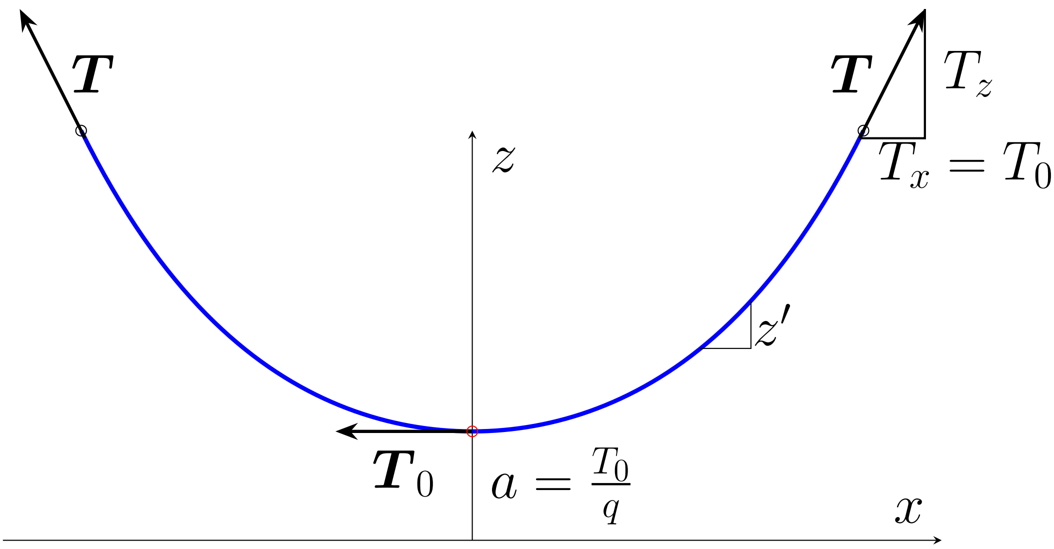
Cálculo de Cables



José M.ª Goicolea Ruigómez
<jose.goicolea@upm.es>

Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad Politécnica de Madrid

Archivo digital UPM, http://oa.upm.es/67125

21 mayo 2021

https://doi.org/10.20868/UPM.book.67125

Índice

1. Conceptos e hipótesis básicas

1.1. Los cables en la mecánica estructural

Los cables o hilos son elementos que sólo resisten tracción. A pesar de la simplicidad de su comportamiento mecánico tienen importantes aplicaciones en la tecnología, para sistemas de transporte por tracción y guiado, para máquinas, o en sistemas estructurales.

Ciñéndonos a los sistemas estructurales, en la antigüedad las soluciones eran de dos tipos. Por una parte las basadas en materiales de *sólo compresión* como la piedra o el barro cocido, que condujeron a los arcos, bóvedas o cúpulas, en los cuales aprovechando la geometría se consigue el funcionamiento adecuado del material. En estos la forma se debe imponer previamente mediante una cimbra. Por otra parte los materiales de *sólo tracción* como los cables o lonas, que adquieren la forma resistente de manera natural por su propio peso, aunque se encontraban más limitados en cuanto a la durabilidad debido a su naturaleza orgánica. Un interesante ejemplo son los puentes Incas fabricados con sogas de los cuales pervive en la actualidad algún ejemplo representativo (figura 1).

(a) Puente de Queshwa Chaca, Ecuador

(b) Puente sobre el río Apurimac, Perú (grabado s XIX)

Figura 1: Puentes Incas de América

La tecnología de los cables de acero de alta resistencia permite en la actualidad sistemas estructurales con gran durabilidad y de un tamaño mucho mayor. De hecho los *puentes colgantes* son la única tipología con la que se pueden alcanzar luces[1] mayores de 1000 m. Cabe destacar en esta categoría el puente Akashi-Kaikyo (figura 2a) que constituye el récord mundial en este momento con casi 2 km, o el Golden Gate (figura 2b) en la bahía de San Francisco que constituye un icono de la ciudad y fue asimismo récord mundial en su momento.

Una tipología muy interesante y que se ha desarrollado recientemente es la de los puentes atirantados, cuyo rango de luces abarca aproximadamente entre los 200 m y los 1000 m. En la península Ibérica existen dos interesantes

[1] *Luz*: distancia entre apoyos de un puente o sistema estructural

(a) Akashi-Kaikyo, Kobe, Japón (1991 m de luz, 1998)

(b) Golden Gate, San Francisco, USA (1280 m de luz, 1937)

Figura 2: Puentes colgantes

ejemplos, el de Barrios de Luna en León (figura 3a) obra del profesor Javier Manterola, y el de Vasco da Gama en el estuario de Tajo en Lisboa. Recientemente se han construido puentes atirantados que superan incluso los 1000 m de luz, un ejemplo es el puente de Sutong sobre el río Yangtze en China (figura 3b)

(a) Barrios de Luna, León, España (440 m de luz, 1983)

(b) Sutong, río Yangtze, China (1088 m de luz, 2008

Figura 3: Puentes atirantados

Es interesante también el uso de los cables como sistemas de lanzamiento o estabilización temporal para estructuras. Un ejemplo representativo lo constituye el viaducto sobre el barranco de Lanjarón, en el cual el sistema estructural de un arco atirantado (autoequilibrado) fue lanzado sobre un profundo barranco mediante unos cables y torres temporales como puede apreciarse en la figura 4a. Otro caso reseñable es la construcción de puentes mediante atirantamiento provisional con cables, como el puente de Contreras para el AVE (figura 4b).

(a) Viaducto de Lanjarón (cortesía de Torroja Ingeniería SL)

(b) Puente arco para el AVE sobre el embalse de Contreras (cortesía de CFC SL)

Figura 4: Uso de cables como mecanismos temporales para la construcción o el lanzamiento de puentes.

Por último quiero mencionar también el uso de cables combinados con membranas como sistemas de cubrimiento o techado en grandes superficies. En estas la geometría natural impuesta por la gravedad y la propia tensión contribuye a una expresividad formal intensa. Quizás el ejemplo más representativo sea el estadio de Munich para las olimpiadas de 1972, obra del arquitecto Frei Otto y el ingeniero Jörg Schlaich, figura 5.

Figura 5: Cubierta con membranas y cables, estadio olímpico de Munich, 1972

1.2. Hipótesis de los modelos de cables

El objeto de este documento es la aplicación de los métodos de la estática al cálculo de hilos o cables flexibles e inextensibles. La flexibilidad de los hilos hace que su estudio difiera en cierta medida de los sistemas discretos considerados en el resto de este curso. En efecto, uno de los objetivos principales de su estudio será determinar la configuración que adoptan, a priori desconocida. Sin embargo, resulta apropiado su estudio en el ámbito de la mecánica de sistemas rígidos ya que comparten una propiedad esencial: las fuerzas internas (las que no permiten la extensión del cable) no desarrollan ningún trabajo. En este aspecto crucial se diferencian de los sistemas estructurales deformables, en los que se produce una energía de deformación interna bajo carga (generalmente energía elástica).

Las características que definen los hilos flexibles e inextensibles y se admiten aquí como hipótesis de partida son las siguientes:

1. *Sección despreciable.* Se considera que el hilo posee una dimensión predominante, mucho mayor que los otros dos, por lo que puede ser idealizado según una línea, sin sección transversal. Tan sólo será necesario considerar esta sección a efecto de calcular su peso específico por unidad de longitud, en función de la sección transversal y su densidad.

