

# Capítulo 1

## Teoremas generales de dinámica de sistemas.

### Índice

---

<b>1.1. Dinámica de la partícula</b> . . . . .	<b>1.2</b>
1.1.1. Cantidad de movimiento . . . . .	1.2
1.1.2. Momento cinético . . . . .	1.3
1.1.3. Energía cinética . . . . .	1.5
1.1.4. Velocidad y aceleración en sistemas móviles . . . . .	1.14
<b>1.2. Descripción de los sistemas mecánicos</b> . . . . .	<b>1.17</b>
1.2.1. Sistema mecánico . . . . .	1.17
1.2.2. Fuerzas . . . . .	1.18
1.2.3. Enlaces . . . . .	1.18
<b>1.3. Principios y teoremas de la dinámica de Newton-Euler</b> . . . . .	<b>1.23</b>
1.3.1. Principio de la cantidad de movimiento . . . . .	1.23
1.3.2. Principio del momento cinético . . . . .	1.25
1.3.3. Teorema de la energía cinética . . . . .	1.28
<b>1.4. El sistema del centro de masas</b> . . . . .	<b>1.31</b>
1.4.1. Cantidad de movimiento . . . . .	1.33
1.4.2. Momento cinético . . . . .	1.33
1.4.3. Energía cinética . . . . .	1.35
1.4.4. Aplicación: sólidos rígidos con movimiento plano . . . . .	1.36
1.4.5. Constantes del movimiento en sistemas aislados . . . . .	1.45
<b>1.5. Principios basados en trabajos virtuales</b> . . . . .	<b>1.46</b>

1.5.1. El principio de los trabajos virtuales . . . . .	1.48
1.5.2. El principio de D'Alembert . . . . .	1.49
<b>1.6. Dinámica en sistemas no inerciales.</b> . . . . .	<b>1.53</b>
1.6.1. Dinámica de la partícula . . . . .	1.53
1.6.2. Dinámica de sistemas de varias partículas . . . . .	1.60

---

Comenzaremos este capítulo incluyendo una recapitulación de los teoremas y resultados básicos para la dinámica de la partícula. Este modelo mecánico es válido para los cuerpos que no tienen rotación, o bien si esta no influye en la dinámica.

Al estudiar los sistemas con varias partículas surgen varios conceptos básicos adicionales, como son los enlaces o ligaduras entre puntos, tanto internos al sistema como externos, y las fuerzas interiores. Uno de los casos más representativos es el de los sistemas rígidos, con enlaces de distancia constante entre partículas.

En principio, la aplicación de las leyes de Newton se hará realizando la suma para todas las partículas, obteniendo así leyes globales en función de las magnitudes cinéticas resultantes o suma para todo el sistema. A la hora de obtener estas resultantes convendrá tener en cuenta las interacciones entre partículas del sistema.

Un caso especial es el principio del momento cinético, que de manera estricta no se deduce de las leyes de Newton, sino que son necesarias hipótesis adicionales. Este principio es debido a Euler.

Adicionalmente, introduciremos los métodos de trabajos virtuales, de gran potencia para plantear las ecuaciones de la estática o de la dinámica directamente para el conjunto del sistema.

## 1.1. Dinámica de la partícula

### 1.1.1. Cantidad de movimiento

Se llama *cantidad de movimiento*<sup>1</sup> de una partícula a

$$\mathbf{p} \stackrel{\text{def}}{=} m\mathbf{v}.$$

El principio de la cantidad de movimiento se deduce como consecuencia directa de la segunda ley de Newton (aptdo. 0.4):

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \dot{\mathbf{p}}. \tag{1.1}$$

---

<sup>1</sup>También denominado «*momento lineal*», del Inglés «*linear momentum*» o simplemente «*momentum*».

En el caso usual de que la masa de la partícula no varíe<sup>2</sup>, se obtiene la expresión clásica de la ley fundamental de la dinámica (5), *Fuerza = masa × aceleración*:

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{r}}.} \quad (1.2)$$

Conviene recordar que, en esta expresión,  $\mathbf{F}$  representa la resultante de todas las fuerzas aplicadas sobre la partícula. Se deben incluir, mediante suma vectorial, tanto las fuerzas activas como las reacciones de apoyo o reacciones del medio.

Cuando la fuerza total se anula, se obtiene el correspondiente teorema de conservación:

$$\boxed{\text{si } \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{p} = \text{cte.}} \quad (1.3)$$

Por lo tanto, el movimiento de una partícula aislada es tal que se conserva su cantidad de movimiento; es decir, su velocidad se mantiene constante, describiendo un movimiento rectilíneo uniforme.

### 1.1.2. Momento cinético

Sea una partícula  $m$ , dotada de una velocidad  $\mathbf{v}$  y situada en un punto  $P$ . El *momento cinético*<sup>3</sup> respecto a un punto fijo  $O$ ,  $\mathbf{H}_O$ <sup>4</sup>, se define como el momento de la cantidad de movimiento respecto a dicho punto. Tomando  $O$  como origen del sistema de referencia (inercial)  $Oxyz$ ,

$$\mathbf{H}_O \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r} \wedge m\mathbf{v};$$

derivando respecto del tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{H}_O}{dt} &= \dot{\mathbf{r}} \wedge m\mathbf{v} + \mathbf{r} \wedge m\dot{\mathbf{v}} \\ &= \mathbf{0} + \underbrace{\mathbf{r} \wedge \mathbf{F}}_{\mathbf{M}_O} \end{aligned}$$

siendo  $\mathbf{M}_O \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}$  el momento de la fuerza  $\mathbf{F}$  respecto a  $O$ . Resulta por tanto la ecuación:

$$\boxed{\mathbf{M}_O = \frac{d\mathbf{H}_O}{dt}.} \quad (1.4)$$

<sup>2</sup>Estrictamente hablando, la masa de una partícula es siempre invariable; al hablar de casos en los que  $m$  sea variable, nos referimos a cuerpos que pierdan o ganen partículas de masa.

<sup>3</sup>También denominado «momento angular», del inglés «angular momentum».

<sup>4</sup>Otros autores emplean notaciones distintas para referirse al momento cinético:  $\mathbf{OK}$  (M. Roy, Fernández Palacios),  $\mathbf{L}_O$  (Marion, Goldstein, Griffiths)

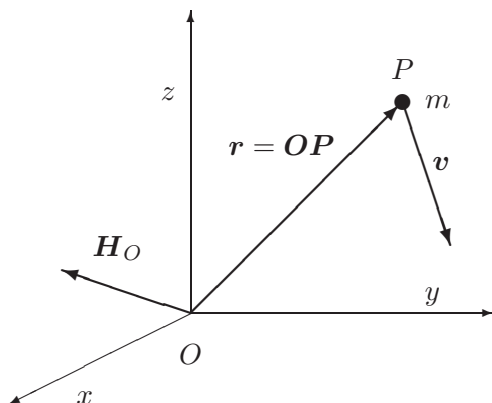


Figura 1.1: *Momento cinético de una partícula respecto al punto O.*

El correspondiente teorema de conservación que se deduce de (1.4) es:

$$\boxed{\text{si } M_O = \mathbf{0}, \quad H_O = \text{cte.}} \quad (1.5)$$

Esta conservación se verificará en el caso de la partícula aislada, y también en el caso de fuerzas centrales que se describe más abajo.

**Momento áxico.**—

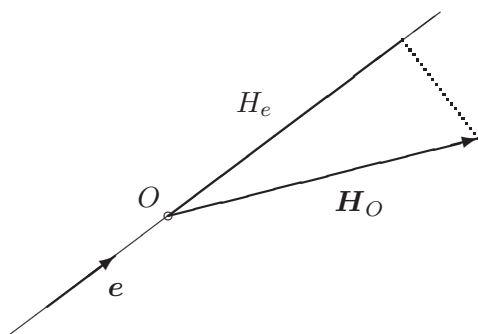


Figura 1.2: *Momento áxico respecto a un eje (O, e)*

Sea un eje de dirección fija  $e$ , pasando por el punto  $O$ . Se define como momento áxico respecto de este eje la proyección del momento cinético respecto de un punto cualquiera del eje sobre la dirección del mismo. Empleando la notación

$$M_e \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}, \quad H_e \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{H}_O \cdot \mathbf{e},$$

multiplicando escalarmente ambos miembros de (1.4) por  $e$  se deduce directamente la igualdad:

$$M_e = \frac{dH_e}{dt}.$$

Esta fórmula se puede aplicar entre otros casos al movimiento plano de rotación alrededor de un eje fijo.

### Fuerzas centrales.—

Se denominan centrales a las fuerzas que pasan constantemente por un punto dado, «centro» de las fuerzas. Es evidente que respecto de este punto el momento de las fuerzas es nulo, por lo que aplicando (1.5) se deduce que el momento cinético se conserva:

$$\mathbf{H}_O = \text{cte.}$$

Se obtienen inmediatamente 2 características importantes del movimiento:

1. La *trayectoria es plana*;  
ya que al ser  $\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \wedge m\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{r}$  es constantemente perpendicular a una dirección  $\mathbf{H}_O$  fija, definiendo por tanto un plano.
2. La *velocidad areolar es constante*;  
puesto que el área barrida por unidad de tiempo (figura 1.3) es:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\frac{1}{2}|\mathbf{r} \wedge d\mathbf{r}|}{dt} = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}| = \frac{1}{2m}|\mathbf{H}_O| \quad \text{cte.}$$

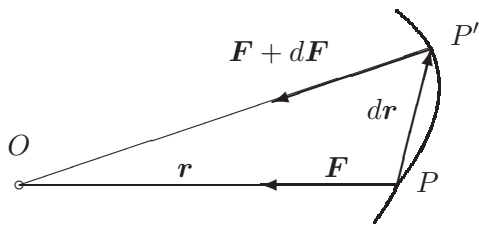


Figura 1.3: *Fuerzas centrales, dirigidas hacia un centro de fuerzas O. El área barrida en el intervalo infinitesimal dt es  $dS = OPP' = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \wedge d\mathbf{r}|$ .*

### 1.1.3. Energía cinética

Sea una partícula de masa  $m$ , que se mueve según una trayectoria  $\Gamma$ , bajo la acción de fuerzas con resultante  $\mathbf{F}$  (recordemos que ésta incluye todas las fuerzas, activas y pasivas). El trabajo elemental realizado por  $\mathbf{F}$  en un desplazamiento infinitesimal  $d\mathbf{r}$  se define por el producto escalar siguiente<sup>5</sup>

$$dW \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r};$$

<sup>5</sup>La notación empleada, « $dW$ », no indica aquí una diferencial exacta de una determinada función  $W$ , sino únicamente un incremento infinitesimal de trabajo producido por  $\mathbf{F}$  a lo largo de  $d\mathbf{r}$ . Tan sólo resulta ser una diferencial exacta cuando las fuerzas son conservativas.

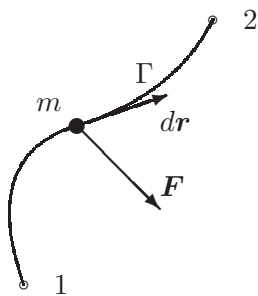


Figura 1.4: Trabajo realizado por  $\mathbf{F}$  al recorrer la curva  $\Gamma$  entre 1 y 2.

considerando que  $\mathbf{F} = m \, d\mathbf{v}/dt$  y  $d\mathbf{r} = \mathbf{v} \, dt$ ,

$$dW = m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \quad (1.6)$$

El trabajo realizado al recorrer  $\Gamma$  entre los dos puntos extremos 1 y 2 resulta de la integral curvilínea:

$$W_{12} = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}mv^2 \Big|_1^2.$$

Se define como energía cinética  $T$  de la partícula:

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}mv^2;$$

así, la expresión anterior equivale a

$$\boxed{W_{12} = T_2 - T_1} \quad (1.7)$$

Podemos enunciar entonces:

*‘El trabajo realizado por la resultante de las fuerzas sobre una partícula es igual al incremento de su energía cinética.’*

Este resultado se suele llamar también el *teorema de las fuerzas vivas*.

### Caso de fuerzas conservativas.—

Se denomina campo de fuerzas conservativas aquél en el que el trabajo realizado por la fuerza, para recorrer el camino entre dos puntos dados, es independiente de la trayectoria seguida  $\Gamma$  para ir de uno al otro. Así para distintos caminos  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  que tengan en común el origen (1) y el final (2),

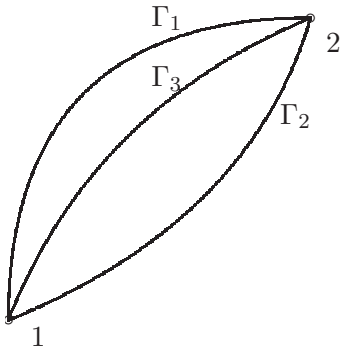


Figura 1.5: *Trayectorias distintas en un campo conservativo para ir de 1 a 2.*

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Es fácil ver que esta condición es equivalente a que el trabajo realizado para recorrer cualquier trayectoria cerrada sea nulo. En efecto, sea una curva cerrada cualquiera  $\Gamma$ , a la que pertenecen los puntos 1 y 2. Ésta puede descomponerse en dos curvas abiertas con extremos en 1 y 2:  $\Gamma = \Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^-$ , teniendo  $\Gamma_1^+$  el sentido de 1 a 2 y  $\Gamma_2^-$  el sentido de 2 a 1. La integral curvilínea sobre  $\Gamma$  es pues

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\Gamma_2^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\Gamma_2^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (1.8)$$

como queríamos demostrar.

No son conservativas las fuerzas debidas a resistencias pasivas, como el rozamiento o las fuerzas de tipo viscoso. En éstas el integrando ( $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ) es siempre negativo, puesto que la fuerza de resistencia ( $\mathbf{F}$ ) se opone al movimiento ( $d\mathbf{r}$ ), por lo que la integral (1.8) no se puede anular nunca. Se produce necesariamente una disipación de energía, no pudiendo recobrase el nivel energético inicial después de un trayecto cerrado.

Un teorema básico del cálculo vectorial establece que la condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial  $\mathbf{F}$  tenga circulación nula para cualquier curva cerrada es que sea un campo de gradientes. Recordemos en primer lugar la definición de gradiente de un campo escalar; en un sistema de coordenadas cartesianas ortonormal con versores  $\{\mathbf{e}_i\} \equiv \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  la

expresión es<sup>6</sup>

$$\mathbf{grad} V \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k}$$

La afirmación anterior quiere decir que existirá un campo escalar  $V(\mathbf{r})$ , función de la posición, tal que:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{grad} V.$$

Al campo escalar  $V$  se le denomina potencial de las fuerzas, energía potencial, o simplemente *potencial*.

Una tercera forma de caracterizar un campo  $\mathbf{F}$  como conservativo, admitiendo las exigencias adicionales de que  $\mathbf{F}$  tenga derivada continua y que el dominio sea simplemente conexo, es que sea irrotacional. Esta condición es equivalente a su vez a las dos anteriores. Recordemos la definición de rotacional de un campo vectorial<sup>7</sup>:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k \\ &= \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Por lo que la condición para que el campo  $\mathbf{F}$  sea conservativo es

$$\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}. \quad (1.9)$$

En este caso, la función potencial  $V(\mathbf{r})$  de la que proviene  $\mathbf{F}$  debe ser al menos  $C^2$ .

Al expresarse  $\mathbf{F}$  como un gradiente, el trabajo elemental resulta ser una diferencial exacta:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{grad} V \cdot d\mathbf{r} = -dV$$

---

<sup>6</sup>En cuanto a notación, emplearemos indistintamente los índices o los «nombres propios» de vectores ( $\mathbf{i} \equiv \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{j} \equiv \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3$ ) y coordenadas ( $x \equiv x_1$ ,  $y \equiv x_2$ ,  $z \equiv x_3$ ). Asimismo, a veces emplearemos también notaciones alternativas para el gradiente,  $\mathbf{grad} V = dV/d\mathbf{r} = \nabla V$ , empleando el operador  $\nabla = \sum_{i=1}^3 \partial/\partial x_i \mathbf{e}_i = \partial/\partial x \mathbf{i} + \partial/\partial y \mathbf{j} + \partial/\partial z \mathbf{k}$ .

<sup>7</sup>Empleando el operador  $\nabla$ , el rotacional se puede expresar también mediante la notación  $\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \wedge \mathbf{F}$ .



Si integramos para obtener el trabajo realizado entre dos puntos 1 y 2, y empleando el principio de la energía cinética (1.7):

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = V_1 - V_2 \\ &= T_2 - T_1, \end{aligned}$$

es decir, se conserva la suma de la energía cinética más la potencial:

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2.$$

o bien, definiendo como *energía total*<sup>8</sup> a la suma de energía cinética y potencial,

$$E \stackrel{\text{def}}{=} T + V,$$

se obtiene la siguiente expresión para el teorema de conservación de la energía:

$$\boxed{\text{si } \mathbf{F} = -\mathbf{grad} V \text{ (conservativa), } E = T + V = \text{cte.}} \quad (1.10)$$

En lo anterior se ha supuesto que el potencial  $V(\mathbf{r})$  es constante. Pudiera darse el caso de que  $\mathbf{F}$  provenga de una función potencial no constante, es decir que dependa explícitamente del tiempo,  $V(\mathbf{r}, t)$ :

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}, \quad \text{con} \quad \frac{\partial V}{\partial t} \neq 0.$$

En este caso, no se conservaría la energía total  $E$ , puesto que el trabajo elemental ya no sería una diferencial exacta del potencial:

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} + \frac{\partial V}{\partial t} dt, \\ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \neq -dV. \end{aligned}$$

Estaríamos, pues, ante un campo de fuerzas no conservativas a pesar de que provengan de un potencial.

