr\omega \\ 2mr\omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Estos términos son los que corresponden al desarrollo de la energía cinética,

$$\begin{aligned}T &= T_2 + T_1 + T_0; \\ T_2 &= \frac{1}{2}m(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2), \\ T_1 &= m(r^2\omega\dot{\varphi} + ar\omega\dot{\varphi} \cos \varphi + a\omega\dot{r} \operatorname{sen} \varphi), \\ T_0 &= \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 + r^2 + 2ar \cos \varphi),\end{aligned}$$

de donde se deduce

$$\begin{aligned}a_r = \frac{\partial T_1}{\partial \dot{r}} = ma\omega r \operatorname{sen} \varphi, \quad a_\varphi = \frac{\partial T_1}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\omega + mar\omega \cos \varphi; \\ \gamma_{r\varphi} = \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} = -2mr\omega, \quad \gamma_{\varphi r} = -\gamma_{r\varphi} = 2mr\omega \quad \square\end{aligned}$$

### 2.2.7. Sistemas con ligaduras

Sea un sistema descrito mediante coordenadas generalizadas  $\{q_j\}$  no libres. En este caso, las variaciones  $\{\delta q_j\}$  no pueden considerarse arbitrarias y el sistema está gobernado por la ecuación fundamental de la dinámica

(2.11). Si el sistema admite potencial  $V$  se puede escribir esta última ecuación en función de la Lagrangiana  $L$ :

$$\sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0, \quad \forall \{\delta q_j\} \text{ compatibles.} \quad (2.50)$$

Al no ser arbitrarias las variaciones  $\{\delta q_j\}$ , estando sujetas a restricciones de los enlaces, no se pueden eliminar de la ecuación anterior.

No resulta posible elegir un conjunto de coordenadas libres si existen enlaces anholónomos en los que intervienen las velocidades, del tipo:

$$\Phi(q_j, \dot{q}_j, t) = 0.$$

Existe un método general para resolver estos sistemas anholónomos con ligaduras, mediante el empleo de *multiplicadores de Lagrange*. Su desarrollo excede los objetivos de este curso y por tanto no se incluye aquí, pudiendo consultarse en otros textos<sup>10</sup>.

---

<sup>10</sup> *Curso de Mecánica*, J.M. Goicolea (2010), apartado 7.4.