2. *Flexibilidad perfecta.* El hilo no resiste esfuerzos de flexión, y por lo tanto tampoco de corte. Tan sólo resiste esfuerzos en dirección longitudinal, tangentes a la curva que forma el hilo.

3. *Inextensibilidad.* Cuando está sometido a tracción, el hilo es lo suficientemente rígido (en dirección longitudinal) como para que se pueda despreciar su extensibilidad. Por el contrario, sometido a compresión, el hilo no ofrece resistencia y se arruga.

Debe quedar claro que estas hipótesis son una idealización que conforma el modelo de *hilos flexibles inextensibles* al que se ciñe este capítulo. En circunstancias reales, los cables o cuerdas no cumplen exactamente ninguna de las hipótesis anteriores; sin embargo, en numerosos casos prácticos es suficientemente válida esta idealización.

2. Ecuaciones de equilibrio bajo cargas continuas

2.1. Ecuación vectorial del equilibrio

El cable o hilo queda definido por su curva directriz, $\boldsymbol{r}(s)$, que supondremos parametrizada en función de la longitud de arco s de la misma. En un punto dado del hilo definido por s podremos considerar una sección normal A, en la cual definimos como *cara frontal* A^+ la que está orientada en sentido de s creciente, y *cara dorsal* A^- la orientada en sentido de s decreciente (figura 6).

Si se considera el hilo cortado por esta sección, la parte que queda por detrás queda limitada por la sección frontal A^+, en la que el efecto del hilo por delante que se ha eliminado puede sustituirse por una fuerza T que se denomina *tensión.* Si por el contrario se considera la parte del hilo por delante, queda limitado por la sección dorsal A^-, sobre la que el resto del hilo

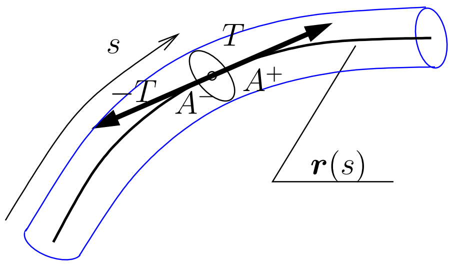


Figura 6: *Directriz del hilo ($\boldsymbol{r}(s)$), secciones frontal (A^+) y dorsal (A^-), y concepto de tensión (T)*

produce una fuerza $-T$, de forma que esté en equilibrio con T. En principio T podría llevar cualquier dirección, aunque como veremos más abajo su dirección será tangente al propio hilo. Por otra parte, debe ser siempre $T > 0$ de forma que corresponda a una tracción; $T < 0$ correspondería a un esfuerzo de compresión que no puede ser resistido.

Sea un elemento ds del hilo, entre s y $s + \mathrm{d}s$. La sección en s será dorsal y la sección en $s + \mathrm{d}s$ frontal (figura 7).

Sobre el hilo actúa una carga continua $\boldsymbol{q}$ por unidad de longitud. Al cortar el elemento de hilo entre s y $s+\mathrm{d}s$, el equilibrio del mismo queda garantizado por la tensión del hilo en cada extremo.

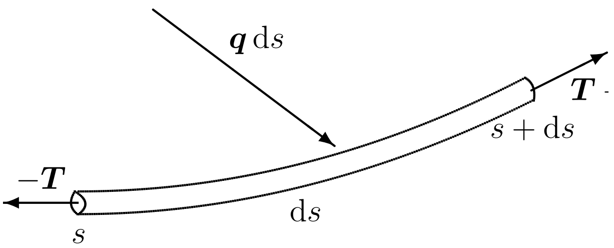


Figura 7: *Equilibrio de un elemento ds de hilo sometido a cargas continuas $\boldsymbol{q}$ por unidad de longitud*

En primer lugar, establecemos el equilibrio de fuerzas sobre este elemento de hilo. Las fuerzas que actúan sobre el mismo son:

- Tensión en s: $(-\boldsymbol{T})$
- Tensión en $s + \mathrm{d}s$: $(\boldsymbol{T} + \mathrm{d}\boldsymbol{T})$
- Cargas externas: $(\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}s)$

Expresando la anulación de la resultante,

$$-\boldsymbol{T} + (\boldsymbol{T} + \mathrm{d}\boldsymbol{T}) + \boldsymbol{q}\,\mathrm{d}s = \boldsymbol{0}$$

de donde resulta la *ecuación vectorial del equilibrio*:

$$\boxed{\mathrm{d}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{q}\,\mathrm{d}s = \boldsymbol{0}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s} + \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}} \tag{1}$$

Para completar las condiciones de equilibrio, expresamos la anulación de los momentos en s. Denominando $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{t}\,\mathrm{d}s$, siendo $\boldsymbol{t}$ la tangente al hilo:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} \wedge (\boldsymbol{T} + \mathrm{d}\boldsymbol{T}) + \xi\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{q}\,\mathrm{d}s = \boldsymbol{0}\,,$$

donde hemos supuesto que la resultante de cargas exteriores ($\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}s$) actúa en un punto intermedio del elemento, definido por ($\xi\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$) desde s, siendo $\xi \in (0,1)$. Prescindiendo de infinitésimos de 2.º orden, resulta

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{T} = \boldsymbol{0}\,.$$

De aquí se deduce que la tensión ha de ser *tangente al hilo*, en conformidad con la hipótesis 2. enunciada en el apartado 1.

2.2. Ecuaciones en coordenadas intrínsecas

Expresemos ahora la ecuación del equilibrio (1) en función de sus componentes en el triedro de Frenet[2]. Recordamos que la primera fórmula de Frenet permite expresar la derivada de la tangente como:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s} = \frac{\boldsymbol{n}}{R},$$

siendo $\boldsymbol{n}$ la normal principal y R el radio de curvatura.

La tensión lleva la dirección de la tangente, quedando definida por un escalar T de forma que $\boldsymbol{T} = T\boldsymbol{t}$. Sustituyendo en la ecuación del equilibrio (1):

$$\frac{\mathrm{d}(T\boldsymbol{t})}{\mathrm{d}s} + \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{t} + T\frac{\boldsymbol{n}}{R} + \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$$

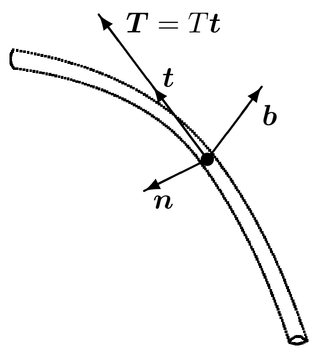


Figura 8: *Equilibrio en componentes intrínsecas*

Podemos extraer de esta última expresión las componentes según las direcciones del triedro. Denominando (q_t, q_n, q_b) las componentes de $\boldsymbol{q}$ según cada una de las direcciones,

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} + q_t = 0 & \text{(dirección tangente)} \\[2ex] \dfrac{T}{R} + q_n = 0 & \text{(dirección normal)} \\[2ex] q_b = 0 & \text{(dirección binormal)} \end{cases} \tag{2}$$

[2] *Curso de Mecánica*, J.M. Goicolea (2010), apartado 2.2.4

Observaciones:

- La componente q_b según la binormal es nula. Esto quiere decir que el hilo adopta una configuración que contiene a la fuerza $\boldsymbol{q}$ en su plano osculador, definido por los vectores $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n})$.

- Si no existe componente tangencial de la fuerza aplicada ($q_t = 0$), la tensión del hilo se mantiene constante. Si además la fuerza normal (q_n) es constante, el radio de curvatura adoptado será también constante, resultando una circunferencia como configuración de equilibrio del hilo.