**Integración de la ecuación fundamental de la dinámica.**— Parte de lo expuesto arriba se puede interpretar como distintos procedimientos de integración de la ecuación fundamental de la dinámica (1.2). Señalemos tres procedimientos generales para ello, que permiten obtener los teoremas de conservación (1.3), (1.5) y (1.10) como casos particulares.

<sup>8</sup>Se sobreentiende que ésta es únicamente la energía mecánica, excluyendo a otros tipos de energía como la calorífica, química, ...

**a) Integración directa en el tiempo.**— Integrando entre dos instantes  $t_1$  y  $t_2$ ,

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\mathbf{r}} dt = \int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{p} = \mathbf{p}|_1^2$$

se obtiene la ecuación del balance de la cantidad de movimiento,

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \mathbf{p}|_1^2.}$$

Como caso particular de esta ecuación de balance se desprende el teorema de conservación de la cantidad de movimiento (1.3)

**b) Integración directa según la trayectoria.**— Realizando ahora la integral curvilínea entre dos puntos de la trayectoria  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ ,

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 m\ddot{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv^2\Big|_1^2$$

de donde se obtiene la ecuación del balance de la energía,

$$\boxed{\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}mv^2\Big|_1^2.}$$

Análogamente, para el caso de fuerzas conservativas ( $\mathbf{F} = -\text{grad}V$ ), se desprende el teorema de conservación (1.10).

**c) Integración del momento en el tiempo.**— Integrando el momento de  $\mathbf{F}$  entre dos instantes  $t_1$  y  $t_2$ ,

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{r} \wedge m\ddot{\mathbf{r}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \underbrace{(\mathbf{r} \wedge m\dot{\mathbf{r}})}_{\mathbf{H}_O} dt = \mathbf{H}_O|_1^2$$

se obtiene la ecuación del balance del momento cinético,

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} dt = \mathbf{H}_O|_1^2.}$$

Si las fuerzas son centrales o se trata de una partícula aislada, análogamente a los dos casos anteriores se desprende el teorema de conservación (1.5).

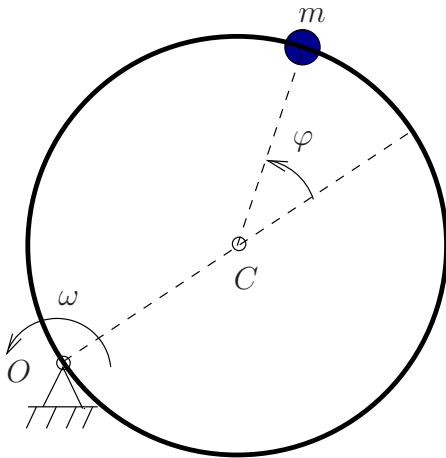


Figura 1.6: *Ejemplo 1.1* - partícula que se mueve sobre una circunferencia lisa, con un punto ( $O$ ) fijo de su perímetro y velocidad de rotación impuesta  $\omega$ .

EJEMPLO 1.1: Una partícula de masa  $m$  está ligada a una circunferencia lisa de radio  $R$  sobre la que puede deslizarse libremente. A su vez la circunferencia se mueve en un plano horizontal, girando con velocidad de rotación uniforme (impuesta)  $\omega$ , alrededor de un punto  $O$  de su perímetro. Se pide:

- Empleando como parámetro el ángulo  $\varphi$  (figura 1.1), determinar la aceleración (absoluta) de la partícula en un instante genérico.
- Obtener la ecuación diferencial del movimiento.
- Obtener la expresión de la reacción de la circunferencia sobre la partícula.
- ¿Se conserva la energía total ( $T + V$ )? (responder razonadamente).
- Obtener una integral primera del sistema (constante del movimiento, igual a una expresión función de las derivadas primeras, en este caso  $\dot{\varphi}$ ). Tomar como condiciones iniciales  $\varphi_0 = 0$ ,  $\dot{\varphi}_0 = \omega$ .

*Solución.*

a.— El procedimiento más directo es emplear coordenadas cartesianas para la posición de la partícula (figura 1.7):

$$\begin{aligned} x &= R \cos(\omega t) + R \cos(\varphi + \omega t); \\ y &= R \sin(\omega t) + R \sin(\varphi + \omega t). \end{aligned} \quad (1.11)$$

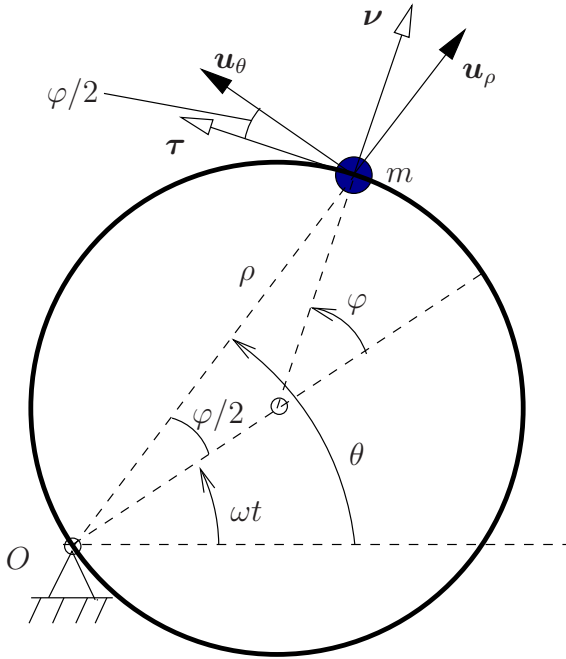


Figura 1.7: Coordenadas y vectores básicos para el ejemplo 1.1;  $(\tau, \nu)$  son los versores tangente y normal respectivamente a la circunferencia móvil, mientras que  $(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\theta)$  son los versores de las coordenadas polares. La velocidad de la partícula se puede interpretar como suma de una componente de arrastre  $\rho\omega$  debida al movimiento del aro, según  $\mathbf{u}_\theta$ , y otra componente  $R\dot{\varphi}$  relativa al aro, según  $\tau$ .

A partir de aquí, derivando:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -R\omega \operatorname{sen}(\omega t) - R(\dot{\varphi} + \omega) \operatorname{sen}(\omega t + \varphi); \\ \dot{y} &= R\omega \operatorname{cos}(\omega t) + R(\dot{\varphi} + \omega) \operatorname{cos}(\omega t + \varphi); \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -R\omega^2 \operatorname{cos}(\omega t) - R\ddot{\varphi} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) - R(\dot{\varphi} + \omega)^2 \operatorname{cos}(\omega t + \varphi); \\ \ddot{y} &= -R\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t) + R\ddot{\varphi} \operatorname{cos}(\omega t + \varphi) - R(\dot{\varphi} + \omega)^2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Las direcciones en que interesa proyectar la aceleración son (lógicamente) la tangente y la normal a la circunferencia. Estas resultan:

$$\begin{aligned} a_\tau &= -\ddot{x} \operatorname{sen}(\varphi + \omega t) + \ddot{y} \operatorname{cos}(\varphi + \omega t) = R\omega^2 \operatorname{sen} \varphi + R\ddot{\varphi}; \\ a_\nu &= \ddot{x} \operatorname{cos}(\varphi + \omega t) + \ddot{y} \operatorname{sen}(\varphi + \omega t) = -R\omega^2 \operatorname{cos} \varphi - R(\dot{\varphi} + \omega)^2. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Otra manera de calcular sería utilizando las coordenadas polares  $(\rho, \theta)$  (figura 1.7):

$$\theta = \omega t + \frac{\varphi}{2}; \quad \rho = 2R \operatorname{cos} \frac{\varphi}{2}; \quad (1.15)$$

Las componentes de la aceleración  $\mathbf{a} \equiv (a_\rho, a_\theta)$  son, empleando las expresiones en coordenadas polares definidas en (B.3) :

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2; \quad a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta},$$

con lo que:

$$\begin{aligned} a_\rho &= -R\ddot{\varphi} \sin \frac{\varphi}{2} - R\frac{\dot{\varphi}^2}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - 2R \cos \frac{\varphi}{2} (\omega + \frac{\dot{\varphi}}{2})^2, \\ a_\theta &= -2R\dot{\varphi} \sin \frac{\varphi}{2} (\omega + \frac{\dot{\varphi}}{2}) + R \cos \frac{\varphi}{2} \ddot{\varphi}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Finalmente, proyectando sobre tangente y normal al aro:

$$\begin{aligned} a_\tau &= -a_\rho \sin \frac{\varphi}{2} + a_\theta \cos \frac{\varphi}{2} = R\omega^2 \sin \varphi + R\ddot{\varphi}; \\ a_\nu &= a_\rho \cos \frac{\varphi}{2} + a_\theta \sin \frac{\varphi}{2} = -R\omega^2 \cos \varphi - R(\dot{\varphi} + \omega)^2. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Se obtienen los mismos valores que antes (1.14), como era de esperar<sup>9</sup>.

b.— La única fuerza sobre la partícula es la reacción de la circunferencia, que lleva la dirección de  $\nu$ . La componente de la aceleración según  $\tau$  será por tanto nula, lo que proporciona la ecuación del movimiento buscada. A partir de (1.14)<sub>1</sub>:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0 \quad (1.18)$$

Por similitud con la ecuación del péndulo simple ( $l\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0$ ), esta ecuación indica que se produce un movimiento pendular alrededor del punto diametralmente opuesto al punto  $O$ , con longitud de péndulo equivalente  $l_{\text{equiv}} = g/\omega^2$ .

c.— Sea la reacción  $\mathbf{N} = N\nu$ . Obtenemos el valor de  $N$  mediante la aceleración  $a_\nu$ , ecuación (1.14)<sub>2</sub>, expresando la ecuación dinámica según esta dirección:

$$N = ma_\nu = -mR [(\omega + \dot{\varphi})^2 + \omega^2 \cos \varphi]. \quad (1.19)$$

d.— *No se conserva la energía*, ya que se trata de una curva móvil, en la que la fuerza de reacción desarrolla un trabajo. Es necesario aplicar un momento al sistema para conseguir la rotación uniforme  $\omega$ , momento que no es una fuerza conservativa.

Aunque a primera vista pudiera parecer que la reacción de la circunferencia, al ser lisa la ligadura, no desarrolla trabajo alguno, esto no es así, ya que la reacción es normal a la circunferencia pero no a la trayectoria (absoluta) de la partícula.

<sup>9</sup>Un tercer procedimiento recomendable para este caso sería la descomposición del movimiento en el arrastre del aro y el de la partícula relativo al aro, originando la descomposición del campo de aceleraciones  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{arr}} + \mathbf{a}_{\text{cor}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}$ , como se verá en el apartado 1.1.4, ecuación (1.29).

e.— Ya que no resulta posible aplicar directamente un teorema de conservación, integraremos directamente la ecuación de la dinámica (1.18). Para ello, multiplicamos primero por  $\dot{\varphi}$ :

$$\ddot{\varphi}\dot{\varphi} + \omega^2\dot{\varphi}\sin\varphi = 0; \quad (1.20)$$

esta ecuación tiene integral inmediata:

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \omega^2\cos\varphi = C \quad (1.21)$$

Aplicando las condiciones iniciales, resulta  $C = -\omega^2/2$ . La integral primera es por tanto:

$$\dot{\varphi}^2 + \omega^2(1 - 2\cos\varphi) = 0 \quad (1.22)$$

Puede comprobarse que la expresión de la energía total del sistema es:

$$T + V = \frac{1}{2}mR^2 [\dot{\varphi}^2 + 2(1 + \cos\varphi)(\omega^2 + \omega\dot{\varphi})] \quad (1.23)$$

por lo que, comparándola con (1.22), se deduce que la energía total no puede ser constante, ya que ambas expresiones no coinciden.  $\square$

#### 1.1.4. Velocidad y aceleración en sistemas móviles

En numerosas ocasiones la descripción del movimiento se hace de manera relativa a un sistema móvil, que a su vez tiene un determinado movimiento respecto al sistema que pudiéramos considerar fijo o inercial. Es conveniente establecer las expresiones generales que permiten obtener para la velocidad y aceleración inerciales, que serán las que deban emplearse en las leyes de la dinámica.

Supongamos un sistema de referencia fijo  $S$ , y otro móvil respecto de él  $S'$ . El vector posición de un punto cualquiera respecto de  $S$  es  $\mathbf{r}$ , y respecto de  $S'$  lo denominamos  $\boldsymbol{\rho}$ . La relación entre los vectores posición (figura 1.8) es

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}, \quad (1.24)$$

donde  $\mathbf{r}_O$  define la posición del origen  $O$  de  $S'$ . Derivando esta igualdad, y teniendo en cuenta la regla de derivación en sistemas móviles<sup>10</sup>:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_O + \left( \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} \right)_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}, \quad (1.25)$$

<sup>10</sup> Véase *Curso de Mecánica*, J.M. Goicolea (2010), capítulo 4. En este curso breve esta regla será estudiada más adelante con la cinemática de los sistemas rígidos, ecuación (6.17)

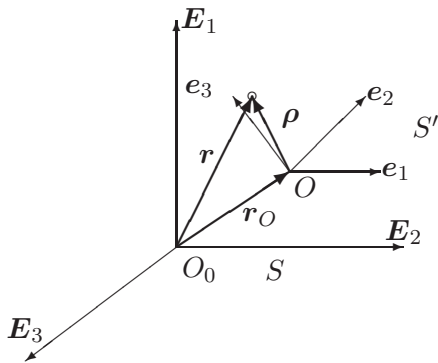


Figura 1.8: Vectores posición \$(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})\$ en las referencias fija \$S \equiv \{O\_0, \mathbf{E}\_i\}\$ y móvil \$S' \equiv \{O, \mathbf{e}\_i\}\$ respectivamente.

donde el primer término \$(\dot{\mathbf{r}}\_O)\$ es la derivada (absoluta) del vector posición de \$O\$, y corresponde a una velocidad de traslación; el segundo es la derivada relativa de \$\boldsymbol{\rho}\$, que denominaremos velocidad relativa, \$\mathbf{v}\_{\text{rel}} \stackrel{\text{def}}{=} (d\boldsymbol{\rho}/dt)\_{\text{rel}}\$; y el tercero es el término complementario de derivación de \$\boldsymbol{\rho}\$ debido a la rotación de \$S'\$. Así, la expresión general de la velocidad es:

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}_{\text{rel}}.} \quad (1.26)$$

Se llama *velocidad de arrastre* a la suma de los dos primeros términos,

$$\mathbf{v}_{\text{arr}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}, \quad (1.27)$$

correspondiente a la velocidad que tendría un punto si estuviera fijo respecto al sistema móvil. Es decir, se trata de la velocidad con la que se ve «arrastrado» un punto, si estuviera rígidamente unido al sistema móvil. De esta manera podemos expresar de forma resumida la velocidad como suma de la velocidad de arrastre (debida al movimiento de \$S'\$) y la velocidad relativa a \$S'\$:

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{arr}} + \mathbf{v}_{\text{rel}}.} \quad (1.28)$$

Derivando de nuevo la expresión (1.26) conforme a la misma regla de derivación en sistemas móviles, se obtiene la expresión de la aceleración:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}) + \mathbf{a}_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{\text{rel}};$$

y agrupando términos,

$$\boxed{\mathbf{a} = \underbrace{\mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho})}_{\mathbf{a}_{\text{arr}}} + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{\text{rel}}}_{\mathbf{a}_{\text{cor}}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}.} \quad (1.29)$$

En esta expresión distinguimos las siguientes componentes de la aceleración:

- *Aceleración de arrastre,*

$$\mathbf{a}_{\text{arr}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}),$$

es la aceleración que tendría un punto fijo al sistema móvil ( $S'$ ), es decir «arrastrado» por el movimiento de ( $S'$ );

- *Aceleración de Coriolis o complementaria,*

$$\mathbf{a}_{\text{cor}} \stackrel{\text{def}}{=} 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{\text{rel}};$$

- *Aceleración relativa,  $\mathbf{a}_{\text{rel}}$ .*

Así, podemos expresar (1.29) en forma resumida:

$$\boxed{\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{arr}} + \mathbf{a}_{\text{cor}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}.} \quad (1.30)$$

Como se ve, en la expresión de la aceleración aparece un término adicional a los de arrastre y relativo, que depende de la velocidad relativa, al contrario de lo que sucedía en el campo de velocidades. Esto complica el análisis de aceleraciones respecto del de velocidades.

**EJEMPLO 1.2:** Desarrollar la velocidad y aceleración de la partícula del ejemplo 1.1 (pág 1.11) a través del movimiento de arrastre del aro y del movimiento de la partícula relativo al aro.