Ejemplo 1: Membrana cilíndrica sometida a presión interna de valor p.

Consideramos una rebanada de la membrana normal a la directriz del cilindro (figura 9), por lo que podremos considerarla como un hilo. La presión

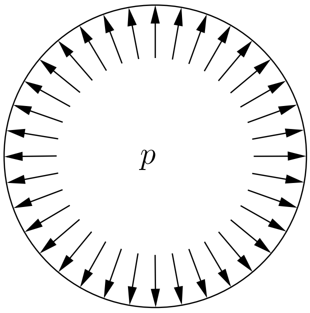


Figura 9: *Membrana cilíndrica sometida a presión interna p*

hidrostática de un fluido es normal a la superficie, por lo que la tensión es constante. Aplicando la expresión (2_2):

$$T = pR.$$

2.3. Ecuaciones en coordenadas cartesianas

Empleamos la siguiente nomenclatura para las componentes cartesianas de los vectores

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &\equiv (x, y, z) \\
\boldsymbol{q} &\equiv (q_x, q_y, q_z) \\
\boldsymbol{t} &\equiv \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right) .
\end{aligned}$$

Considerando que la tensión se puede expresar como $\boldsymbol{T} = T\boldsymbol{t}$, las ecuaciones de equilibrio (1_2) resultan en las tres ecuaciones escalares

$$\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right) + q_x &= 0 \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right) + q_y &= 0 \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right) + q_z &= 0 \,.
\end{cases} \tag{3}$$

2.4. Caso de fuerzas conservativas

Supongamos que $\boldsymbol{q}$, fuerza aplicada por unidad de longitud del hilo, se puede obtener de un potencial:

$$\boldsymbol{q} = -\,\mathbf{grad}(V) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}V = -\boldsymbol{q} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,. \tag{4}$$

Puesto que $\boldsymbol{q}$ es una fuerza por unidad de longitud, V tiene la dimensión de energía por unidad de longitud, es decir de fuerza.

Proyectemos la ecuación vectorial (1) sobre la tangente $\boldsymbol{t}$:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{t} + \boldsymbol{q}\,\mathrm{d}s \cdot \boldsymbol{t} = 0$$

es decir,

$$\mathrm{d}T + \boldsymbol{q} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0;$$

y empleando (4) se obtiene

$$\mathrm{d}T = \mathrm{d}V$$

e integrando

$$\boxed{T = V + h} \tag{5}$$

donde h es una constante de integración arbitraria.

Esta expresión es de gran utilidad práctica, puesto que permite de forma muy sencilla obtener la tensión en cada punto del hilo.

Ejemplo 2: Hilo homogéneo sometido a su propio peso en el campo gravitatorio simplificado

Sea el peso de valor q por unidad de longitud del hilo (figura 10). El potencial gravitatorio es $V = qz$, por lo que aplicando (5) obtenemos la

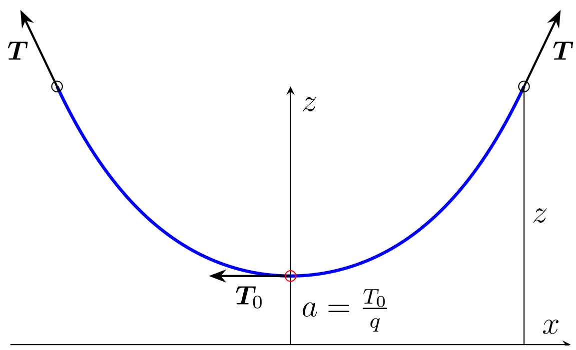


Figura 10: *Hilo sometido a su propio peso (campo conservativo)*

tensión en cada punto del hilo como

$$T = qz + h$$

En la práctica conviene elegir un origen de coordenadas de forma que se anule la constante arbitraria h. Esto se consigue situando el origen a una distancia $a = T_0/q$ por debajo del vértice o punto más bajo de la curva de equilibrio, siendo T_0 la tensión del hilo en dicho vértice. Así resulta

$$\boxed{T = qz.} \tag{6}$$

2.5. Caso de fuerzas centrales o paralelas

Si el campo de fuerzas aplicadas $\boldsymbol{q}$ pasa por un punto fijo, tomando el radio vector $\boldsymbol{r}$ desde dicho punto, se cumplirá

$$\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$$

Multiplicando vectorialmente la ecuación del equilibrio (1) por $\boldsymbol{r}$,

$$\boldsymbol{r} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{T} + \cancelto{\boldsymbol{0}}{\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{q}\, \mathrm{d}s} = \boldsymbol{0}$$

pero

$$\boldsymbol{r} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{T} = \mathrm{d}(\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{T}) - \cancelto{\boldsymbol{0}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{T}}$$

ya que $\boldsymbol{T}$ lleva la dirección de la tangente, $\boldsymbol{T} = T\ \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}s$. Se llega por tanto a

$$\boxed{\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{T} = \textbf{cte.}} \tag{7}$$

Esta expresión indica que la curva de equilibrio será plana, puesto que $\boldsymbol{r}$ es perpendicular a una dirección constante.

Supongamos ahora que el campo de fuerzas es paralelo a una dirección $\boldsymbol{u}$ dada ($\boldsymbol{q} = q\boldsymbol{u}$). Multiplicando vectorialmente la ecuación del equilibrio (1) por $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{u} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{T} + \cancelto{\boldsymbol{0}}{\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{q}\mathrm{d}s} = \boldsymbol{0}$$

pero

$$\boldsymbol{u} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{T} = \mathrm{d}(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{T}) - \cancelto{\boldsymbol{0}}{\mathrm{d}\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{T}}$$

ya que $\boldsymbol{u}$ es constante. Se obtiene por tanto

$$\boxed{\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{T} = \textbf{cte.}} \tag{8}$$

Vemos pues que en este caso también ha de ser plana la curva por un razonamiento similar al anterior. En realidad, podríamos haber considerado este como un caso particular de fuerzas centrales, dirigidas hacia un punto impropio.

La expresión (8) indica además que la componente de $\boldsymbol{T}$ normal a $\boldsymbol{u}$ es constante; llamando a esta componente T_n,

$$T_n = T_0 \quad \text{(cte.)} \tag{9}$$

Por otra parte, para evaluar la componente de $\boldsymbol{T}$ según $\boldsymbol{u}$, proyectamos la ecuación del equilibrio (1) sobre esta dirección

$$\mathrm{d}T_u + q\,\mathrm{d}s = 0$$

de donde

$$\boxed{T_u = -\int_0^s q\,\mathrm{d}s + C} \tag{10}$$

Siendo C una constante de integración.

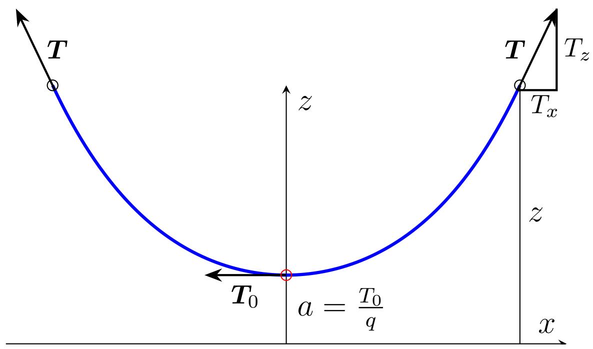
Si elegimos el origen de arcos ($s = 0$) en el punto del vértice de la curva, definido como aquél en el cual la tangente seá perpendicular a $\boldsymbol{u}$ y por tanto $T_u = 0$, se anula la constante de integración:

$$\boxed{T_u = -\int_0^s q\,\mathrm{d}s}$$

Ejemplo 3: Hilo homogéneo sometido a su propio peso, bajo la acción gravitatoria simplificada

Se trata de un campo de fuerzas conservativo y paralelo. Denominamos las componentes vertical y horizontal de la tensión T_z y T_x respectivamente (figura 11).

Figura 11: *Hilo sometido a su propio peso*



Si el peso del hilo por unidad de longitud es q, el campo de fuerzas será $\boldsymbol{q} = -q\boldsymbol{k}$, por lo que

$$\mathrm{d}T_z = q\mathrm{d}s \quad \Rightarrow \quad T_z = qs; \tag{11}$$

$$T_x = T_0 \quad \text{(cte)} \tag{12}$$

donde se ha elegido como origen de arcos ($s = 0$) el vértice o punto más bajo de la curva, con tangente horizontal ($T_z = 0$).

La tensión total es según (6)

$$T = qz = \sqrt{T_z^2 + T_x^2} \tag{13}$$

El origen de coordenadas se ha elegido a una distancia a por debajo del vértice de la curva, de forma que la tensión más baja, en el punto de tangente horizontal, vale

$$T_0 = qa \tag{14}$$

De las expresiones (11), (13) y (14) se deduce la relación

$$\boxed{z^2 = s^2 + a^2.} \tag{15}$$

Esta condición es una propiedad que cumple la curva de equilibrio del hilo, denominada *catenaria*. La determinación precisa de la ecuación de la catenaria se realiza más adelante (apartado 3.1).

3. Configuraciones de equilibrio de cables

3.1. Cable homogéneo sometido a peso propio (catenaria)

Se denomina *catenaria* la curva de equilibrio que adopta un hilo uniforme sometido a su propio peso. Supongamos que éste vale q por unidad de longitud, es decir $\boldsymbol{q} = -q\boldsymbol{k}$. Tomando el eje z como vertical y el eje x horizontal, las ecuaciones cartesianas del equilibrio (3) con $F_x = 0$ y $F_z = -q$ arrojan:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right) = 0; \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right) - q = 0. \end{cases}$$

De la primera ecuación,

$$\underbrace{T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}}_{T_x} = \mathrm{cte} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_x = T_0 = \mathrm{cte}}.$$

Aplicando la regla de la cadena a la segunda ecuación de equilibrio,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[T\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right] - q = 0,$$

y eliminando T en favor de T_0,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T_0\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) - q = 0.$$

Reorganizando términos y aplicando de nuevo la regla de la cadena,

$$\frac{T_0}{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = 1. \tag{16}$$

Llamando $a \stackrel{\mathrm{def}}{=} T_0/q$ *(parámetro de la catenaria)* y $z' \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{d}z/\mathrm{d}x$, y considerando

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (z')^2}},$$

la ecuación (16) se convierte en

$$a\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}z'}{\sqrt{1 + (z')^2}} = 1$$

La primitiva de esta expresión es: $a \operatorname{senh}^{-1}(z')$. Integrando con la condición inicial que corresponde a situar el origen de abscisas en el vértice o punto de tangente horizontal,

$$z'|_{x=0} = 0$$

se obtiene

$$x = a \operatorname{senh}^{-1} z'$$

o bien, invirtiendo la relación

$$z' = \operatorname{senh} \frac{x}{a}.$$

Integrando de nuevo con la condición inicial $z|_{x=0} = a$ resulta finalmente

$$\boxed{z = a \cosh \frac{x}{a}} \tag{17}$$

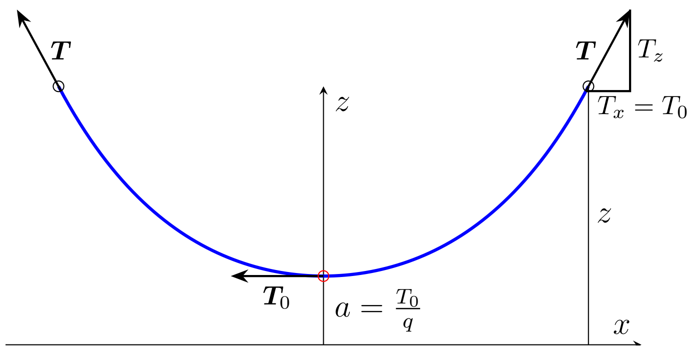


Figura 12: *Configuración de un hilo sometido a su propio peso (catenaria)*

La configuración de equilibrio puede verse en la figura 12. Debido a las constantes de integración tomadas, el vértice de la catenaria corresponde a las coordenadas $(x = 0,\ z = a)$.

La tensión en un punto cualquiera, según la fórmula general (6) para fuerzas conservativas y paralelas, es

$$\boxed{T = qa \cosh \frac{x}{a}} \tag{18}$$

3.1.1. Longitud del arco de catenaria

Obtengamos ahora la longitud del arco de la catenaria entre dos puntos dados. Para ello, integramos el elemento infinitesimal de arco $\mathrm{d}s$:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}z^2 = \mathrm{d}x^2 \left(1 + (z')^2\right) = \mathrm{d}x^2 \left(1 + \operatorname{senh}^2 \frac{x}{a}\right) = \mathrm{d}x^2 \cosh^2 \frac{x}{a}.$$

Por tanto, el arco s medido entre el vértice $(x = 0)$ y un punto cualquiera de abscisa x es

$$s = \int_0^x \mathrm{d}s = \int_0^x \cosh \frac{\xi}{a} \mathrm{d}\xi = a \operatorname{senh} \frac{x}{a}. \tag{19}$$

Observamos inmediatamente, aplicando la relación entre funciones hiperbólicas ($\operatorname{senh}^2 x + 1 = \cosh^2 x$), que

$$\boxed{s^2 = z^2 - a^2}$$

ecuación que coincide con la deducida antes (15).

Observemos también que, según se dedujo en (11) y (14), las componentes vertical y horizontal de la tensión son

$$\begin{aligned} T_z &= qs = qa \operatorname{senh}\frac{x}{a}, \\ T_x &= T_0 = qa. \end{aligned}$$

3.1.2. Segmento desde el pie de la ordenada a la tangente

Demostraremos a continuación una propiedad geométrica interesante de la catenaria que en ocasiones puede resultar útil. Sea P' el pie de la ordenada de un punto P de la catenaria (figura 13), es decir la proyección de P sobre el eje Ox.

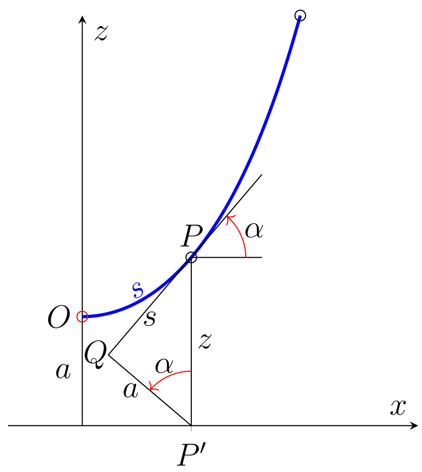


Figura 13: *La distancia $P'Q$ desde el pie de la ordenada a la tangente a la catenaria es constante e igual al parámetro "a" de la misma; la distancia PQ es igual al arco s entre P y O*

Llamando α al ángulo que forma la tangente a la catenaria con la horizontal,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \operatorname{senh}\frac{x}{a}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\cosh\frac{x}{a}} = \frac{a}{z}$$

considerando el triángulo rectángulo PQP' (figura 13), obtenemos la distancia $P'Q$ desde el pie de la ordenada a la tangente:

$$\boxed{P'Q = z\cos\alpha = a \quad (\text{cte})}$$

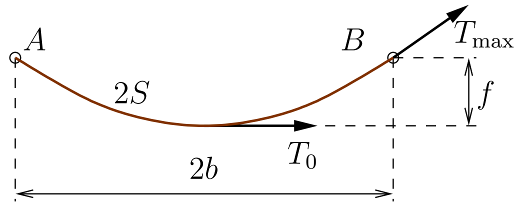
Por otra parte, la distancia desde el punto P de la curva al punto Q vale

$$\boxed{PQ = \sqrt{z^2 - (P'Q)^2} = \sqrt{z^2 - a^2} = s}$$

Es decir, es igual al arco de catenaria medido desde el vértice.