*Solución.* El movimiento se compone de un arrastre del aro, con velocidad de rotación (constante)  $\omega$ , y de un movimiento de la partícula relativo al aro que es una rotación alrededor de su centro con ángulo  $\varphi$ . Haciendo referencia a los vectores básicos definidos en la figura 1.7, las componentes de la velocidad son:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\text{arr}} &= \rho\omega \mathbf{u}_\theta = 2R\omega \cos \frac{\varphi}{2} \mathbf{u}_\theta; \\ \mathbf{v}_{\text{rel}} &= R\dot{\varphi} \boldsymbol{\tau}. \end{aligned}$$

La aceleración se descompone como  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{arr}} + \mathbf{a}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{cor}}$ , siendo las componentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\text{arr}} &= -\rho\omega^2 \mathbf{u}_\rho = -2R\omega^2 \cos \frac{\varphi}{2} \mathbf{u}_\rho; \\ \mathbf{a}_{\text{rel}} &= -R\dot{\varphi}^2 \boldsymbol{\nu} + R\ddot{\varphi} \boldsymbol{\tau}; \\ \mathbf{a}_{\text{cor}} &= 2\omega \mathbf{k} \wedge R\dot{\varphi} \boldsymbol{\tau} = -2R\omega\dot{\varphi} \boldsymbol{\nu}. \end{aligned}$$



Proyectando esta aceleración sobre las direcciones tangencial y normal al arco  $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu})$  resulta:

$$\begin{aligned} a_{\tau} &= \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau} = R\ddot{\varphi} + R\omega^2 \operatorname{sen} \varphi; \\ a_{\nu} &= \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = -R(\omega + \dot{\varphi})^2 - R\omega^2 \operatorname{cos} \varphi. \end{aligned}$$

Este resultado es idéntico al obtenido por otros métodos en el ejemplo 1.1.

□

## 1.2. Descripción de los sistemas mecánicos

Antes de desarrollar los principios y teoremas fundamentales, es conveniente definir primero algunos conceptos y elementos básicos que se emplearán en el estudio de los sistemas de varias partículas.

### 1.2.1. Sistema mecánico

Se llama así a un conjunto de varias partículas, de número finito o infinito, de las cuales queremos estudiar su movimiento. En el estudio de un sistema mecánico se prescinde pues de otras características físicas como la carga eléctrica, color, temperatura, ...

Los cuerpos que observamos a simple vista están formados por un gran número de partículas, macroscópicas, atómicas o subatómicas. Sólo en ciertos casos es válida la simplificación que supone el modelo de la masa puntual. En otros casos, por el contrario, será necesario considerar el sistema como formado por varias partículas.

Se llama configuración de un sistema a la posición de cada una de sus partículas en un instante dado. Para definir la configuración se necesita un determinado número de parámetros, según el sistema de que se trate. Por ejemplo, una partícula libre precisa tres parámetros: las coordenadas cartesianas,  $(x, y, z)$ . Un sistema de  $n$  partículas libres queda definido por  $3n$  parámetros. Sin embargo, si existen ligaduras que restrinjan el movimiento, el número de parámetros preciso para definir la configuración será menor. Se denominan *grados de libertad* de un sistema al conjunto mínimo de parámetros necesario para definir unívocamente la configuración del mismo, y que puedan variarse de manera independiente (es decir, sin ecuaciones de ligadura).

### 1.2.2. Fuerzas

Las fuerzas ejercidas sobre las partículas de un sistema son las causantes de la variación del movimiento de las mismas. Podemos clasificarlas atendiendo a varios criterios:

- *Exteriores*, si son ejercidas por agentes externos al sistema, o *interiores* en caso contrario. En este último caso, tanto la acción como la reacción se producen sobre partículas del propio sistema.
- *Activas* o *Reactivas*, según que actúen «motu proprio», o bien como respuesta a un movimiento determinado que intentan impedir, en cuyo caso sólo se dan cuando existe la tendencia a este movimiento. Estas últimas se llaman también fuerzas de enlace.

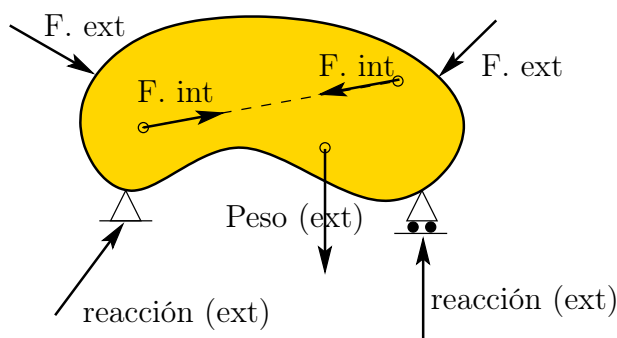


Figura 1.9: Tipos de fuerzas en un sistema

### 1.2.3. Enlaces

La existencia de enlaces o ligaduras impone restricciones al movimiento de las partículas, reduciendo el número de grados de libertad con respecto al caso en que todas las partículas fuesen libres. El número de grados de libertad se verá reducido, respecto del caso sin ligaduras, por el número de ecuaciones de enlace independientes.

Los enlaces se pueden clasificar, según diversos criterios, en:

- *Exteriores*, para las ligaduras con puntos externos, e *interiores*, para las ligaduras entre puntos del mismo sistema.
- *Lisos* (no disipativos) y *rugosos* (disipativos), atendiendo a que las fuerzas de enlace disipen o no energía para los movimientos permitidos por los mismos (figura 1.10). Se entiende que para que tenga sentido hablar de enlace liso o rugoso, éste debe permitir algún movimiento, pues en caso de restricción total no cabe esta clasificación.

- *Holónomos y Anholónomos.* Se consideran holónomos cuando es posible expresar la condición de ligadura mediante una relación entre las posiciones de las partículas y el tiempo exclusivamente:

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0. \quad (1.31)$$

A su vez, los enlaces holónomos se denominan *esclerónomos* si no dependen del tiempo, y *reónomos* en caso contrario (figura 1.11).

Los enlaces anholónomos son en general todos aquellos que no son holónomos, no pudiendo expresarse mediante ecuaciones del tipo (1.31). El caso más usual de enlace anholónomo es aquél que depende también de la velocidad, mediante relaciones del tipo:

$$\Phi(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, t) = 0, . \quad (1.32)$$

El caso más sencillo es el de expresiones lineales en  $\dot{\mathbf{r}}_i$ , del tipo:

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + b = 0$$

pudiendo ser  $\mathbf{a}_i$  y  $b$  funciones de la posición ( $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i(\mathbf{r}_i)$ ,  $b = b(\mathbf{r}_i)$ )

- *Unilaterales y bilaterales.* Los unilaterales se definen mediante desigualdades, por ejemplo (figura 1.12):

$$z \geq 0,$$

implicando restricción en un sentido tan sólo. Por el contrario, los bilaterales implican restricción en ambos sentidos.

EJEMPLO 1.3: Establecer los enlaces internos de un sólido rígido (considerado como un medio continuo), obteniendo el número de grados de libertad del mismo.

*Solución.* La hipótesis de medio continuo implica que es infinitamente subdivisible, constando de un conjunto infinito de partículas. En principio, esto conllevaría asimismo infinitos grados de libertad. Sin embargo, las ligaduras internas del sólido obligan a que se mantenga constante la distancia entre dos partículas cualesquiera; a su vez, esto da lugar a infinitas coacciones. El número de grados de libertad no se puede obtener pues directamente, ya que resultaría indeterminado ( $\infty - \infty$ ).

Para determinar el número de grados de libertad del sólido podemos basarnos en la descripción que sigue de su movimiento.

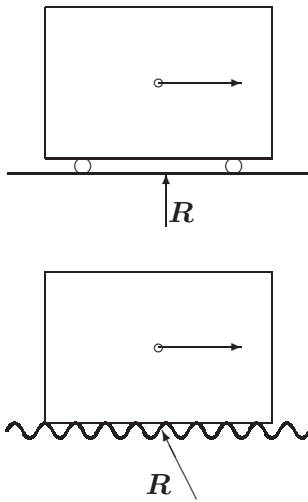


Figura 1.10: Enlaces liso y rugoso; para el movimiento permitido por el enlace (deslizamiento horizontal) la reacción lisa no realiza trabajo, mientras que en el caso rugoso sí.

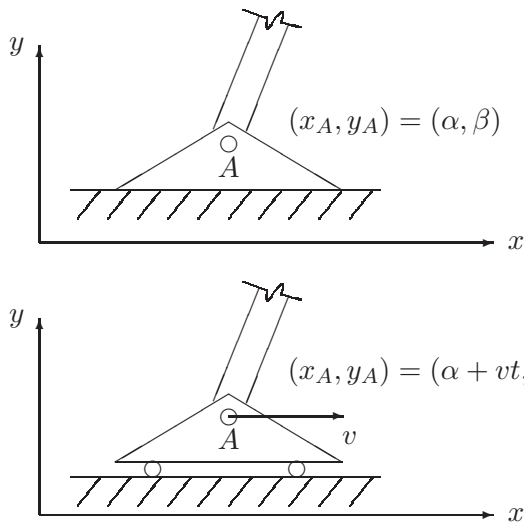


Figura 1.11: Enlaces holónomos; a) esclerónomo (no depende del tiempo), b) reónomo (dependiente del tiempo o enlace móvil).

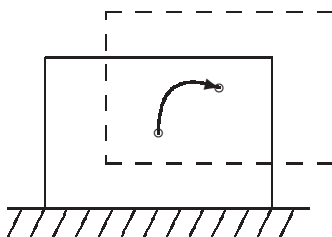


Figura 1.12: Enlace unilateral, que permite el movimiento vertical en un sólo sentido.

- Elegimos una partícula  $A$  cualquiera (figura 1.13); su posición estará definida por tres parámetros: sus tres coordenadas cartesianas,  $(x_A, y_A, z_A)$ .
- Una segunda partícula  $B$ , al estar obligada a mantener la distancia  $\overline{AB}$ , vendrá definida por dos parámetros adicionales (por ejemplo dos ángulos en esféricas respecto de  $A$ :  $\varphi_B, \lambda_B$ ).
- Definida la posición de las dos partículas  $A$  y  $B$ , una tercera partícula  $C$  precisa de un único parámetro más para definir su posición, por ejemplo, el ángulo de giro alrededor del eje  $AB$ ,  $\theta_C$ .

Cualquier otra partícula del sólido tiene ya definida su posición al estar definidas  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Por tanto no aportan grados de libertad adicionales.

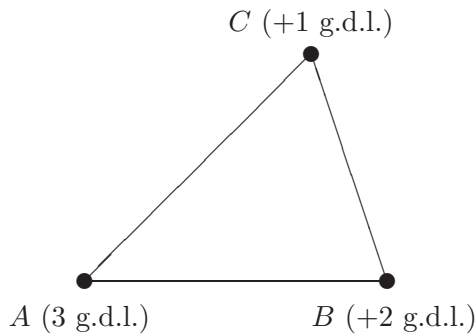


Figura 1.13: Grados de libertad del sólido rígido. Su movimiento queda determinado por el del triángulo rígido  $ABC$ , con  $3 + 2 + 1 = 6$  g.d.l.

Así, el número de grados de libertad de un sólido rígido es  $3 + 2 + 1 = 6$ . Existen múltiples maneras de elegir estos 6 g.d.l., aunque la descomposición usual es tomar las tres coordenadas de su centro de masas, y tres ángulos o parámetros que definan la orientación del sólido, como los ángulos de Euler (se verán en el capítulo 7). Es posible también escoger otros conjuntos de parámetros, según convenga en cada caso.  $\square$

**EJEMPLO 1.4:** Expresar los enlaces de un disco vertical de radio  $a$  que rueda sin deslizar sobre un plano horizontal, de forma que el disco se mantiene vertical en todo instante, aunque este plano horizontal no es fijo y puede rotar libremente (pivotamiento).

*Solución.* Sea el plano horizontal  $Oxy$  (figura 1.14). Denominamos  $(x, y, z)$  a las coordenadas del centro del disco,  $\psi$  al ángulo que forma el eje del disco (perpendicular al mismo por su centro) con la horizontal,  $\theta$  al ángulo que forma este mismo eje con la dirección  $Ox$  del plano horizontal, y  $\varphi$  al ángulo girado por el disco alrededor de su propio eje.

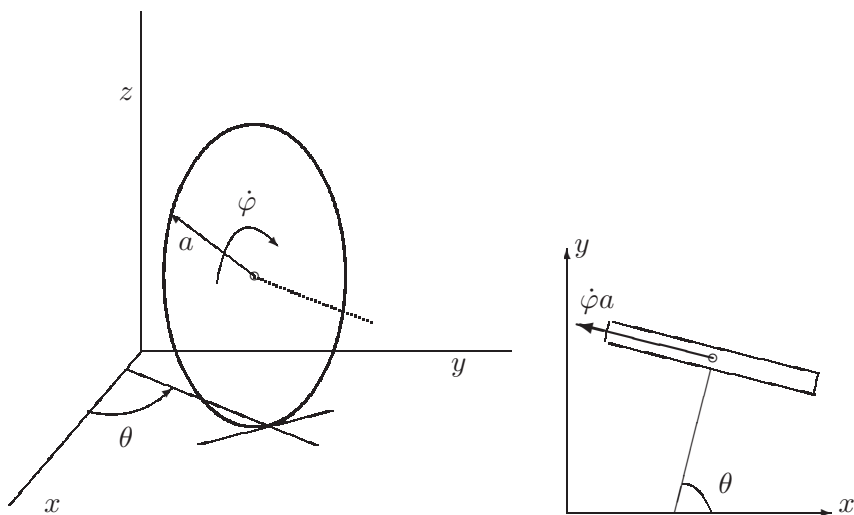


Figura 1.14: *Movimiento de un disco vertical rodando sin deslizar sobre un plano. La velocidad del centro del disco vertical tiene las componentes  $(-\dot{\varphi}a \text{ sen } \theta, \dot{\varphi}a \text{ cos } \theta)$  sobre las direcciones horizontales  $x$  e  $y$ .*

Los enlaces son cuatro: dos holónomos,

$$\begin{aligned} z &= a \quad (\text{altura constante del centro del disco}), \\ \psi &= 0 \quad (\text{disco vertical}), \end{aligned}$$

y dos no holónomos,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\dot{\varphi}a \text{ sen } \theta \\ \dot{y} &= \dot{\varphi}a \text{ cos } \theta. \end{aligned}$$

En un caso general en que  $\theta(t)$  no sea constante, éstas últimas relaciones no se pueden integrar, siendo por tanto enlaces anholónomos. El sistema queda definido por cuatro parámetros  $(x, y, \theta, \varphi)$  y dos ecuaciones de ligadura independientes, es decir, tiene  $6 - 4 = 2$  grados de libertad.

En el caso particular en que fuese  $\theta = \text{cte.}$ , el disco rodaría apoyado sobre una línea recta, dentro de un plano vertical fijo. Tomando el eje  $Ox$  según la dirección  $\theta = 0$ , resulta  $\dot{\varphi}a = -\dot{x} \Rightarrow x = -\varphi a$ . La ecuación es integrable y el enlace sería anholónomo sólo en apariencia.  $\square$

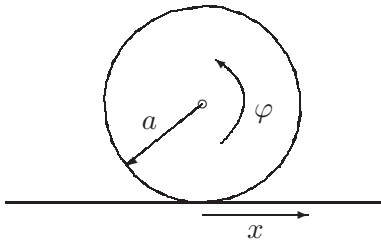


Figura 1.15: Disco rodando con  $\theta = cte$ ; el movimiento equivale al movimiento plano de rodadura sobre una recta, con la ligadura holónoma  $x = -\varphi a$ .

## 1.3. Principios y teoremas de la dinámica de Newton-Euler

### 1.3.1. Principio de la cantidad de movimiento

Consideramos un sistema formado por un número finito de partículas,  $\{m_i, i = 1, \dots, N\}$ .

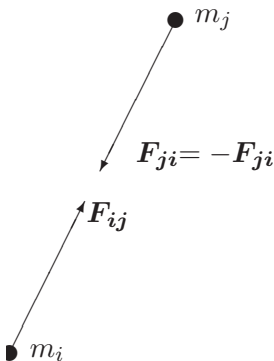


Figura 1.16: Fuerzas internas centrales entre dos partículas  $m_i$  y  $m_j$  del sistema.