Ejemplo 4: Se considera un cable flexible e inextensible, de peso q uniforme por unidad de longitud, cuyos extremos A y B están situados a la misma altura (figura 14). Se denomina $2b$ la distancia horizontal entre A y B (luz),

Figura 14: *Ejemplo 4: Cable sometido a su propio peso, formando una catenaria*



$2S$ la longitud del cable, f la flecha, T_0 la tensión mínima (en el vértice de la catenaria) y $T_{\max}$ la tensión máxima (en los puntos A y B). Se pide resolver la configuración de equilibrio en los siguientes casos, calculando los parámetros que falten. Se tomará en todos los casos $q = 10$ N/m.

1. Conocidos $f = 20$ m y $T_{\max} = 2{,}7$ kN.
2. Conocidos $S = 102$ m y $T_{\max} = 2{,}7$ kN.
3. Conocidos $b = 100$ m y $T_0 = 2{,}5$ kN.
4. Conocidos $S = 100$ m y $f = 10$ m (problema de la cinta métrica).
5. Conocidos $b = 100$ m y $S = 105$ m.
6. Conocidos $b = 100$ m y $f = 20$ m.

1.— Solución directa:

$$a = \frac{T_{\max}}{q} - f = 250\,\text{m}$$

$$b = a\,\text{argcosh}\left(\frac{a+f}{a}\right) = 99{,}35\,\text{m}\,,\ \ S = 101{,}98\,\text{m}\,,$$

2.— Solución directa:

$$a^2 + S^2 = (T_{\max}/q)^2 \ \Rightarrow\ a = 249{,}99\,\text{m}$$

$$b = 99{,}36\,\text{m}\,,\ \ T_{zB} = 1{,}02\,\text{kN}\,,\ \ f = 20{,}01\,\text{m}\,.$$

3.— Solución directa:

$$a = \frac{T_0}{q} = 250\,\text{m}$$

$$S = 102{,}69\,\text{m}\,,\ \ T_{\max} = 2{,}703\,\text{kN}\,,\ \ T_{zB} = 1{,}027\,\text{kN}\,,\ \ f = 20{,}27\,\text{m}\,.$$

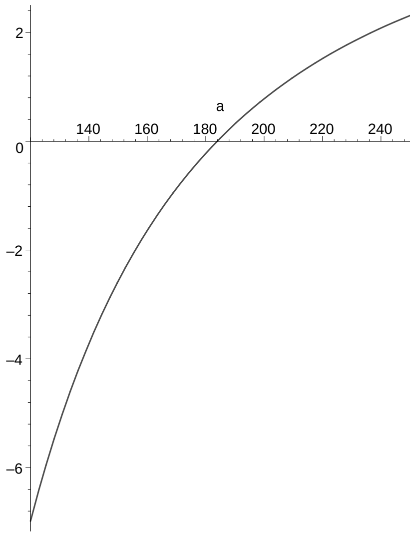
4.— Solución directa:

$$(a+f)^2 = a^2 + S^2 \;\Rightarrow\; a = 495\,\mathrm{m}$$

$$b = a\,\mathrm{argcosh}\left(\frac{a+f}{a}\right) = 99{,}33\,\mathrm{m}\,,\; T_{zB} = 1\,\mathrm{kN}\,,\; T_{\max} = 5{,}05\,\mathrm{kN}\,.$$

5.— Solución numérica de la ecuación no lineal:

$$g(a) = S - a\,\mathrm{senh}\,\frac{b}{a} = 0\,; \quad g'(a) = -\,\mathrm{senh}\,\frac{b}{a} + \frac{b}{a}\cosh\frac{b}{a}\,.$$



Suponiendo $a_0 = 2S = 210\,\mathrm{m}$,

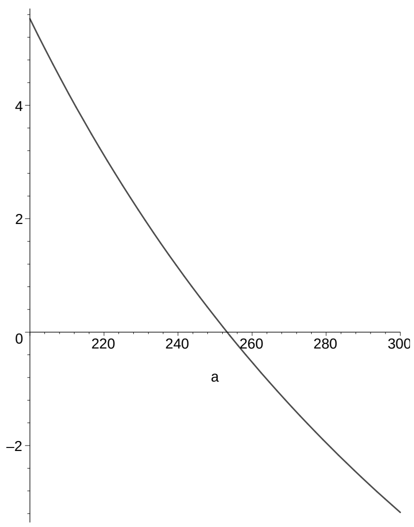
$$a_1 = a_0 - \frac{g(a_0)}{g'(a_0)} = 178{,}013\,;$$
$$a_2 = a_1 - \frac{g(a_1)}{g'(a_1)} = 183{,}640\,;$$
$$a_3 = a_1 - \frac{g(a_2)}{g'(a_2)} = 183{,}927\,;$$
$$a_4 = a_3 - \frac{g(a_3)}{g'(a_3)} = 183{,}928 = a\,.$$

Resultan

$T_{\max} = 2{,}118\,\mathrm{kN}\,,\; T_{zB} = 1{,}05\,\mathrm{kN}\,.\; f = 27{,}86\,\mathrm{m}\,,$

6.— Solución numérica de la ecuación no lineal:

$$g(a) = a\cosh\frac{b}{a} - (a+f) = 0\,; \quad g'(a) = \cosh\frac{b}{a} - 1 - \frac{b}{a}\,\mathrm{senh}\,\frac{b}{a}\,.$$



Suponiendo $S = 105\,\mathrm{m}$, $a_0 = \dfrac{S^2 - f^2}{2f} = 265{,}625\,\mathrm{m}$

$$a_1 = a_0 - \frac{g(a_0)}{g'(a_0)} = 252{,}639\,;$$
$$a_2 = a_1 - \frac{g(a_1)}{g'(a_1)} = 253{,}263\,;$$
$$a_3 = a_2 - \frac{g(a_2)}{g'(a_2)} = 253{,}265 = a\,.$$

Resultan

$T_{\max} = 2{,}733\,\mathrm{kN}\,,\; S = 102{,}619\,\mathrm{m}\,,\; T_{zB} = 1026{,}187\,\mathrm{kN}\,.$

3.2. Cable sometido a carga constante por unidad de abscisa (parábola)

Un hilo sometido a carga vertical uniforme por unidad de abscisa x (coordenada horizontal) adopta una parábola como configuración de equilibrio. Como ejemplo más característico puede citarse el de un puente colgante, en que el peso del tablero es soportado por los cables mediante péndolas (figura 15). Como se ha dicho, esta tipología es la empleada en los puentes más largos que existen en la actualidad (figura 2). El caso es distinto al del hilo

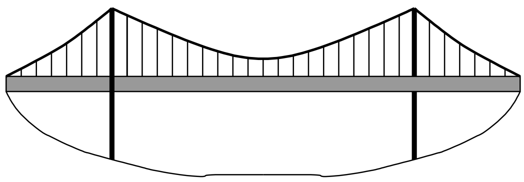


Figura 15: *Puente colgante: ejemplo de carga constante por unidad de abscisa.*

sometido a peso propio, que forma una catenaria, aunque si el cable está muy tenso ambas curvas se aproximan bastante. En este caso la parábola podría servir como una primera aproximación a la catenaria.