Aplicando el principio de la cantidad de movimiento (2.<sup>a</sup> ley de Newton) a cada partícula  $m_i$  del sistema, siendo  $\mathbf{F}_i$  la resultante de todas las fuerzas sobre dicha partícula,

$$\mathbf{F}_i = \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i). \quad (1.33)$$

Descompondremos las fuerzas en internas y externas al sistema:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{ext} + \mathbf{F}_i^{int};$$

las fuerzas internas sobre la partícula  $i$ ,  $\mathbf{F}_i^{int}$ , son el resultado de las acciones del resto de las partículas  $j \neq i$ :

$$\mathbf{F}_i^{int} = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij},$$

donde la nomenclatura  $\mathbf{F}_{ij}$  indica la acción de  $m_j$  sobre  $m_i$ . Por la ley de acción y reacción ó 3.<sup>a</sup> ley de Newton,  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$  (figura 1.16). Así, al sumar las ecuaciones (1.33) para todas las partículas del sistema, las fuerzas internas se anulan dos a dos, resultando:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{ext} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij}}_{=0} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{d}{dt} m_i \mathbf{v}_i \right).$$

Llamando  $\mathbf{F} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{ext} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i$  (resultante de fuerzas externas sobre el sistema), y  $\mathbf{P} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i$  (cantidad de movimiento del sistema), resulta la expresión:

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \mathbf{P}.} \quad (1.34)$$

Expresión que se puede considerar como principio básico de la dinámica de sistemas, enunciándose como sigue:

*«La derivada respecto del tiempo de la cantidad de movimiento del sistema es igual a la resultante de las fuerzas exteriores.»*

Podemos obtener otra expresión equivalente para esta ecuación a partir del movimiento del centro de masas  $G$ . Se define éste como:

$$\mathbf{r}_G \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{M}, \quad (1.35)$$

Siendo  $M \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i$ , masa total del sistema.

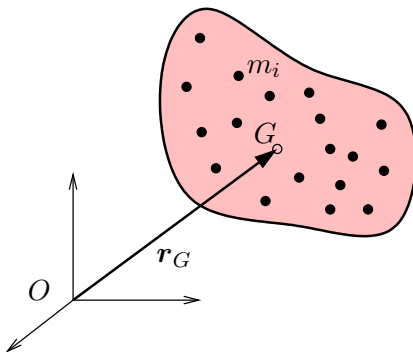


Figura 1.17: Centro de masas  $G$  de un sistema de varias partículas.



Derivando (1.35) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \right] &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{P} \\ &= M \mathbf{v}_G, \end{aligned} \quad (1.36)$$

donde  $\mathbf{v}_G \stackrel{\text{def}}{=} d\mathbf{r}_G/dt$  es la velocidad del centro de masas. Sustituyendo en (1.34), y llamando  $\mathbf{a}_G \stackrel{\text{def}}{=} d^2\mathbf{r}_G/dt^2$  a la aceleración del mismo, se llega a:

$$\boxed{\mathbf{F} = M\mathbf{a}_G} \quad (1.37)$$

Este resultado se denomina «teorema del movimiento del centro de masa», constituyendo una expresión alternativa para la ecuación (1.34). Se lee de la siguiente manera:

*«Se puede estudiar el movimiento del Centro de Masas G de un sistema como si fuera una partícula, concentrando toda la masa del sistema, sometida a la resultante de fuerzas exteriores sobre el sistema.»*

Como corolario se puede deducir el teorema de conservación correspondiente:

$$\text{si } \mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = M\mathbf{v}_G = \text{cte} \quad (1.38)$$

*«Si la resultante de las fuerzas exteriores sobre el sistema es nula, la cantidad de movimiento del sistema se conserva, por lo que el centro de masas sigue un movimiento rectilíneo y uniforme.»*

La condición de conservación se cumple obviamente para un sistema aislado, o en cualquier otro que aún sin estar aislado esté sometido a un conjunto de fuerzas con resultante nula.

### 1.3.2. Principio del momento cinético

La ecuación de balance del momento cinético (1.4) aplicada a una partícula  $m_i$  del sistema se expresa como:

$$M_O^i = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_O^i, \quad (1.39)$$

donde  $\mathbf{M}_O^i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i$ , y  $\mathbf{H}_O^i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i$  ( $i$  no sumado). Si sumamos (1.39) para todo el sistema, realizando la descomposición habitual entre fuerzas internas y externas:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{M}_O^i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \wedge \left( \overbrace{\sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij}}^{\mathbf{F}_i^{\text{int}}} \right) \quad (1.40)$$

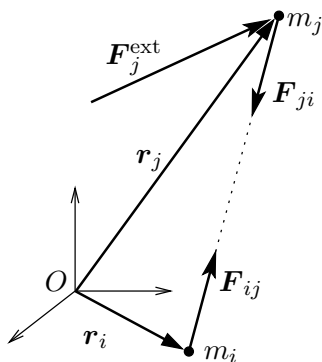


Figura 1.18: Fuerzas internas y externas sobre dos partículas cualesquiera del sistema.

Admitiremos que se cumple la ley de acción y reacción con su enunciado más fuerte: no sólo son  $\mathbf{F}_{ij}$  y  $\mathbf{F}_{ji}$  iguales y opuestas, sino que supondremos que son *fuerzas centrales*, siguiendo la misma recta de acción que une a  $m_i$  con  $m_j$ :

$$\mathbf{F}_{ij} = F_{ij}(r_{ij}) \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{r_{ij}} \quad (r_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|). \quad (1.41)$$

Entonces, para dos partículas cualesquiera:

$$\mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \wedge (-\mathbf{F}_{ij}) = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \wedge \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0} \quad (i, j \text{ no sumados})$$

De esta forma, la suma de los momentos de las fuerzas interiores en (1.40) se anula, al cancelarse dos a dos los sumandos. Definiendo el momento cinético del sistema respecto a  $O$ :

$$\mathbf{H}_O \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mathbf{H}_O^i = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i$$

y el momento de las fuerzas exteriores respecto de  $O$ :

$$\mathbf{M}_O \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mathbf{M}_O^i = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{\text{ext}}$$

se obtiene finalmente:

$$\boxed{\mathbf{M}_O = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_O} \quad (1.42)$$

Esta expresión, que llamaremos también «ecuación de balance del momento cinético», se puede considerar como principio básico de la dinámica de sistemas, con el siguiente enunciado:

*«El momento de las fuerzas exteriores de un sistema respecto de un punto  $O$  fijo es igual a la derivada respecto del tiempo del momento cinético del sistema respecto del mismo punto.»*

Como corolario, cuando  $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ , se obtiene el teorema de conservación correspondiente:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}_O = \text{cte.} \quad (1.43)$$

La constancia de  $\mathbf{H}_O$  puede ocurrir en los casos siguientes:

- Sistema aislado, sobre el que no actúa ninguna fuerza exterior. El momento cinético del sistema respecto de cualquier punto se conserva.
- Fuerzas centrales (todas dirigidas hacia un mismo punto fijo), en cuyo caso se conserva el momento cinético respecto del centro de fuerzas, aunque no necesariamente respecto de otros puntos distintos.

En lo anterior se ha admitido que las fuerzas internas son todas centrales (1.41). Las interacciones de tipo gravitatorio o electrostático cumplen muy aproximadamente esta condición, pero otro tipo de fuerzas como las electrodinámicas no la cumplen necesariamente. De hecho, en sistemas con cargas eléctricas móviles, se puede violar la ley de acción y reacción, tanto en su enunciado fuerte (fuerzas centrales) como en su enunciado más débil. En el caso de un sólido las interacciones entre partículas se deben a fuerzas de contacto, de naturaleza compleja, que tampoco resulta evidente que deban ser centrales. Sin embargo, en los casos en los que existan fuerzas internas del tipo mencionado, generalmente se puede encontrar una generalización de  $\mathbf{P}$  ó de  $\mathbf{H}_O$  que verifica los teoremas de conservación enunciados. Por lo tanto, en lo que sigue supondremos que, independientemente de la naturaleza de las fuerzas internas, se verifica el principio del momento cinético expresado por (1.42). Puesto que esta afirmación se postula como base de partida, es más apropiado referirse a ella como «principio» que como «teorema».

Conviene realizar una aclaración importante, previniendo del grave error que resultaría de confundir en (1.42) la resultante de los momentos,  $\mathbf{M}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{ext}$ , con el momento de la resultante, que si suponemos a ésta

aplicada en  $G$ , sería  $\mathbf{r}_G \wedge (\sum_i \mathbf{F}_i^{ext}) \neq \mathbf{M}_O$ . De caer en esta confusión, se llegaría a contradicciones tan graves como que un sistema sometido a un par de fuerzas (que tiene resultante nula) no se movería.

### 1.3.3. Teorema de la energía cinética

La ecuación de la energía cinética (1.6) aplicada a cada partícula  $m_i$  expresa:

$$dW_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = d\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right) \quad (i \text{ no sumado})$$

Al igual que en los casos anteriores, para obtener las magnitudes cinéticas del sistema conjunto, sumamos para todas las partículas del mismo:

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 \quad \Rightarrow \quad dT = d\left[\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2\right]$$

$$dW \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \underbrace{\sum_i \mathbf{F}_i^{(ext)} \cdot d\mathbf{r}_i}_{dW^{ext}} + \underbrace{\sum_i \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i}_{dW^{int}},$$

obteniéndose finalmente:

$$dT = dW$$

En las ecuaciones de la cantidad de movimiento (1.34) y del momento cinético (1.42), el efecto de las fuerzas interiores desaparecía al sumar para todo el sistema. Sin embargo, en un caso general el trabajo debido a las fuerzas interiores no se anula:

$$dW^{int} \neq 0.$$

Merece la pena analizar de forma detallada el trabajo de las fuerzas interiores para comprender mejor el significado de la observación anterior. Sean dos partículas cualesquiera del sistema,  $m_i$  y  $m_j$ , situadas inicialmente en  $A$  y  $B$  (figura 1.19). Suponemos que al cabo de un movimiento elemental arbitrario están situadas en dos puntos cualesquiera  $A'$  y  $B'$ . Podemos descomponer el movimiento elemental total en:

1. Traslación ( $T$ ) pasando  $A$  a  $A'$  y  $B$  a  $B''$ :

$$d\mathbf{r}_i^T = d\mathbf{r}_j^T$$

$$dW^T = \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i^T + (-\mathbf{F}_{ij}) \cdot d\mathbf{r}_i^T = 0$$

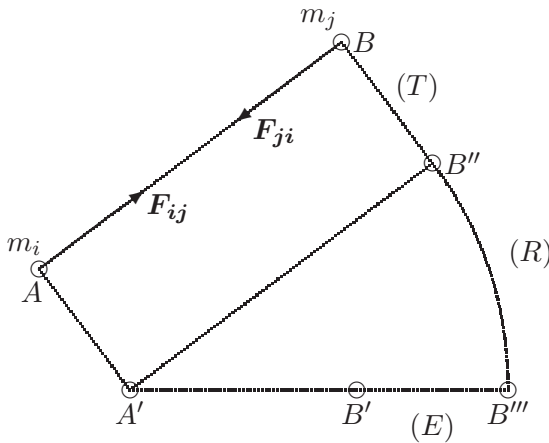


Figura 1.19: Descomposición de un movimiento elemental general en traslación, rotación y estiramiento.

2. Rotación (R) alrededor de  $A'$ , en el plano definido por  $A'B''B'$ , quedando fijo  $m_i$  y pasando  $m_j$  a  $B''$ :

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}_j^R &= dt\boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) ; & d\mathbf{r}_i^R &= \mathbf{0} \\ dW^R &= \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_j^R = \mathbf{F}_{ji} \cdot [dt\boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)] = 0 \end{aligned}$$

donde se ha supuesto que  $\mathbf{F}_{ij}$  lleva la dirección de  $(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$ , es decir, se trata de fuerzas centrales.

3. Estiramiento (E), quedando fija  $m_i$  y pasando finalmente  $m_j$  a  $B'$ :

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}_j^E ; & \quad d\mathbf{r}_i^E = \mathbf{0}, \\ dW^E &= \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_j^E \neq 0. \end{aligned}$$

En resumen, los movimientos de traslación y rotación son movimientos de sólido rígido y no producen trabajo de las fuerzas interiores. Por el contrario, las deformaciones internas (distorsiones o estiramientos), que no corresponden a movimientos de sólido rígido, sí producen un trabajo neto de las fuerzas interiores.

En definitiva, se puede escribir:

$$\boxed{dT = dW = dW^{int} + dW^{ext}} \quad (1.44)$$

«La variación de la energía cinética conjunta de un sistema es igual al trabajo realizado por las fuerzas, tanto internas como externas.»

La consideración del trabajo de las fuerzas interiores es imprescindible para el cálculo de estructuras y la mecánica de los medios continuos deformables, en los que la deformación viene gobernada por la energía interna de deformación acumulada. Los métodos y teoremas energéticos proporcionan algunos de los procedimientos más potentes de cálculo en este caso.

Si todas las fuerzas (tanto externas como internas) provienen de un potencial independiente del tiempo, se verificará:

$$dW = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = -dV,$$

deduciéndose entonces de (1.44) el teorema de conservación de la energía:

$$dT + dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = T + V = \text{cte.}} \quad (1.45)$$

Conviene recalcar que en esta ecuación la energía potencial  $V$  corresponde al la *Energía Potencial Total*, derivándose de ella tanto las fuerzas interiores como las exteriores. Como ejemplo, en el caso de las estructuras o de los medios elásticos deformables,  $V$  debe incluir tanto el potencial de las cargas externas aplicadas como la energía de deformación debida a las fuerzas interiores.

Si las fuerzas internas en el sistema son centrales en el sentido de (1.41), necesariamente provienen de un potencial:

$$V_{ij}(r_{ij}) = - \int F_{ij}(\rho) d\rho;$$

$$\mathbf{F}_{ij} = - \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i}. \quad (1.46)$$

Es posible demostrar en este caso que el potencial conjunto de las fuerzas interiores es

$$V^{\text{int}} = \sum_i \sum_{j>i} V_{ij}. \quad (1.47)$$

(La limitación  $j > i$  sirve para no sumar dos veces el potencial de interacción entre cada dos partículas.) De esta forma la ecuación (1.44) se convierte en

$$d(T + V^{\text{int}}) = dW^{\text{ext}}.$$

En este caso, si se trata de un *sistema aislado* se verificaría

$$\boxed{E = T + V^{\text{int}} = \text{cte.}} \quad (1.48)$$

EJEMPLO 1.5: Potencial de fuerzas internas de un sistema de partículas discretas, con atracción lineal en función de la distancia entre cada dos partículas.

*Solución.* Se trata de fuerzas análogas a resortes lineales ideales interpuestos entre cada dos partículas, siguiendo el esquema de fuerzas centrales. Suponiendo en primer lugar que la constante de todos estos resortes es la misma, el potencial de uno de ellos es

$$V_{ij} = \frac{1}{2}kr_{ij}^2,$$

siendo  $r_{ij}$  la distancia entre la pareja de puntos  $(i, j)$ . Teniendo en cuenta que  $\partial r_{ij}/\partial \mathbf{r}_i = -\mathbf{r}_{ij}/r_{ij}$ , la fuerza ejercida sobre  $i$  por  $j$  se obtiene siguiendo (1.46):

$$\mathbf{F}_{ij} = -\frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} = k\mathbf{r}_{ij}.$$

La energía potencial total para todo el sistema, según (1.47), es

$$V^{\text{int}} = \sum_i \sum_{j>i} \frac{1}{2}kr_{ij}^2.$$

Un caso particular sería aquél en que las constantes de atracción entre cada dos partículas son proporcionales al producto de las masas,

$$\mathbf{F}_{ij} = \alpha m_i m_j \mathbf{r}_{ij}.$$

Sumando todas las fuerzas internas sobre una partícula dada,

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \alpha m_i m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = \alpha m_i M (\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_i)$$

siendo  $M = \sum_k m_k$  la masa total. Se obtiene por tanto una fuerza de atracción de cada partícula hacia el centro de masas del conjunto. El movimiento de cada partícula relativo a dicho centro de masas sería una órbita elíptica con centro en él. Es trivial comprobar que la suma de todas las fuerzas interiores dadas por la anterior expresión se anula.  $\square$

## 1.4. El sistema del centro de masas

El sistema del centro de masas (SCM) se define como un sistema de referencia cuyo origen está en el centro de masas  $G$  y que no experimenta

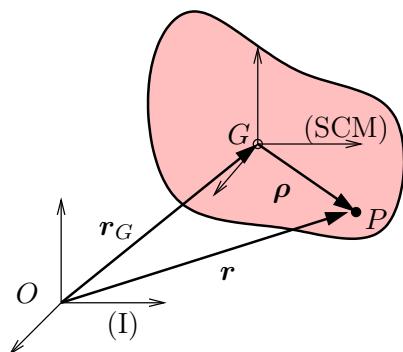


Figura 1.20: El sistema de referencia del centro de masas (SCM), con origen en  $G$  y ejes paralelos al sistema inercial ( $I$ ).

rotación. Si se caracteriza mediante un triedro de coordenadas cartesianas, las direcciones de las mismas serán fijas y paralelas al sistema inercial de partida (figura 1.20).

Las expresiones de posición, velocidad y aceleración relativos al SCM son respectivamente

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho} &= \mathbf{r} - \mathbf{r}_G, \\ \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{v} - \mathbf{v}_G, \\ \boldsymbol{\alpha} &= \mathbf{a} - \mathbf{a}_G.\end{aligned}$$

Para obtener  $\boldsymbol{\nu}$  y  $\boldsymbol{\alpha}$  en estas expresiones, se ha derivado directamente de manera sucesiva la expresión de  $\boldsymbol{\rho}$ , sin resultar necesario emplear el término complementario de derivación  $\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}$  establecido en la ecuación (1.25). Esto se debe a que por su definición el SCM no gira ( $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$ ) anulándose entonces dicho término.

Sin embargo, debe quedar claro que, aunque el SCM no gire, en un caso general puede tener aceleración de traslación ( $\mathbf{a}_G \neq \mathbf{0}$ ), y que por lo tanto, *no se trata de un sistema inercial*<sup>11</sup>. A pesar de esto, su uso posee ventajas notables, ya que como veremos a continuación, se siguen cumpliendo los principios del momento cinético y de la energía cinética, exactamente como si se tratase de un sistema inercial. El principio de la cantidad de movimiento queda reducido a una igualdad trivial.

<sup>11</sup>Una excepción a esto sería el caso de un sistema aislado, en el que  $G$  se mueve con velocidad rectilínea y uniforme, ver ecuación (1.38).



### 1.4.1. Cantidad de movimiento

En el SCM, la expresión de la cantidad de movimiento  $\mathbf{P}$  es:

$$\mathbf{P}^{SCM} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i - \underbrace{\left( \sum_i m_i \right)}_{\stackrel{\text{def}}{=} M} \mathbf{v}_G = \mathbf{0},$$

donde se ha empleado (1.36). Así, resulta la expresión trivial:

$$\boxed{\mathbf{P}^{SCM} = \mathbf{0}}$$

### 1.4.2. Momento cinético

El momento cinético en un punto cualquiera  $Q$  viene dado por la expresión

$$\mathbf{H}_Q = \mathbf{H}_O + \mathbf{P} \wedge \mathbf{r}_Q = \mathbf{H}_O - \mathbf{r}_Q \wedge (M\mathbf{v}_G). \quad (1.49)$$

Aplicando esta ecuación al centro de masas  $G$ :

$$\mathbf{H}_G = \mathbf{H}_O - \mathbf{r}_G \wedge M\mathbf{v}_G. \quad (1.50)$$

Conviene resaltar que en esta expresión del momento cinético se emplean velocidades absolutas.

Sin embargo, para calcular el momento cinético relativo al SCM, además de tomar momentos respecto de  $G$ , debemos emplear también las velocidades  $\mathbf{v}_i$  relativas al SCM:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_G^{SCM} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \wedge m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_G) \\ &= \underbrace{\sum_i \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i}_{\mathbf{H}_O} - \underbrace{\sum_i \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_G}_{\mathbf{r}_G \wedge M\mathbf{v}_G} - \underbrace{\mathbf{r}_G \wedge \sum_i m_i \mathbf{v}_i}_{\mathbf{r}_G \wedge M\mathbf{v}_G} + \mathbf{r}_G \wedge M\mathbf{v}_G \\ &= \mathbf{H}_O - \mathbf{r}_G \wedge M\mathbf{v}_G. \end{aligned}$$

Observamos pues que ambas expresiones resultan ser idénticas:  $\mathbf{H}_G^{SCM} = \mathbf{H}_G$ . Por tanto, a la hora de tomar momentos en  $G$ , no nos preocuparemos de este aspecto y escribiremos simplemente  $\mathbf{H}_G$ . Conviene advertir que esto no sucede en otros puntos distintos de  $G$ .

Derivando (1.50) respecto del tiempo:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{H}_G = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_O - \underbrace{\mathbf{v}_G \wedge M\mathbf{v}_G}_{=0} - \mathbf{r}_G \wedge \underbrace{M\mathbf{a}_G}_{\mathbf{F}} = M\mathbf{O} - \mathbf{r}_G \wedge \mathbf{F}$$

pero

$$\mathbf{M}_G = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \wedge \mathbf{F}_i^{ext} = \mathbf{M}_O - \mathbf{r}_G \wedge \underbrace{\left( \sum_i \mathbf{F}_i^{ext} \right)}_{\mathbf{F}},$$

luego:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \mathbf{H}_G = \mathbf{M}_G} \quad (1.51)$$

Es decir, se verifica la ecuación del Momento Cinético (1.42) respecto del origen  $G$  del SCM, exactamente igual que si fuese inercial.

Por lo tanto, continuando con la discusión realizada al final del apartado 1.3.2, para aplicar la ecuación de balance del momento cinético (1.42), se debe tomar momentos bien respecto de un punto fijo  $O$ , o bien respecto del centro de masas  $G$  del sistema; En este último caso, las velocidades pueden ser las absolutas respecto de un sistema inercial, o las relativas al SCM, ya que según hemos visto ambas dan idéntico resultado.

Por el contrario, si empleamos un punto  $Q$  cualquiera, que no coincida necesariamente con  $G$  ni sea fijo, derivando la fórmula (1.49) resulta:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{H}_Q = \frac{d}{dt} (\mathbf{H}_O - \mathbf{r}_Q \wedge M \mathbf{v}_G) = \underbrace{\mathbf{M}_O - \mathbf{r}_Q \wedge M \mathbf{a}_G}_{\mathbf{M}_Q} - \mathbf{v}_Q \wedge M \mathbf{v}_G$$

Es decir:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{H}_Q = \mathbf{M}_Q - \mathbf{v}_Q \wedge M \mathbf{v}_G. \quad (1.52)$$

Es necesario pues añadir un término complementario  $\mathbf{v}_Q \wedge M \mathbf{v}_G$  respecto de las ecuaciones (1.42) ó (1.51). Por tanto, si se toman momentos respecto de otro punto  $Q$ , sólo se verificará la ecuación de balance del momento cinético (1.42) cuando se cumpla una de las condiciones siguientes:

- si el punto  $Q$  tiene velocidad nula,  $\mathbf{v}_Q = \mathbf{0}$ ;
- si el punto  $Q$  coincide con  $G$ , o por lo menos, su velocidad es paralela a la de  $G$ :  $\mathbf{v}_Q \parallel \mathbf{v}_G$ .

Como resultado de la discusión anterior se extrae una recomendación importante a efectos prácticos:

*no conviene nunca aplicar la ecuación del momento cinético (1.42) en puntos que no sean bien fijos, bien el centro de masas.*

La razón es que los términos correctores que habría que manejar en otro caso no tienen una interpretación física clara, siendo muy fácil que den lugar a confusiones.

A estos efectos es importante destacar que no es lo mismo un punto fijo que un punto que tenga velocidad nula en un instante (en este último caso el punto puede tener aceleración no nula en cuyo caso no es válido para aplicar la ecuación del momento cinético). Otra posible fuente de error es confundir la velocidad de un punto definido por un criterio geométrico (velocidad de «sucesión»), con la velocidad del punto del sólido que coincide con él en un instante dado<sup>12</sup>.

### 1.4.3. Energía cinética

Calculamos primero la relación entre las medidas de la energía cinética  $T$  (absoluta) y  $T^{SCM}$  (relativa al SCM):

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\nu}_i) \cdot (\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\nu}_i) \\ &= \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2}_{\stackrel{\text{def}}{=} T^{SCM}} + \underbrace{\left( \sum_i m_i \boldsymbol{\nu}_i \right)}_{=0} \cdot \mathbf{v}_G + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_G^2, \end{aligned}$$

es decir:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M v_G^2 + T^{SCM}} \quad (\text{Teorema de König}) \quad (1.53)$$

La energía cinética del sistema se puede descomponer por tanto en la suma de la de una partícula con toda la masa  $M$  que se moviera con  $G$ , más la energía cinética relativa al SCM. El primer sumando se puede interpretar como el debido al movimiento de traslación del sistema, mientras que el segundo corresponde al movimiento relativo al centro de masa.

<sup>12</sup>Esto último ocurre a menudo cuando se toman momentos respecto del punto de contacto de dos sólidos, como en la rodadura de un disco sobre una recta. El punto de contacto entre ambos se traslada sobre la recta al rodar el disco, por lo que su velocidad no es nula; sin embargo, es el centro instantáneo de rotación en cada instante, por lo que la velocidad del punto del disco situado sobre él en cada instante sí será nula. Por ejemplo, para un sólido plano que rueda sin deslizar sobre una recta, el momento cinético relativo al punto del sólido que está sobre el centro de rodadura es  $H_Q = I_Q \Omega$ , siendo  $I_Q$  el momento de inercia. No se cumple, salvo en algunos casos particulares, la ecuación  $M_Q = (d/dt)H_Q = I_Q \dot{\Omega}$ , por ser  $Q$  un punto cuya velocidad es instantáneamente nula pero que tiene aceleración no nula.

Si se calculase lo mismo respecto a otro sistema basado en otro punto distinto del CDM  $Q \neq G$ , la expresión anterior no sería válida, siendo necesarios términos adicionales<sup>13</sup>. Volvemos a advertir al igual que ya se hizo para el momento cinético, para evitar posibles errores en la aplicación del teorema de König, de la inconveniencia de aplicar esta última reducción a un punto  $Q$  distinto de  $G$ .

Tomando una variación elemental (diferencial) de  $T^{SCM}$ ,

$$dT^{SCM} = \sum_i m_i(\alpha_i dt) \cdot \nu_i = \sum_i m_i \alpha_i \cdot d\rho_i$$

Pero:

$$\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i = m_i(\alpha_i + \mathbf{a}_G) \quad \Rightarrow \quad m_i \alpha_i = \mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_G,$$

luego

$$dT^{SCM} = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\rho_i - \underbrace{\left( \sum_i m_i d\rho_i \right)}_{=0} \cdot \mathbf{a}_G = \sum_i \underbrace{\mathbf{F}_i \cdot d\rho_i}_{\stackrel{\text{def}}{=} dW^{SCM}}$$

Por lo tanto

$$\boxed{dT^{SCM} = dW^{SCM}},$$

es decir, se cumple también la ecuación de la energía cinética (1.44) en el sistema del centro de masa, a pesar de que no sea inercial.

#### 1.4.4. Aplicación: sólidos rígidos con movimiento plano

Como aplicación de los teoremas generales expuestos arriba, resumimos a continuación los resultados principales para el caso concreto de sólidos rígidos con movimiento plano. No se pretende una exposición rigurosa ni detallada de este tema, que se considera ya conocido a partir de cursos anteriores.

Se entiende por sólido rígido un sistema en el que la configuración relativa de todas sus partículas no sufre variación, no se producen distorsiones ni cambio de distancia entre las partículas del mismo. La condición de movimiento plano indica que las velocidades de todos los puntos pertenecen a un plano dado  $\Pi$ , es decir son perpendiculares a una determinada dirección  $\mathbf{k}$  fija (la normal a  $\Pi$ ). El plano del movimiento se puede caracterizar por las coordenadas cartesianas  $(x, y)$ , o bien los versores de la base  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  (que forman un triedro a derechas con  $\mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$ ).

<sup>13</sup>Véase *Curso de Mecánica*, J.M. Goicolea 2010, apartado 6.3.3.

Además el sólido estará constituido en el caso más general por una masa distribuida a lo largo de un cierto dominio  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ , con densidad másica  $\rho$  por unidad de volumen. Considerando la sección  $\tilde{\mathcal{B}}$  de  $\mathcal{B}$  por el plano del movimiento, es posible también definir una densidad másica por unidad de área, que llamaremos  $\tilde{\rho}$  para diferenciarla de la volumétrica:

$$dm = \rho dV = \tilde{\rho} dA.$$

Así, la masa del sólido será

$$M = \int_{\tilde{\mathcal{B}}} \tilde{\rho} dA. \quad (1.54)$$

El centro de masas se obtiene mediante

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{M} \int_{\tilde{\mathcal{B}}} \mathbf{r} \tilde{\rho} dA. \quad (1.55)$$

### Magnitudes cinéticas

**Cantidad de movimiento.**— Se expresa de la misma manera que un sistema general:

$$\mathbf{P} = \int_{\tilde{\mathcal{B}}} \mathbf{v} \tilde{\rho} dA = M \mathbf{v}_G \Rightarrow \begin{array}{l} P_x = M \dot{x}_G \\ P_y = M \dot{y}_G \end{array} \quad (1.56)$$

**Momento cinético.**— Para expresar el momento cinético debemos introducir una nueva magnitud definida por la geometría de masas del sólido, el *momento de inercia* respecto de un punto<sup>14</sup>  $O$ :

$$I_O = \int_{\tilde{\mathcal{B}}} r^2 \tilde{\rho} dA, \quad (1.57)$$

donde las distancias  $r$  están medidas respecto al punto  $O$  en el que se toman momentos. Dada la constancia de la geometría de masas de un sólido rígido, el momento de inercia respecto a un punto dado del mismo es una constante. El teorema de Steiner permite relacionar el momento de inercia respecto a un punto cualquiera con el que corresponde al centro de masas:

$$I_O = I_G + M \overline{OG}^2. \quad (1.58)$$

<sup>14</sup>Estrictamente hablando, sería el momento de inercia respecto de un eje perpendicular al plano que pasa por el punto dado.

Consideramos en primer lugar el momento cinético respecto de un punto con velocidad nula, que se toma como origen de coordenadas. La expresión es

$$\mathbf{H}_O = \int_{\tilde{B}} \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} \tilde{\rho} dA. \quad (1.59)$$

Teniendo en cuenta que  $\mathbf{v} = \Omega \mathbf{k} \wedge \mathbf{r}$ , la integral resulta

$$\mathbf{H}_O = \left( \int_{\tilde{B}} r^2 \tilde{\rho} dA \right) \Omega \mathbf{k}. \quad (1.60)$$

Puesto que tanto el vector momento cinético como la velocidad angular necesariamente llevan la dirección del versor  $\mathbf{k}$  normal al plano, se puede prescindir del mismo en las expresiones. Empleando la definición del momento de inercia (1.57) resulta

$$\boxed{H_O = I_O \Omega.} \quad (1.61)$$

Tomando ahora para un caso general el momento respecto a  $G$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_G &= \int_{\tilde{B}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_G) \wedge \mathbf{v} \tilde{\rho} dA = \int_{\tilde{B}} \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} \tilde{\rho} dA - \int_{\tilde{B}} \mathbf{r}_G \wedge \mathbf{v} \tilde{\rho} dA \\ &= \mathbf{H}_O - \mathbf{r}_G \wedge M \mathbf{v}_G = I_O \Omega \mathbf{k} - \mathbf{r}_G \wedge M (\Omega \mathbf{k} \wedge \mathbf{r}_G) \\ &= (I_O - M r_G^2) \Omega \mathbf{k}; \end{aligned} \quad (1.62)$$

y teniendo en cuenta el teorema de Steiner (1.58),

$$\boxed{H_G = H_G^{SCM} = I_G \Omega.} \quad (1.63)$$

**Energía cinética.**— Consideramos en primer lugar el caso en que el origen  $O$  tenga velocidad nula:

$$T = \int_{\tilde{B}} \frac{1}{2} v^2 \tilde{\rho} dA = \int_{\tilde{B}} \frac{1}{2} (\Omega r)^2 \tilde{\rho} dA \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} I_O \Omega^2.} \quad (1.64)$$

En el caso general, haciendo uso del teorema de König (1.53), y teniendo en cuenta que  $T^{SCM} = \frac{1}{2} I_G \Omega^2$ ,

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \Omega^2.} \quad (1.65)$$

### Ecuaciones de la dinámica

**Balance de cantidad de movimiento.**— Las ecuaciones son las mismas que en el caso general:

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a}_G \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} F_x = M\ddot{x}_G \\ F_y = M\ddot{y}_G \end{array}} \quad (1.66)$$

**Balance de momento cinético.**— En el caso en que  $O$  sea *un punto fijo*<sup>15</sup> las ecuaciones de balance resultan directamente de derivar 1.61,

$$\boxed{M_O = I_O\dot{\Omega}.} \quad (1.67)$$

En un caso general se puede derivar el momento cinético respecto a  $G$  (1.63):

$$\boxed{M_G = I_G\dot{\Omega}.} \quad (1.68)$$

Esta última expresión es de validez general, siendo posible emplearla en cualquier caso, con independencia de que exista o no un punto fijo.

Las tres ecuaciones (1.66)<sub>1</sub>, (1.66)<sub>2</sub> y (1.68) se denominan *ecuaciones cardinales de la dinámica*, siendo necesarias y suficientes para determinar en un caso general la dinámica de los tres grados de libertad del sólido en movimiento plano ( $x_G, y_G, \theta$ ).

**EJEMPLO 1.6:** Un semidisco homogéneo de masa  $M$  y radio  $R$  se mueve en un plano vertical fijo, rodando sin deslizar sobre una recta horizontal. Se pide:

- Si el semidisco está en un instante determinado con su diámetro de borde vertical y con velocidad de rotación  $\Omega$  (figura 1.21), obtener la aceleración angular  $\dot{\Omega}$  y la reacción de la recta en el punto de contacto.
- Mismas cuestiones, pero ahora para el semidisco en una posición genérica definida por el ángulo  $\theta$  (figura 1.21).

*Solución.*

---

<sup>15</sup> Es importante remarcar la condición de punto fijo en  $O$ , no bastando con que la velocidad instantánea sea nula. Por ejemplo, en un punto de rodadura no es posible tomar momentos en un caso general, ya que el punto  $O$  de rodadura varía con el movimiento, el momento de inercia  $I_O$  no correspondería a lo largo del tiempo al mismo punto material y por tanto, salvo casos particulares, tendrá derivada no nula.