Si la carga por unidad de abscisa[3] es q_0, para un elemento de cable de longitud $\mathrm{d}s$ la carga será $q_0(\mathrm{d}x/\mathrm{d}s)$ (figura 16).

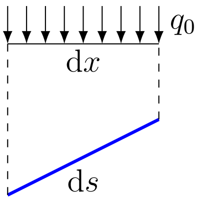


Figura 16: *Carga distribuida por unidad de abscisa. Para un elemento infinitesimal de cable la carga es $q_0\mathrm{d}x$. La equivalencia con el peso q del cable por unidad de longitud es $q_0\mathrm{d}x = q\mathrm{d}s \quad \Rightarrow \quad q = q_0\mathrm{d}x/\mathrm{d}s$.*

Expresando las ecuaciones cartesianas del equilibrio (3):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right) = 0;$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right) - q_0\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = 0.$$

De la primera ecuación se deduce que la tensión horizontal es constante:

$$T_x = T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = T_0 \text{ (cte.)}$$

Desarrollando la segunda ecuación y empleando este resultado,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T_0\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) = q_0\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}.$$

[3]Denominamos q_0 a la carga por unidad de abscisa para diferenciarlo del peso por unidad de longitud del cable q; para un cable tenso ambos valores serán muy cercanos.

Simplificando las derivadas, esta expresión equivale a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(T_0\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) = q_0 \quad \Rightarrow \quad T_0\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} = q_0.$$

Esta última es la ecuación diferencial del equilibrio, que resulta particularmente simple para integrar. Integrando dos veces obtenemos:

$$\boxed{z = \frac{1}{2}\frac{q_0}{T_0}x^2.} \tag{20}$$

Esta ecuación corresponde a una *parábola de eje vertical.* Al integrar se han escogido los ejes para anular las constantes de integración, imponiendo

$$z|_{x=0} = 0; \quad \left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = 0,$$

es decir, el origen de los ejes está situado en el vértice de la parábola (figura 17), a diferencia de la catenaria (figura 12).

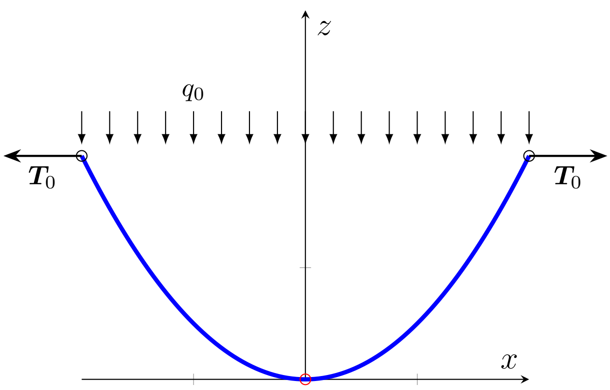


Figura 17: *Hilo sometido a carga uniforme por unidad de abscisa (parábola)*

Análogamente al caso de la catenaria, la tensión horizontal es constante para todo el cable, puesto que no hay fuerzas horizontales sobre él. La tensión mínima se produce en el vértice de la parábola, donde la única componente de la tensión es la horizontal, $T = T_x = T_0$.

La tensión vertical vale, proyectando la ecuación (1) sobre la vertical,

$$\mathrm{d}T_z + q\mathrm{d}s = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}T_z = q_0\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s$$

e integrando, considerando que para $x = 0$ es $T_z = 0$,

$$\boxed{T_z = q_0 x}$$

Esto equivale a decir que la tensión vertical es precisamente el peso del cable entre el vértice ($x = 0$) y un punto genérico de abscisa x.

La tensión total es

$$\boxed{T = \sqrt{T_0^2 + (q_0 x)^2}} \tag{21}$$

siendo su valor mayor cuanto más alejados estemos del vértice.

En este caso las fuerzas no provienen del potencial gravitatorio que se deduciría del peso uniforme del cable, por lo cual la tensión total no vale $T = qz$ como en el caso de la catenaria. Sin embargo, podemos comprobar que provienen de un potencial V' definido como

$$V' = \sqrt{T_0^2 + 2q_0 T_0 z}$$

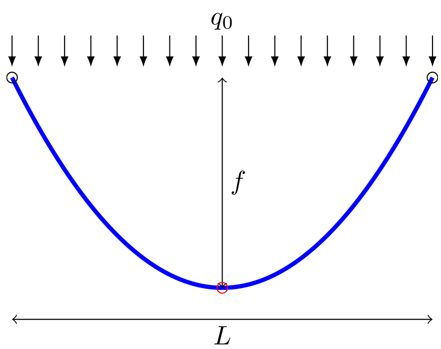
En efecto las fuerzas se obtienen derivando V':

$$q = -\frac{\partial V'}{\partial z} = \frac{-q_0}{\sqrt{1 + \frac{2q_0}{T_0} z}} = -q_0 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}; \quad F_x = -\frac{\partial V'}{\partial x} = 0$$

Por otra parte, empleando (21) y (20) se comprueba que resulta ser $T = V'$, de acuerdo con la expresión (5) deducida antes.

Ejemplo 5: Sea un cable sometido a una carga repartida por unidad de abscisa q_0, del cual conocemos su flecha f y la luz entre apoyos L a la misma altura (figura 18). Se desea calcular las tensiones mínimas y máximas en el cable. Solucionar de forma genérica y aplicar para los valores numéricos $q_0 = 1\,\mathrm{kg/m}$, $L = 200\,\mathrm{m}$, $f = 20\,\mathrm{m}$.

Figura 18: *Ejemplo: cable sometido a carga constante por unidad de abscisa*



La configuración de equilibrio es una parábola, por lo que su ecuación es la (20):

$$z = \frac{1}{2}\frac{q_0}{T_0} x^2.$$

Para $x = L/2$ es $z = f$, luego

$$T_0 = \frac{1}{2}\frac{q_0}{z}x^2 = \frac{1}{8}q_0\frac{L^2}{f}$$

La tensión mínima es por tanto

$$\boxed{T_0 = \frac{q_0 L^2}{8f},}$$

y la tensión máxima, aplicando (21) para $x = L/2$,

$$T_{\max} = \sqrt{T_0^2 + \left(q_0 \frac{L}{2}\right)^2}; \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_{\max} = q_0 \frac{L}{2} \sqrt{\frac{L^2}{16 f^2} + 1}}$$

Aplicando los datos numéricos del enunciado, resulta

$$T_0 = 250{,}0\,\text{kg}; \quad T_{\max} = 269{,}26\,\text{kg}; \quad S = 205{,}2121\,\text{m}.$$

Ejemplo 6: Supongamos ahora el mismo problema que en el ejemplo anterior 5 (cable de flecha f y luz L entre apoyos a la misma altura) pero con carga q constante por unidad de longitud del cable.