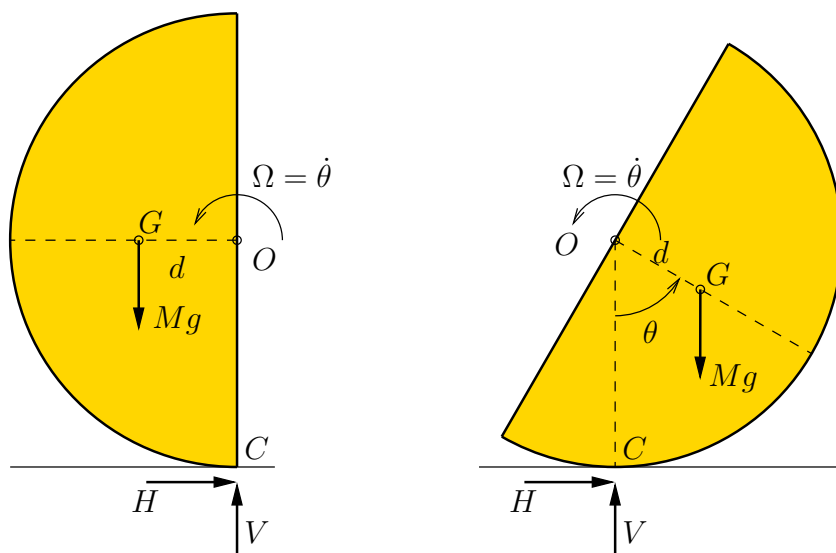


Figura 1.21: Ejemplo 1.6. Configuración con diámetro de borde vertical y configuración genérica, definida por el ángulo  $\theta$ .

a.— Se trata de un sistema rígido y plano, que se puede resolver de forma general mediante las ecuaciones cardinales de la dinámica, que en este caso son tres (dos del balance de cantidad de movimiento y una del momento cinético en  $G$ ). La condición de rodadura restringe dos grados de libertad, por lo que el movimiento tiene un sólo grado de libertad, aunque además debemos considerar las incógnitas de las componentes de la reacción en la recta  $(H, V)$ .

En primer lugar, aplicando el teorema de Guldin calculamos la posición del centro de masas:

$$2\pi d \left( \frac{1}{2} \pi R^2 \right) = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad \Rightarrow \quad d = \overline{OG} = \frac{4R}{3\pi}.$$

Las ecuaciones de la dinámica las aplicaremos tomando momentos en  $G$ , por lo que calculamos el momento de inercia en este punto. (Obsérvese que el punto de rodadura  $C$  no es un punto fijo, por lo que en general no es válido tomar momentos en él, aunque la tentación es fuerte ya que las reacciones incógnita no dan momentos en este punto.)

$$I_O = \frac{1}{2} MR^2; \quad I_G = I_O - Md^2 = \left( \frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right) MR^2$$



Mediante un análisis elemental del campo de aceleraciones resulta:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_O &= -R\ddot{\theta}; & \ddot{y}_O &= 0; \\ \ddot{x}_G &= -R\ddot{\theta} - \frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2; & \ddot{y}_G &:= -\frac{4R}{3\pi}\ddot{\theta} \end{aligned}$$

Ya podemos escribir las ecuaciones cardinales de la dinámica. En primer lugar, las de balance de cantidad de movimiento:

$$H = M\ddot{x}_G = -M \left( R\ddot{\theta} + \frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2 \right); \quad (1.69)$$

$$V - Mg = M\ddot{y}_G = -M\frac{4R}{3\pi}\ddot{\theta}. \quad (1.70)$$

La ecuación del momento cinético es:

$$HR + V\frac{4R}{3\pi} = I_G\ddot{\theta} = \left( \frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right) MR^2\ddot{\theta}. \quad (1.71)$$

Entre las tres ecuaciones (1.69), (1.70) y (1.71) se despeja para obtener el resultado pedido:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{8}{9\pi} \left( \frac{g}{R} + \dot{\theta}^2 \right); \\ H &= -\frac{4}{9\pi} M(2g - R\dot{\theta}^2); \\ V &= Mg - \frac{32}{27\pi^2} M(g + R\dot{\theta}^2) \end{aligned} \quad (1.72)$$

Puede comprobarse que, de haber tomado momentos en el punto de rodadura  $C$ , los resultados habrían sido distintos (e incorrectos).

b.— En este caso (figura 1.21), las componentes de la aceleración de  $G$  son:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_G &= -R\ddot{\theta} - \frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2 \sin \theta + \frac{4R}{3\pi}\ddot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{y}_G &= \frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2 \cos \theta + \frac{4R}{3\pi}\ddot{\theta} \sin \theta \end{aligned} \quad (1.73)$$

Las ecuaciones cardinales de la dinámica, tomando momentos en  $G$ , resultan:

$$\begin{aligned}
 H &= M \left( -R\ddot{\theta} - \frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2 \operatorname{sen} \theta + \frac{4R}{3\pi}\ddot{\theta} \cos \theta \right) \\
 V - Mg &= M \left( \frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2 \cos \theta + \frac{4R}{3\pi}\ddot{\theta} \operatorname{sen} \theta \right) \\
 H \left( R - \frac{4R}{3\pi} \cos \theta \right) - V \frac{4R}{3\pi} \operatorname{sen} \theta &= \left( \frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right) MR^2\ddot{\theta}
 \end{aligned} \tag{1.74}$$

Con algo más de trabajo podemos despejar de estas tres ecuaciones los resultados buscados:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\theta} &= -8 \frac{(g/R + \dot{\theta}^2) \operatorname{sen} \theta}{9\pi - 16 \cos \theta} \\
 H &= \frac{4}{3} M \frac{(6g\pi - 3R\dot{\theta}^2\pi + 8R\dot{\theta}^2 \cos \theta - 8g \cos \theta) \operatorname{sen} \theta}{\pi(9\pi - 16 \cos \theta)} \\
 V &= Mg + \frac{1}{3} M \frac{-32g \operatorname{sen}^2 \theta + 36\pi R\dot{\theta}^2 \cos \theta - 32R\dot{\theta}^2(1 + \cos^2 \theta)}{\pi(9\pi - 16 \cos \theta)}
 \end{aligned} \tag{1.75}$$

Como comprobación, podemos ver que al particularizar  $\theta = -\pi/2$  en estas expresiones se obtienen las mismas del caso anterior (1.72).  $\square$

**EJEMPLO 1.7:** Sea un sistema binario constituido por dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  que se atraen con una fuerza central proporcional a su distancia  $s$ , es decir,  $F = -ks$ . Además, el conjunto se halla sujeto al campo gravitatorio simplificado terrestre. Se pide:

- Obtener la expresión de la energía (potencial más cinética) del conjunto en *función exclusivamente* de las coordenadas de su C.D.M. ( $x_G, y_G$ ), su distancia ( $s$ ), y el ángulo ( $\varphi$ ) que forma el segmento  $m_1 m_2$  con una dirección fija.
- Misma cuestión con la cantidad de movimiento y el momento cinético.
- Obtener las integrales primeras del movimiento para las coordenadas anteriores.
- Obtener la ecuación diferencial de 2.º orden del movimiento en función exclusivamente de la coordenada  $s$ .
- Tomando ahora como coordenadas las cartesianas absolutas de la partícula  $m_1$  que llamaremos  $(r_x, r_y)$  y las relativas de  $m_2$  que denominaremos  $(s_x, s_y)$ , obtener las ecuaciones de la dinámica y comprobar

que las trayectorias relativas de cada partícula respecto de la otra son elipses.

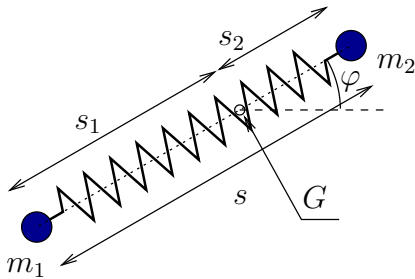


Figura 1.22: Ejemplo 1.7;

*Solución.*

a.— Al tratarse de fuerzas centrales el movimiento es plano y sólo se necesita estudiar la configuración dentro de un plano  $xy$  fijo, con los parámetros indicados en el enunciado  $(x_G, y_G, s, \varphi)$ .

Establecemos unos parámetros auxiliares  $(s_1, s_2)$  que definen las distancias de las partículas respecto al centro de masas  $G$  (figura 1.22). Aplicando la definición de centro de masas se tienen las relaciones

$$s_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} s, ; \quad s_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} s. \quad (1.76)$$

Aplicando el teorema de König (1.53), la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}m_1(\dot{s}_1^2 + s_1^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{s}_2^2 + s_2^2\dot{\varphi}^2);$$

teniendo en cuenta las expresiones (1.76), y llamando

$$M = (m_1 + m_2) \quad (\text{masa total});$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{masa equivalente}),$$

se llega a:

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}\mu(\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2). \quad (1.77)$$

Por otra parte, la energía potencial es

$$V = \frac{1}{2}ks^2 + Mgy_G.$$

Por lo tanto la energía total resulta

$$E = T + V = \frac{1}{2}M(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}\mu(\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}ks^2 + Mgy_G. \quad (1.78)$$

b.— La cantidad de movimiento resulta trivialmente

$$\mathbf{P} \equiv (M\dot{x}_G, M\dot{y}_G). \quad (1.79)$$

El movimiento es plano, por lo que el momento cinético puede caracterizarse por el valor escalar  $H_G$ :

$$H_G = m_1 s_1^2 \dot{\varphi} + m_2 s_2^2 \dot{\varphi},$$

y aplicando las expresiones (1.76) se llega a

$$H_G = \mu s^2 \dot{\varphi}. \quad (1.80)$$

c.— Las fuerzas aplicadas son o bien centrales (atracción elástica) o paralelas (gravedad simplificada), por lo que el momento de las mismas en  $G$  se anula, de donde se deduce la constancia del momento cinético:

$$M_G = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 \dot{\varphi} = C \quad (\text{cte.}) \quad (1.81)$$

Por otra parte, todas las fuerzas son conservativas, por lo que se conserva la energía total, dada por la ecuación (1.78). Dentro de esta ecuación podemos dividir la energía en dos componentes, una correspondiente al movimiento del C.D.M. y otra al movimiento relativo:

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}M(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2)}_{E_1} + \underbrace{\frac{1}{2}\mu(\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2)}_{E_2} + \frac{1}{2}ks^2. \quad (\text{cte.}) \quad (1.82)$$

La energía  $E_1$  del C.D.M. corresponde a un movimiento parabólico y es constante:

$$\frac{d}{dt}E_1 = \frac{1}{2}M(2\dot{x}_G \underbrace{\ddot{x}_G}_{=0} + 2\dot{y}_G \underbrace{\ddot{y}_G}_{=-g}) + Mgy_G = 0;$$

por tanto podemos establecer como integral primera la constancia de la energía  $E_2$  del movimiento relativo:

$$E_2 = E - E_1 = \frac{1}{2}\mu(\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}ks^2 \quad (\text{cte.}) \quad (1.83)$$

Empleando la otra integral primera (1.81) se puede eliminar  $\dot{\varphi}$  para obtener finalmente

$$E_2 = \frac{1}{2}\mu \left( \dot{s}^2 + \frac{C^2}{s^2} \right) + \frac{1}{2}ks^2 \quad (\text{cte.}) \quad (1.84)$$

d.— La aceleración radial en coordenadas polares, expresada en función de la constante de áreas (1.81), vale:

$$a_s = \ddot{s} - s\dot{\phi}^2 = \ddot{s} - \frac{C^2}{s^3} \quad (1.85)$$

Podemos obtener una ecuación diferencial de 2.º orden a partir de la ecuación de la dinámica radial:

$$F(r) = \mu a_s \quad \Rightarrow \quad \mu \left( \ddot{s} - \frac{C^2}{s^3} \right) = -ks. \quad (1.86)$$

Esta misma expresión se puede obtener derivando la ecuación que expresa la constante de la energía (1.84).

e.— Con los parámetros dados  $(r_x, r_y, s_x, s_y)$  se pueden plantear las ecuaciones fundamentales de la dinámica para cada masa y cada dirección:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{r}_x &= ks_x; \\ m_1 \ddot{r}_y &= -m_1 g + ks_y; \\ m_2 (\ddot{r}_x + \ddot{s}_x) &= -ks_x; \\ m_2 (\ddot{r}_y + \ddot{s}_y) &= -m_2 g - ks_y. \end{aligned} \quad (1.87)$$

Mediante las ecuaciones (1.87)<sub>1</sub> y (1.87)<sub>3</sub> se puede eliminar  $\ddot{r}_x$ . Análogamente, mediante (1.87)<sub>2</sub> y (1.87)<sub>4</sub> se elimina  $\ddot{r}_y$ . De esta manera se obtienen las dos ecuaciones reducidas siguientes:

$$\mu \ddot{s}_x + ks_x = 0; \quad \mu \ddot{s}_y + ks_y = 0. \quad (1.88)$$

Las soluciones generales de las ecuaciones anteriores son

$$s_x(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi_x); \quad s_y(t) = B \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi_y),$$

siendo  $\omega_0 = \sqrt{k/\mu}$  y  $A, B, \phi_x, \phi_y$  constantes que dependerán de las condiciones iniciales. Estas ecuaciones definen paramétricamente una elipse. Por tanto, las trayectorias relativas de cada masa respecto de la otra son *elipses*.  $\square$

### 1.4.5. Constantes del movimiento en sistemas aislados

En un sistema aislado, todas las fuerzas exteriores desaparecen. Resumiendo los diferentes resultados presentados en apartados anteriores (veáanse

las ecuaciones (1.38), (1.37), (1.48), (1.53), (1.51)), es posible establecer 10 integrales o constantes del movimiento:

$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_G = \text{cte.}$	Conserv. cantidad de movimiento
$\mathbf{r}_G(t) - \frac{\mathbf{P}}{M}t = \mathbf{r}_G(0)$	Th. movimiento del C.M.
$E = T + V^{int} = \frac{1}{2}Mv_G^2 + T^{SCM} + V^{int}$	Conserv. energía
$\mathbf{H}_O = \mathbf{H}_G + \mathbf{r}_G \wedge \mathbf{P}$	Conserv. momento cinético

(1.89)

Las magnitudes  $\{\mathbf{P}, \mathbf{r}_G(0), E, \mathbf{H}_O\}$  constituyen las diez constantes clásicas del movimiento del sistema de  $N$  partículas aislado.

Es posible demostrar<sup>16</sup> que estas diez constantes provienen de la invariancia de las leyes de la mecánica ante las transformaciones más generales que convierten un sistema inercial en otro inercial, es decir, que mantienen invariantes las leyes de la mecánica:

- *Rotación  $\mathbf{R}$* :  $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}' = \mathbf{R}\mathbf{r}$ , asociada a la conservación de  $\mathbf{H}_O$ . Al ser  $\mathbf{R}$  ortogonal<sup>17</sup> ( $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ ), este tensor de rotación depende sólo de tres parámetros.
- *Traslación  $\mathbf{a}$* :  $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$ , asociada a la conservación de  $\mathbf{P}$ .
- *Transformación de Galileo<sup>18</sup>  $\mathbf{w}$* :  $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{w}t$ , asociada al Th. del movimiento del centro de masa.
- *Traslación de tiempo  $s$* :  $t \mapsto t' = t + s$ , asociada a la conservación de la energía  $E$ .

Un planteamiento similar se puede realizar a partir de la función Lagrangiana en dinámica analítica (capítulo refcap:DA).

## 1.5. Principios basados en trabajos virtuales

Los principios y teoremas generales expuestos en los apartados 1.3 y 1.4 provienen directamente de las leyes de Newton, aunque deben reconocerse

<sup>16</sup>Ver p. ej. F. Scheck: *Mechanics—from Newton's Laws to Deterministic Chaos*, (2.<sup>a</sup> ed.), Springer-Verlag, Berlin (1990); apartados 1.12 y 1.13

<sup>17</sup>En el apartado 6.3.3 se discuten las rotaciones rígidas y se analiza la propiedad de ortogonalidad para las mismas.

<sup>18</sup>Una versión más simplificada de esta transformación se presentó en el apartado 0.3.

también algunas contribuciones clave debidas a Euler, como el principio del momento cinético. Por este motivo los métodos asociados se suelen denominar de «Newton-Euler».

En este apartado se presentan los principios y métodos basados en desplazamientos o trabajos virtuales. Sería posible postular estos principios básicos de manera independiente a los principios de Newton-Euler, pudiendo servir de base para construir sobre ellos toda la mecánica. A diferencia de las leyes de Newton, formulan directamente las ecuaciones para la estática o la dinámica de manera conjunta para todo un sistema, y no partícula a partícula, por lo que revisten un especial interés para el estudio de sistemas de varias partículas.

Comenzaremos por definir el concepto de *Desplazamientos virtuales*. En un sistema de  $N$  partículas, se denomina así a un conjunto de desplazamientos infinitesimales arbitrarios de cada partícula del sistema,  $\{\delta\mathbf{r}_i \ (i = 1, \dots, N)\}$ . En contraposición a los *desplazamientos infinitesimales reales*,  $\{d\mathbf{r}_i \ (i = 1, \dots, N)\}$ , los desplazamientos virtuales son una enteleguía, que nos servirá para formular el principio de los trabajos virtuales; se trata de desplazamientos ficticios, inventados, que tienen lugar en un instante dado («congelado») de tiempo. Por el contrario, los desplazamientos infinitesimales reales  $\{d\mathbf{r}_i\}$  se producen en el movimiento real, durante un intervalo  $dt$ , y se pueden expresar como diferencial de las funciones que definen el movimiento,  $\{\mathbf{r}_i\}$ .

Aunque en principio  $\{\delta\mathbf{r}_i\}$  son completamente arbitrarios (pudiendo violar incluso los enlaces del sistema), en la práctica emplearemos desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces en la mayoría de los casos.

Imaginemos en primer lugar un sistema en equilibrio, condición que queda expresada por  $\dot{\mathbf{r}}_i = \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{0}$ ,  $(i = 1, \dots, N)$ . Al ser la aceleración nula, la fuerza total sobre cada partícula debe ser nula; descomponiendo ésta como suma de las fuerzas activas ( $\mathbf{f}_i$ ) y reactivas ( $\mathbf{R}_i$ ),

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{f}_i + \mathbf{R}_i = \mathbf{0} \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (1.90)$$

El trabajo virtual realizado por las fuerzas  $\mathbf{F}_i$  para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales  $\{\delta\mathbf{r}_i\}$  es, por tanto, también nulo:

$$\delta W \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \quad \forall \{\delta\mathbf{r}_i\}. \quad (1.91)$$

La equivalencia entre estas dos expresiones funciona también en sentido inverso: si se verifica la igualdad (1.91), se ha de verificar a su vez (1.90). Para demostrar esto bastaría ir tomando sucesivos conjuntos de desplazamientos

virtuales, con una única componente no nula; la igualdad (1.91) obligaría a la nulidad de la componente de la fuerza correspondiente; al verificarse esta ecuación  $\forall\{\delta\mathbf{r}_i\}$ , se deduce que todas las componentes de las fuerzas han de ser nulas.

Por tanto, la ecuación (1.91), enunciada para  $\{\delta\mathbf{r}_i\}$  arbitrarios, es *condición necesaria y suficiente para el equilibrio*.

Aunque se podría tomar este enunciado, con  $\{\delta\mathbf{r}_i\}$  arbitrarios, como expresión del Principio de los Trabajos Virtuales, no se suele hacer así por la escasa utilidad que tiene un planteamiento tan general. Es preferible formularlo en función de desplazamientos virtuales compatibles, como se describe a continuación.

### 1.5.1. El principio de los trabajos virtuales

Sea un sistema con enlaces lisos (recordamos la definición realizada en el apartado 1.2 como aquellos en que las fuerzas de enlace no realizan trabajo para los desplazamientos permitidos por los enlaces), y un conjunto de desplazamientos virtuales  $\{\delta\mathbf{r}_i\}$ , *compatible* con los enlaces. Al expresar el trabajo virtual, el término de las fuerzas de enlace se anula:

$$\delta W = \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i + \underbrace{\sum_i \mathbf{R}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i}_{=0} = 0, \quad \forall\{\delta\mathbf{r}_i\} \text{ comp.}$$

Por tanto el trabajo virtual  $\delta W$  se puede calcular a partir únicamente de las fuerzas activas ( $\mathbf{f}_i$ ), eliminando las fuerzas reactivas del cómputo del mismo. El principio de los trabajos virtuales reza entonces:

*“En un sistema material sometido a enlaces lisos, es condición necesaria y suficiente para el equilibrio que el trabajo de las fuerzas aplicadas para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces sea nulo:*

$$\boxed{\delta W = \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0, \quad \forall\{\delta\mathbf{r}_i\} \text{ comp.}} \quad (1.92)$$

OBSERVACIONES:

- Es inmediato comprobar que (1.92) se cumple necesariamente si se verifica (1.90), es decir, se trata de una condición necesaria para el equilibrio en el sentido de Newton. Sin embargo, la suficiencia para garantizar el equilibrio no se puede deducir directamente, como ocurría en el caso de  $\{\delta\mathbf{r}_i\}$  arbitrarias (1.91).



- Para una fuerza total  $\mathbf{F}_i$  sobre un punto dado, se verifica que  $\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$ ,  $\forall i$  (no sumado); sin embargo, para la fuerza activa correspondiente  $\mathbf{f}_i$  en general es  $\mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \neq 0$ . Es decir, los términos individuales del trabajo virtual de las fuerzas activas no tienen por qué anularse, aunque la suma sí es siempre nula ( $\sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$ ).
- Las fuerzas activas  $\mathbf{f}_i$  deben incluir tanto las externas como las internas, que en un caso general sí realizan trabajo virtual. Por el contrario,  $\mathbf{f}_i$  excluyen a las fuerzas de reacción, que no desarrollan trabajo virtual.

Estas observaciones justifican la consideración del enunciado anterior (1.92) como «principio», que se postula sin necesidad de demostración. A pesar de esto conviene mencionar que es posible encontrar algunas demostraciones<sup>19</sup> que inciden en la equivalencia del principio de los trabajos virtuales con la estática.

Por último, conviene notar que la ventaja del principio de los trabajos virtuales es que plantea las condiciones para el equilibrio global del sistema, *sin emplear las reacciones de los enlaces lisos*, que no hace falta calcular en ningún momento.

También pueden tratarse problemas con enlaces no lisos, agregando a la expresión (1.92) el trabajo virtual correspondiente a las reacciones de los enlaces no lisos, como si se tratase de fuerzas activas. Dicho de otra forma, las únicas fuerzas de reacción que se eliminan de la expresión general del trabajo virtual son las de los enlaces lisos.

### 1.5.2. El principio de D'Alembert

Este principio extiende el de los trabajos virtuales a la dinámica. Partimos para ello de la segunda ley de Newton para una partícula cualquiera del sistema:

$$\mathbf{F}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Pasando las «fuerzas de inercia» ( $-m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$ ) al lado izquierdo del signo igual, resulta una expresión del «equilibrio dinámico», análoga a (1.90):

$$\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{0} \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (1.93)$$

Aplicamos ahora el principio de los trabajos virtuales al sistema de fuerzas nulo  $\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$ , anulándose, al igual que antes, el trabajo de las fuerzas de reacción, bajo la hipótesis de enlaces lisos. Resulta entonces el enunciado siguiente del Principio de D'Alembert:

<sup>19</sup>por ejemplo, Appell y Dautheville, en «*Précis de Mécanique Rationnelle*»

“En un sistema material sometido a enlaces lisos, la evolución dinámica del sistema está determinada, como condición necesaria y suficiente, por la anulación en todo instante del trabajo de las fuerzas aplicadas más el trabajo de las fuerzas de inercia para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces:

$$\boxed{\underbrace{\sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i}_{\delta W} - \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad \forall \{\delta \mathbf{r}_i\} \text{ comp.}} \quad (1.94)$$

OBSERVACIONES:

- Es inmediato comprobar que la condición enunciada (1.94) es necesaria, a partir de (1.93). Sin embargo, no es sencillo demostrar la suficiencia con carácter general.
- Para una partícula dada será en general  $(\mathbf{f}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i \neq 0$ , es decir que el sumando individual del trabajo virtual no se anula necesariamente, aunque la suma extendida a todo el sistema sí se anula siempre.
- Aplica la misma observación realizada arriba para el P.T.V. sobre la naturaleza de las fuerzas  $\mathbf{f}_i$ .

En consecuencia, el principio de D'Alembert (1.94) debe considerarse como un principio básico de la dinámica, alternativo a las leyes de Newton y a los principios de Newton-Euler para dinámica de sistemas. Como caso particular, el Principio de D'Alembert da lugar al Principio de los Trabajos Virtuales.

Al igual que en el principio de los trabajos virtuales, el principio de D'Alembert permite expresar la dinámica global del sistema en forma compacta, eliminando las fuerzas de reacción de los enlaces lisos.

Cuando lo que se busca es precisamente calcular el valor de alguna reacción, es posible realizarlo mediante trabajos virtuales empleando un truco. Para ello, se considera este vínculo «liberado» y la fuerza de reacción como una fuerza activa normal, que tendría el efecto precisamente del vínculo. Esto nos permite tomar  $\delta \mathbf{r}_i$  vulnerando el vínculo. De esta manera, la reacción correspondiente sí realiza trabajo virtual, y la expresión de los trabajos virtuales (1.92) ó (1.94) permite calcular al final dicha reacción.

La importancia de los métodos basados en los trabajos virtuales radica en que permiten obtener formulaciones prácticas muy generales para la

estática o la dinámica de sistemas con varias partículas (ecuaciones de Lagrange, apartado 2.2). Asimismo son la base de métodos numéricos, muy extendidos en la práctica, para la resolución de problemas con numerosos grados de libertad, como el *método de los elementos finitos*. Estos métodos son de una gran importancia en la mecánica computacional y en el cálculo de las estructuras.

EJEMPLO 1.8: El sistema de la figura consta de dos poleas, una  $A$  fija, de la que cuelga una masa  $m_3$  y por el otro lado otra polea  $B$ . A su vez de esta segunda polea cuelgan dos masas  $m_2$  y  $m_3$ . Los hilos son inextensibles y las poleas lisas y sin inercia. Obtener las ecuaciones de la dinámica aplicando el principio de D'Alembert y las aceleraciones de cada una de las masas. (Problema de Poggendorf.)

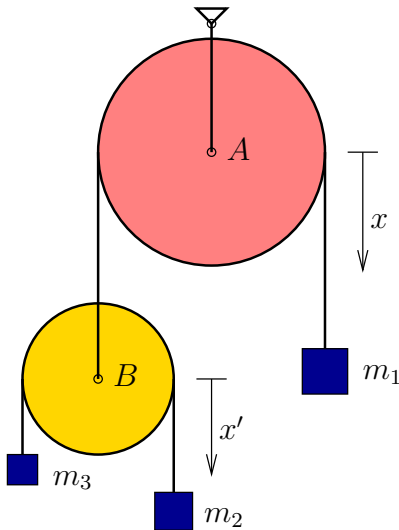


Figura 1.23: Ejemplo 1.8; Problema de Poggendorf.

*Solución.* Para definir el sistema se puede emplear la coordenada (absoluta)  $x$ , medida en sentido descendente y a partir de una posición dada de cada uno de los elementos:  $(x_1, x_2, x_3, x_B)$ . Así en principio el sistema tiene cuatro parámetros, aunque estos se encuentran ligados por dos ecuaciones de ligadura, por lo que el número de grados de libertad es de dos.

Empleando también la coordenada relativa  $x'$ , medida a partir de la posición del centro de la polea  $B$ , las ecuaciones de ligadura son:

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_B; \\ x'_2 &= -x'_3. \end{aligned} \tag{1.95}$$

Teniendo en cuenta la definición de las coordenadas relativas:

$$x'_2 = x_2 - x_B; \quad x'_3 = x_3 - x_B, \quad (1.96)$$

las ecuaciones (1.95) se convierten en la ecuación de ligadura siguiente en términos de  $(x_1, x_2, x_3)$ :

$$x_1 = -\frac{1}{2}(x_2 + x_3). \quad (1.97)$$

Esta ecuación de ligadura nos permitirá escribir las ecuaciones en función de las dos coordenadas libres  $(x_1, x_2)$ .

La expresión del principio de D'Alembert es:

$$\begin{aligned} \delta W &= m_1 g \delta x_1 + m_2 g \delta x_2 + m_3 g \delta x_3 \\ &= m_1 \ddot{x}_1 \delta x_1 + m_2 \ddot{x}_2 \delta x_2 + m_3 \ddot{x}_3 \delta x_3, \\ &\quad \forall (\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3) \text{ compatibles.} \end{aligned} \quad (1.98)$$

A partir de la ecuación de ligadura (1.97) se deducen las siguientes dos expresiones inmediatas:

$$\delta x_3 = -2\delta x_1 - \delta x_2; \quad \ddot{x}_3 = -2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2. \quad (1.99)$$

Empleando estas ecuaciones en (1.98) y agrupando términos, se obtiene:

$$\begin{aligned} &(m_1 g - 2m_3 g) \delta x_1 + (m_2 g - m_3 g) \delta x_2 \\ &= [m_1 \ddot{x}_1 - 2m_3 (-2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)] \delta x_1 + [m_2 \ddot{x}_2 - m_3 (-2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)] \delta x_2, \\ &\quad \forall (\delta x_1, \delta x_2). \end{aligned} \quad (1.100)$$

Nótese que, al ser libres, no hace falta exigir en la expresión anterior ninguna condición de «compatibilidad con los enlaces» a  $(\delta x_1, \delta x_2)$ . Particularizando para los valores  $(\delta x_1 = 1, \delta x_2 = 0)$  y  $(\delta x_1 = 0, \delta x_2 = 1)$  se obtienen las dos ecuaciones de la dinámica:

$$\begin{aligned} m_1 g - 2m_3 g &= m_1 \ddot{x}_1 - 2m_3 (-2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2); \\ m_2 g - m_3 g &= m_2 \ddot{x}_2 - m_3 (-2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) \end{aligned} \quad (1.101)$$

Despejando de estas ecuaciones el valor de las aceleraciones:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= g \frac{m_1 m_2 + m_1 m_3 - 4m_3 m_2}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_3 m_2} \\ \ddot{x}_2 &= g \frac{-3m_1 m_3 + m_1 m_2 + 4m_3 m_2}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_3 m_2} \end{aligned} \quad (1.102)$$

Por último, empleando la expresión (1.99)<sub>2</sub> se obtiene la aceleración de  $m_3$ :

$$\ddot{x}_3 = g \frac{-3m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_3 m_2}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_3 m_2}. \quad (1.103)$$

□

## 1.6. Dinámica en sistemas no inerciales.

Las leyes de Newton son válidas en los sistemas de referencia denominados *inerciales*. Se postula, al formularlas, la existencia al menos de un tal sistema inercial; por el principio de relatividad de Galileo (apartado 0.3), sabemos que cualquier otro sistema de referencia que tenga un movimiento uniforme y rectilíneo respecto del primero también será inercial. En ocasiones llamamos al sistema inercial «fijo», aunque este adjetivo no se emplea con su significado estricto, sino como contraposición al carácter general de un sistema «móvil», no inercial.

Los sistemas de referencia que posean, bien aceleración lineal de su origen ( $\mathbf{a}_O \neq \mathbf{0}$ ), bien rotación ( $\boldsymbol{\Omega} \neq \mathbf{0}$ ), no serán inerciales. En ellos no se cumplen las leyes de Newton, por lo que no será posible, por ejemplo, aplicar a cada partícula la ecuación  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , si la medición de la aceleración la realiza un observador ligado al sistema móvil. Sin embargo, es posible estudiar la dinámica de estos sistemas aplicando ciertos términos correctores, lo que puede tener interés práctico en algunos casos. De este tema tratamos a continuación.

### 1.6.1. Dinámica de la partícula

Sea una partícula observada desde dos sistemas de referencia distintos: ( $S$ )  $\equiv$  ( $Qxyz$ ), inercial, y ( $S'$ )  $\equiv$  ( $Ox'y'z'$ ), no inercial:

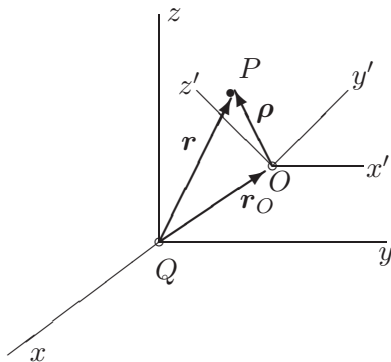


Figura 1.24: Coordenadas de la partícula en sistemas de referencia inercial ( $Qxyz$ ) y no inercial ( $Ox'y'z'$ ).

Recordemos las relaciones entre posición (1.24), velocidad (1.26) y ace-

lación (1.29) en ambos sistemas:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}, \\ \mathbf{v} &= \underbrace{\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}}_{\mathbf{v}_{\text{arr}}} + \mathbf{v}_{\text{rel}}, \\ \mathbf{a} &= \underbrace{\mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho})}_{\mathbf{a}_{\text{arr}}} + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{\text{rel}}}_{\mathbf{a}_{\text{cor}}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}, \end{aligned}$$

donde  $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{a})$  son medidas que denominaremos «absolutas» (más precisamente, relativas a  $(S)$ ), mientras que  $(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v}_{\text{rel}}, \mathbf{a}_{\text{rel}})$  son relativas a  $(S')$ .

El término de arrastre es el que corresponde al movimiento del sólido rígido, es decir, el que tendría la partícula sin movimiento relativo a  $(S')$ . En el campo de velocidades es el único término complementario que aparece. En cambio, para las aceleraciones aparece otro término adicional denominado aceleración de Coriolis. Expresando el principio de la cantidad de movimiento (con aceleraciones absolutas, por supuesto):

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m(\mathbf{a}_{\text{arr}} + \mathbf{a}_{\text{cor}} + \mathbf{a}_{\text{rel}});$$

para expresarlo en función de las observaciones relativas a  $(S')$  es necesario pasar los términos complementarios a la izquierda:

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a}_{\text{arr}} - m\mathbf{a}_{\text{cor}} = m\mathbf{a}_{\text{rel}}. \quad (1.104)$$

Por tanto, para aplicar la ecuación de balance del principio, es necesario añadir a las fuerzas realmente actuantes  $\mathbf{F}$  unas *fuerzas de inercia ficticias*  $(-m\mathbf{a}_{\text{arr}})$  y  $(-m\mathbf{a}_{\text{cor}})$ , denominadas fuerzas de arrastre y de Coriolis respectivamente.