La curva de equilibrio es ahora una catenaria (17):

$$z = a \cosh \frac{x}{a}$$

Particularizando para la flecha f en $x = L/2$,

$$(a + f) = a \cosh \frac{L}{2a}. \tag{22}$$

Para resolver el problema es preciso solucionar la ecuación anterior en a. Se trata de una ecuación trascendente que carece de solución analítica, debiendo resolverse por métodos numéricos[4] para obtener el parámetro a de la catenaria. Esto se puede realizar por diversos procedimientos: dicotomía, método de Newton, etc. (este último es el más recomendado con carácter general). Otra alternativa es aproximar la solución considerando la catenaria como una parábola, tal y como se justifica más abajo. Una vez obtenido el valor de a, los valores de la tensión se obtienen como:

$$\begin{aligned} T_0 &= q_0 a & &\text{(Tensión mínima, en el vértice)} \\ T_{\max} &= q_0(f + a) & &\text{(Tensión máxima, en el apoyo)} \end{aligned}$$

En el caso que nos ocupa, resolviendo para los valores numéricos del enunciado (véase ejemplo 5 tomando $q = q_0$), resulta:

$$T_0 = 253{,}2649\,\text{kg}; \quad T_{\max} = 273{,}2649\,\text{kg}; \quad S = 205{,}2374\,\text{m}.$$

[4] No es objeto de este curso de mecánica el estudio de los métodos numéricos de resolución de ecuaciones; si se precisa, consultar algún texto de análisis numérico, como p.ej. J. Puy: *Algoritmos Numéricos en Pascal,* Servicio de Publicaciones de la E.T.S. de Ing. de Caminos de Madrid, o R.L. Burden y J.D. Faires: *Análisis Numérico,* Grupo Editorial Iberoamericana, 1985.

3.2.1. Aproximación de la catenaria por la parábola

Como se ha dicho antes, la parábola es una buena aproximación de la catenaria para hilos muy tendidos, es decir, en los que la pendiente máxima sea pequeña. Puede comprobarse esto desarrollando en serie la ecuación de la catenaria en función del argumento (x/a):

$$z_c = a\cosh\frac{x}{a} = a\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \frac{1}{720}\left(\frac{x}{a}\right)^6 + \mathcal{O}\left(\frac{x}{a}\right)^8\right].$$

El segundo término en el desarrollo anterior corresponde precisamente a la ecuación de la parábola (20), en la que se toma $T_0/q_0 \approx T_0/q = a$. El primer término corresponde a la traslación vertical de ejes, ya que los de la catenaria se toman una distancia a por debajo del vértice.

Esta propiedad permite, siempre que el parámetro (x/a) sea suficientemente pequeño, aproximar la catenaria por una parábola. Esta aproximación es tanto mejor cuanto más baja sea la pendiente, ya que para un hilo más tenso tiene un valor mayor del parámetro de la caenaria $a = T_0/q$. De esta forma, pueden resolverse de forma aproximada con operaciones más sencillas algunos problemas de catenarias. Asimismo, esta aproximación sirve como un primer valor para comenzar las iteraciones en una resolución numérica aproximada de la ecuación de la catenaria (22).

3.2.2. Longitud de la parábola

Desarrollamos a continuación el cálculo de la longitud del hilo en el caso de la parábola. Partimos de la ecuación de la misma (20), en la que para simplificar sustituimos $T_0 = qa$, es decir:

$$z = \frac{1}{2}\frac{x^2}{a}.$$

La longitud se obtiene integrando el elemento de arco:

$$s = \int_0^x \mathrm{d}s = \int_0^x \sqrt{1+(z')^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^x \sqrt{1+(x/a)^2}\,\mathrm{d}x$$

Resolviendo la integral[5], resulta:

$$s = \frac{1}{2}x\sqrt{1+(x/a)^2} + \frac{a}{2}\ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{1+(x/a)^2}\right). \tag{23}$$

Este resultado representa la longitud del hilo parabólico entre el vértice ($x = 0$) y un punto genérico de abscisa x. Como puede comprobarse, la expresión resulta más difícil de obtener y engorrosa de trabajar que la que correspondía a la catenaria (cf. ecuación (19)).

[5]Mediante el cambio $t = \operatorname{senh}(x/a)$ y haciendo la integral resultante por partes. La expresión final se obtiene teniendo en cuenta que $\operatorname{senh}^{-1} x/a = \ln(x/a + \sqrt{1+(x/a)^2})$.

Para trabajar en la práctica, a menudo conviene desarrollar en serie la longitud de la parábola (23), obteniéndose:

$$s = x\left[1 + \frac{1}{6}\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{1}{40}\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \frac{1}{112}\left(\frac{x}{a}\right)^6 + \mathcal{O}\left(\frac{x}{a}\right)^8\right]. \tag{24}$$

En los casos usuales basta con tomar los dos primeros términos del desarrollo en serie, es decir

$$s \approx x\left[1 + \frac{1}{6}\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]. \tag{25}$$

Ejemplo 7: Obtener la longitud del hilo en una parábola de luz L y flecha f (figura 18).

La ecuación de la parábola (20), particularizada para $x = L/2, z = f$ arroja:

$$f = \frac{1}{2}\frac{T_0}{q_0}(L/2)^2, \quad \Rightarrow \quad a = \frac{T_0}{q_0} = \frac{1}{8}\frac{L^2}{f}.$$

Sustituyendo en la ecuación (23), y teniendo en cuenta que la longitud del hilo es $S = 2s|_{x=L/2}$, resulta:

$$S = \frac{1}{2}L\sqrt{1+16(f/L)^2} + \frac{1}{8}\frac{L^2}{f}\ln\left(4\frac{f}{L} + \sqrt{1+16(f/L)^2}\right).$$

Empleando el desarrollo en serie (24), resulta:

$$\begin{aligned} S &= L\left[1 + \frac{8}{3}\left(\frac{f}{L}\right)^2 - \frac{32}{5}\left(\frac{f}{L}\right)^4 + \frac{256}{7}\left(\frac{f}{L}\right)^6 + \mathcal{O}\left(\frac{f}{L}\right)^8\right] \\ &\approx L\left[1 + \frac{8}{3}\left(\frac{f}{L}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Ejemplo 8: Un cable de peso Q está anclado entre dos puntos a igual altura, a una determinada distancia horizontal L, de forma que su tensión horizontal vale $H = 10Q$. Se desea saber la *rigidez geométrica* k_G del cable respecto al desplazamiento horizontal de un extremo, es decir, el aumento de la tensión horizontal H producida para un desplazamiento unidad, supuesto el cable inextensible[6]. Resolver el problema de dos formas distintas, como catenaria y empleando la aproximación de la parábola.

[6] Se denomina esta razón como *rigidez geométrica*, ya que la rigidez real tendrá además una contribución adicional *(rigidez elástica)* debido a la elongación del cable bajo carga, $k_E = EA/S$, siendo E el módulo elástico, A la sección del cable, y S su longitud total; la rigidez conjunta se calculará mediante $1/k = 1/k_G + 1/k_E$.