Desarrollando su expresión, comprobamos que la fuerza de arrastre es una función de punto, es decir, depende de  $\boldsymbol{\rho}$  además de otros parámetros que puedan definir el movimiento del sistema móvil  $(\mathbf{a}_O, \boldsymbol{\Omega}, \dot{\boldsymbol{\Omega}})$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{arr}} &\stackrel{\text{def}}{=} -m[\mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho})] \\ &= -m\mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{a}_O, \boldsymbol{\Omega}, \dot{\boldsymbol{\Omega}}). \end{aligned}$$

Bajo ciertas condiciones, la fuerza de arrastre se puede expresar como el gradiente de un determinado campo escalar y, por tanto, resulta una fuerza conservativa. Por ejemplo, si se verifica que  $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$ ,

$$\mathbf{F}_{\text{arr}} = -m[\mathbf{a}_O - \Omega^2 \boldsymbol{\rho} + (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\Omega}];$$

multiplicando escalarmente por  $d\boldsymbol{\rho}$  obtenemos el trabajo elemental de esta fuerza; si suponemos además que  $\mathbf{a}_O$  es constante, comprobamos que es una diferencial exacta:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{arr}} \cdot d\boldsymbol{\rho} &= -m\mathbf{a}_O \cdot d\boldsymbol{\rho} + m\Omega^2 \boldsymbol{\rho} \cdot d\boldsymbol{\rho} - m(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\rho})(\boldsymbol{\Omega} \cdot d\boldsymbol{\rho}) \\ &= d[-m\mathbf{a}_O \cdot \boldsymbol{\rho} + \frac{m}{2}\Omega^2 \rho^2 - \frac{m}{2}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\rho})^2]; \end{aligned}$$

la función potencial de la que deriva es un campo escalar constante,  $-V(\boldsymbol{\rho})$ , por lo que la fuerza es conservativa:

$$\mathbf{F}_{\text{arr}} \cdot d\boldsymbol{\rho} = -dV,$$

siendo

$$V(\boldsymbol{\rho}) \stackrel{\text{def}}{=} m\mathbf{a}_O \cdot \boldsymbol{\rho} - \frac{m}{2}\Omega^2 \rho^2 + \frac{m}{2}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\rho})^2.$$

Por el contrario, la fuerza de Coriolis no tiene una interpretación clara, al depender, no sólo de la posición  $\boldsymbol{\rho}$ , sino también de la velocidad relativa  $\mathbf{v}_{\text{rel}}$ .

**EJEMPLO 1.9:** El sistema natural para la observación a escala humana es uno ligado a la superficie de la tierra. Sin embargo, debido tanto al movimiento orbital de la tierra como a su rotación este sistema no es inercial. Se desea obtener la desviación de la plomada en relación con la vertical geométrica dirigida hacia el centro de la esfera terrestre.

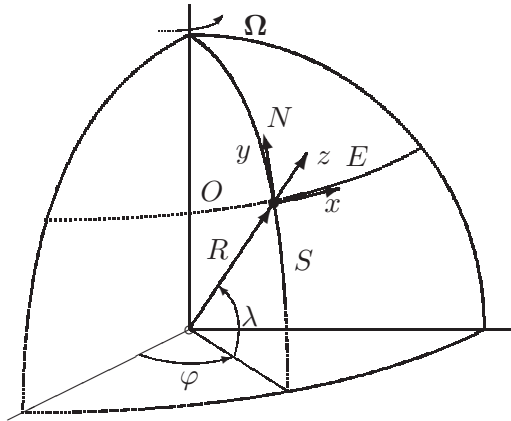


Figura 1.25: *Triedro ligado a la superficie de la tierra, en un punto O. La tierra se supone esférica, con la dirección x hacia el este, la y hacia el norte, y z según la vertical ascendente.*

*Solución.* Un sistema muy aproximadamente inercial sería uno con origen en el centro del Sol y direcciones de los ejes fijas según las galaxias más lejanas. Este sistema es adecuado para observaciones astronómicas. Es posible considerar también un sistema con origen en el centro de la Tierra y

orientación fija en relación con las galaxias lejanas. Cometeríamos, respecto al caso anterior, el error debido a la aceleración del centro de la Tierra en su movimiento casi circular alrededor del Sol, es decir, la aceleración centrípeta. El error cometido por este término se ve muy aproximadamente compensado por la atracción gravitatoria del Sol:

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{sol} = m\mathbf{a}_O + m\mathbf{a}_{rel},$$

donde  $\mathbf{a}_O$  es la aceleración del centro de la tierra.  $\mathbf{F}_{sol} \approx m\mathbf{a}_O$ , por lo que eliminando estos dos términos queda:

$$\mathbf{F} \approx m\mathbf{a}_{rel}.$$

Es decir, si prescindimos de considerar la atracción gravitatoria del sol, este sistema resulta muy aproximadamente inercial.

Sin embargo, para describir movimientos «normales» a escala humana y en la superficie terrestre, los sistemas anteriores poseen una complejidad a todas luces excesiva. Es conveniente a menudo considerar un sistema de ejes ligados a la superficie de la Tierra, que giran con la misma, además de acompañarla en su movimiento de traslación alrededor del Sol.

Sea una partícula estacionaria en relación con la superficie de la tierra,  $\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{0}$ . La única fuerza no inercial es la de arrastre, pues la fuerza de Coriolis se anula. El vector  $\boldsymbol{\Omega}$  de rotación de la Tierra, en función de los ejes que hemos definido es (figura 1.26):

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega(\cos \lambda \mathbf{j} + \sin \lambda \mathbf{k})$$

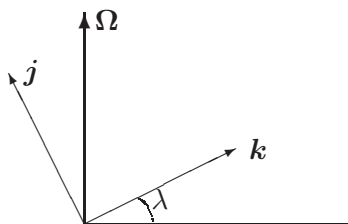


Figura 1.26: *Proyecciones de la velocidad de rotación  $\boldsymbol{\Omega}$  sobre las direcciones  $Oz$  y  $Oy$  situadas en el plano del meridiano.*

El vector posición (medido desde el centro de la Tierra) es

$$\mathbf{r} = R\mathbf{k} + \rho \approx R\mathbf{k},$$

restringiéndonos a puntos próximos a la superficie de la Tierra. Ésta tiene una velocidad de rotación constante en módulo y dirección (en una primera



aproximación), siendo  $\Omega = 2\pi/86\,164 \text{ rad/s}$ <sup>20</sup>. Teniendo en cuenta que la aceleración del origen del triedro móvil (punto situado en la superficie de la Tierra) es  $\mathbf{a}_O = \Omega \wedge (\Omega \wedge R\mathbf{k})$ :

$$\begin{aligned} -m\mathbf{a}_{arr} &= -m[\mathbf{a}_O + \Omega \wedge (\Omega \wedge \boldsymbol{\rho})] \\ &= -m[\Omega \wedge (\Omega \wedge (R\mathbf{k} + \boldsymbol{\rho}))] \approx -m[\Omega \wedge (\Omega \wedge R\mathbf{k})] \\ &= -m[(\Omega \cdot R\mathbf{k})\Omega - \Omega^2 R\mathbf{k}] \\ &= -m\Omega^2 \underbrace{R \cos \lambda}_{\text{dist. al eje}} \underbrace{(\text{sen } \lambda \mathbf{j} - \text{cos } \lambda \mathbf{k})}_{\text{versor perp. eje}} \end{aligned}$$

Por tanto la plomada seguirá la dirección de una gravedad aparente  $\mathbf{g}'$  (figura 1.27) definida como:

$$\mathbf{g}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g} - \Omega^2 R \cos \lambda (\text{sen } \lambda \mathbf{j} - \text{cos } \lambda \mathbf{k}).$$

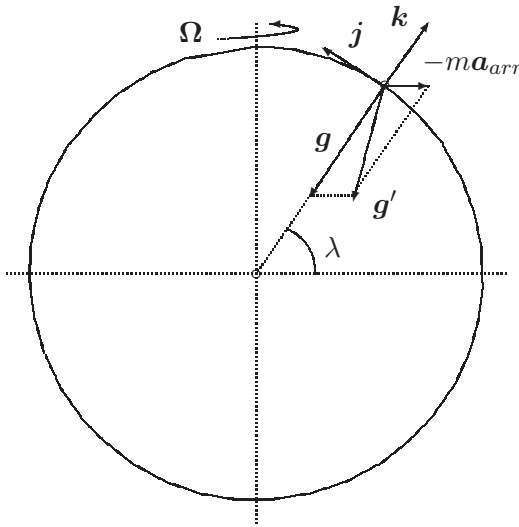


Figura 1.27: Desviación de la plomada por efecto de la fuerza de arrastre ( $-m\mathbf{a}_{arr}$ ), obteniéndose la «gravedad aparente»  $\mathbf{g}'$ .

El efecto de modificación aparente de  $\mathbf{g}$ , en módulo, es máximo en el Ecuador. Allí, la disminución de  $g$  vale:

$$\Omega^2 R = \left( \frac{2\pi}{86\,164} \right)^2 \left( \frac{4 \times 10^7}{2\pi} \right) = 0,03367 \text{ m/s}^2$$

<sup>20</sup>La tierra efectúa una vuelta completa ( $2\pi$ ) en un día sidéreo (86 164s). En un día solar (86 400s) la rotación efectuada es algo mayor que  $2\pi$ , siendo éste necesario para volver a enfrentarse al sol al desplazarse la tierra en su órbita.

Lo que representa alrededor de un 0,3% del valor medio de  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Fuera del Ecuador, se ve también alterada la dirección de  $\mathbf{g}$ , no estando dirigida exactamente hacia el centro de la Tierra, aunque la modificación en módulo es progresivamente menor.  $\square$

**EJEMPLO 1.10:** Se desea obtener las ecuaciones de la dinámica debido a los efectos no inerciales de un sistema de referencia ligado a la superficie de la tierra.

*Solución.* La desviación principal se produce por efecto de la aceleración de coriolis. Si el cuerpo está en movimiento respecto de la superficie terrestre ( $\mathbf{v}_{\text{rel}} \neq \mathbf{0}$ ) es necesario además considerar la fuerza de Coriolis. Hemos visto antes el efecto de modificación de la gravedad aparente ( $\mathbf{g}'$ ) por virtud de la fuerza de arrastre. La ecuación de la dinámica se puede expresar como:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{F}}{m} + \mathbf{g}' - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{\text{rel}}$$

En el desarrollo que se realiza a continuación, admitiremos que el desplazamiento sobre la tierra es pequeño, por lo que se mantiene aproximadamente constante la latitud ( $\lambda$ ) así como la dirección de  $\mathbf{g}'$ , que como hemos visto antes sufre una desviación muy pequeña respecto a  $\mathbf{g}$ , dependiendo de la latitud. Tomamos los ejes de forma que  $\mathbf{k}$  coincida con esta vertical aparente, definida por  $\mathbf{g}'$ :

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{\text{rel}} &= 2\Omega \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \cos \lambda & \sin \lambda \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \\ &= 2\Omega[(v_z \cos \lambda - v_y \sin \lambda)\mathbf{i} + v_x \sin \lambda \mathbf{j} - v_x \cos \lambda \mathbf{k}]; \end{aligned} \quad (1.105)$$

si llamamos a las fuerzas aplicadas por unidad de masa  $\mathbf{F}/m = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ , resultan tres ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= X - 2\Omega(\dot{z} \cos \lambda - \dot{y} \sin \lambda) \\ \ddot{y} &= Y - 2\Omega\dot{x} \sin \lambda \\ \ddot{z} &= Z - g + 2\Omega\dot{x} \cos \lambda \end{aligned} \quad (1.106)$$

Estas ecuaciones son de aplicación general para el caso de proyectiles o cuerpos móviles de corto alcance, en que son válidas las hipótesis realizadas arriba. En caso contrario sería necesario considerar la variación de  $\lambda$  en el movimiento.  $\square$

EJEMPLO 1.11: Deducir las fuerzas inerciales que se producen por el movimiento de masas de aire y la circulación atmosférica en zonas de bajas presiones.

*Solución.* En una zona de baja presión (lo que los meteorólogos llaman borrasca) las partículas de aire tienden a desplazarse hacia el punto de presión mínima, por efecto del gradiente de presión. La velocidad generada por este movimiento da lugar a una fuerza de inercia de Coriolis, según la ecuación (1.105):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{cor}} &= -2m\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{\text{rel}} \\ &= 2m\Omega v[\text{sen } \lambda \text{ sen } \alpha \mathbf{i} - \text{sen } \lambda \text{ cos } \alpha \mathbf{j} + \text{cos } \lambda \text{ cos } \alpha \mathbf{k}] \end{aligned} \tag{1.107}$$

Las componentes horizontales de esta fuerza originan una desviación consistente hacia la derecha en el sentido del movimiento, siempre que sea  $\text{sen } \lambda > 0$ , es decir, en el hemisferio Norte (figura 1.28). Eventualmente, se

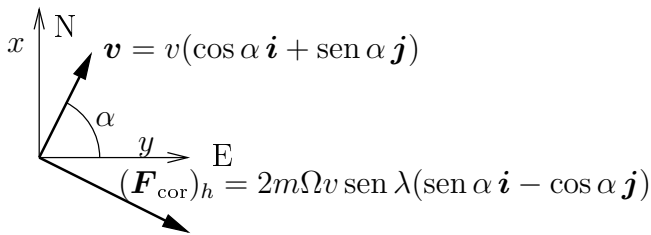


Figura 1.28: Fuerza de Coriolis horizontal debida a la velocidad en la superficie de la tierra (hemisferio Norte).

produce una circulación estacionaria alrededor del centro de bajas presiones, a modo de remolino, cuando el gradiente de presiones es contrarrestado por la fuerza de Coriolis y por la propia fuerza centrífuga del movimiento circular. Este efecto produce una circulación en sentido antihorario (figura 1.29) en el hemisferio Norte. En el Sur es  $\text{sen } \lambda < 0$ , por lo que la circulación de las borrascas será en sentido horario. □

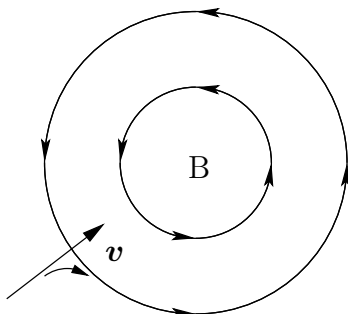


Figura 1.29: Líneas isobaras y circulación del aire en una borrasca por efecto de la aceleración de Coriolis (hemisferio Norte).

### 1.6.2. Dinámica de sistemas de varias partículas

Para un sistema formado por un conjunto de partículas, el estudio en una referencia no inercial deberá hacerse aplicando las fuerzas ficticias (1.104) descritas en el apartado anterior a cada una de sus partículas. Al ser las expresiones de estas fuerzas lineales en  $\boldsymbol{\rho}$  y  $\mathbf{v}_{\text{rel}}$ , parece lógico esperar que su resultante tenga también una expresión sencilla, en función del movimiento del centro de masas  $G$ .

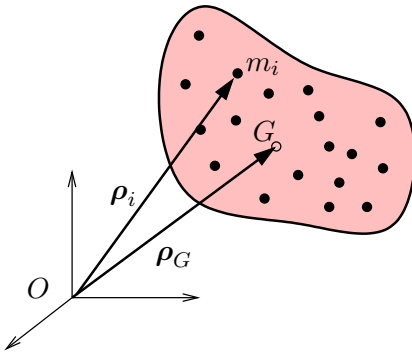


Figura 1.30: Sistema de varias partículas en una referencia no inercial; la posición de cada partícula es  $\boldsymbol{\rho}_i$ .

Supongamos un sistema de  $N$  partículas  $\{m_i\}$ , siendo:

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i$$

$$M \boldsymbol{\rho}_G \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i$$

La resultante de las fuerzas de arrastre es:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{arr}} &\stackrel{\text{def}}{=} - \sum_i m_i (\mathbf{a}_{\text{arr}})_i = - [M \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i)] \\ &= - [M \mathbf{a}_O + M \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho}_G + M \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}_G)], \end{aligned}$$

y la resultante de las fuerzas de Coriolis:

$$\mathbf{F}_{\text{cor}} \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_i m_i [2\boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{v}_{\text{rel}})_i] = - [M 2\boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{v}_G)_{\text{rel}}]$$

Expresiones que resultan de utilidad para aplicar la ecuación de la cantidad de movimiento y determinar la posición del centro de masa. Sin embargo, las expresiones de la ecuación del momento cinético no son lineales en  $\boldsymbol{\rho}$  y, por tanto, no resultan tan útiles. Volveremos esto más adelante para el caso del sólido rígido (capítulo 8).