Resolución como catenaria.— En primer lugar, expresamos la ecuación del peso del cable, llamando $x = L/2$:

$$Q/2 = qa \operatorname{senh}\frac{x}{a} = 10Q \operatorname{senh}\frac{x}{a}.$$

Despejando en esta expresión se obtiene

$$\frac{a}{x} = \frac{1}{\operatorname{senh}^{-1}(1/20)} = 20{,}00832744. \tag{26}$$

A continuación, expresamos la ecuación de la longitud del cable y la diferenciamos:

$$S = 2a \operatorname{senh}\frac{x}{a};$$
$$0 = 2\mathrm{d}a \operatorname{senh}\frac{x}{a} + a\left(\frac{a\mathrm{d}x - x\mathrm{d}a}{a^2}\right)\cosh\frac{x}{a};$$

operando extraemos $\mathrm{d}a/\mathrm{d}x$:

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{(x/a) - \operatorname{tgh}(x/a)}$$

Teniendo en cuenta que $H = qa, x = L/2$, obtenemos la expresión de la rigidez:

$$k_G = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}L} = \frac{q}{2}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} = \frac{H/2a}{(x/a) - \operatorname{tgh}(x/a)}$$

Sustituyendo el valor de a calculado antes (26), resulta

$$k_G = 12021{,}99355\frac{Q}{L}$$

Resolución como parábola.— Tomando la aproximación de la longitud de la parábola (25), la expresión del peso del cable, siendo $x = L/2$, es

$$Q/2 = qS = \frac{10Q}{a}x\left[1 + \frac{1}{6}\left(\frac{x}{a}\right)^2\right].$$

Esta expresión resulta en una ecuación cúbica en a, de la cual despejando la única raíz real se obtiene

$$\frac{a}{x} = 20{,}00832640 \tag{27}$$

A continuación, expresamos la ecuación de la longitud del cable y la diferenciamos:

$$\frac{S}{2} = x\left[1 + \frac{1}{6}\left(\frac{x}{a}\right)^2\right];$$
$$0 = \mathrm{d}x\left[1 + \frac{1}{6}\left(\frac{x}{a}\right)^2\right] + x\frac{1}{3}\frac{x}{a}\frac{a\mathrm{d}x - x\mathrm{d}a}{a^2};$$

operando extraemos $\mathrm{d}a/\mathrm{d}x$:

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} = \frac{1 + (x/a)^2/2}{(x/a)^3/3}$$

Teniendo en cuenta que $H = qa, x = L/2$, obtenemos la expresión de la rigidez:

$$k_G = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}L} = \frac{q}{2}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} = \frac{H}{2a}\frac{1 + (x/a)^2/2}{(x/a)^3/3}$$

Sustituyendo el valor de a calculado antes (27), resulta

$$k_G = 12024{,}99376\frac{Q}{L}.$$

Como puede comprobarse, resulta un valor bastante aproximado al obtenido antes realizando el cálculo como catenaria.

3.3. Efecto de cargas puntuales

En lo anterior se ha considerado tan sólo el efecto de cargas continuas distribuidas sobre el hilo, que dan lugar a la ecuación de equilibrio (1). En un caso general pueden existir también sobre el hilo cargas puntuales o concentradas aisladas, que provengan de apoyos intermedios o de cargas suspendidas.

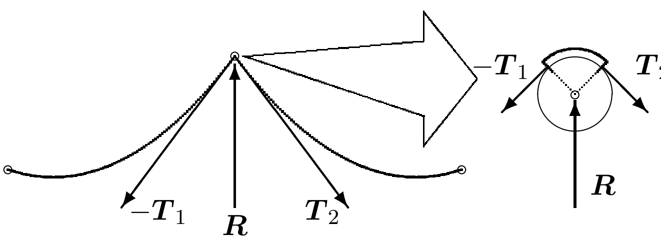


Figura 19: *Las cargas puntuales o concentradas en un hilo flexible producen una discontinuidad en la tangente; en este caso* $\boldsymbol{R}$ *se aplica mediante un apoyo deslizante o polea de radio muy pequeño, por lo cual se orienta como bisectriz de* $\boldsymbol{T}_1$ *y* $\boldsymbol{T}_2$*, siendo igual el módulo de estas dos tensiones.*

El efecto que tienen las cargas puntuales sobre la configuración del hilo es producir una discontinuidad en la tangente. En efecto, debido a una carga puntual $\boldsymbol{R}$, planteando el equilibrio en el nudo de aplicación de la carga (figura 19),

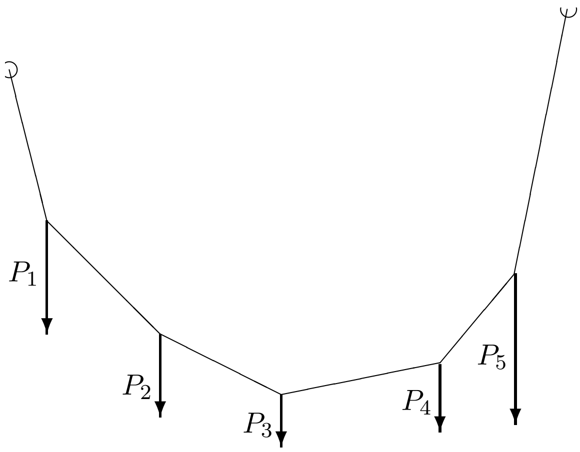
$$-\boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2 + \boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}$$

Si no hay rozamiento en el punto de aplicación de la carga, no se transmiten fuerzas al hilo en dirección tangencial. La carga puntual $\boldsymbol{R}$ estará en la bisectriz de las tangentes, al ser el módulo de la tensión igual a ambos lados, $T_1 = T_2$.

El procedimiento general de análisis para estos casos consiste en dividir el hilo en tramos entre cada dos apoyos o cargas puntuales, y solucionar cada tramo por separado, en función de las cargas distribuidas en él. Si estas cargas distribuidas son el propio peso del hilo, se formarán arcos de catenaria.

Si lo único que existen sobre el hilo son cargas puntuales y no hay cargas repartidas, el hilo se configura formando tramos rectos entre cada dos cargas. La configuración resultante se denomina *polígono funicular*.

Figura 20: *Polígono funicular debido a cargas concentradas sobre un hilo, sin cargas repartidas; las cargas P_i se aplican en puntos fijos del hilo (no deslizantes), por lo que su dirección no es bisectriz del hilo.*



3.4. Algunos tipos de condiciones de apoyo en los extremos

Discutimos a continuación, a título de ejemplos y sin ánimo de exhaustividad, algunas condiciones de extremo y su tratamiento estático en las ecuaciones de los hilos.

3.4.1. Extremo con tensión máxima dada

Para materializar esta condición basta colocar un contrapeso P en el extremo más alto (figura 21), cuyo valor equivaldrá a la tensión máxima en el cable. El contrapeso cuelga de una pequeña polea lisa, que transmite la carga P al cable, sin variar el módulo, hasta la dirección de la tangente al hilo en el apoyo. Como la tensión en un cable es máxima en el punto más alto, se obtiene un cable cuya tensión máxima es constante, independientemente de las cargas intermedias que luego vaya a soportar.

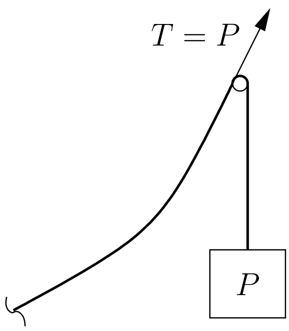


Figura 21: *Cable sometido a carga constante P en un extremo a través de un contrapeso.*

3.4.2. Extremo con tensión horizontal dada

Se materializa mediante el hilo anclado a un carrito, y otro hilo auxiliar (sin peso) unido a un contrapeso P a través de una polea lisa (figura 22). La polea de la derecha transmite la carga P fija como tensión horizontal al carrito. El apoyo del carrito proporciona la necesaria componente de tensión vertical en el extremo del hilo.

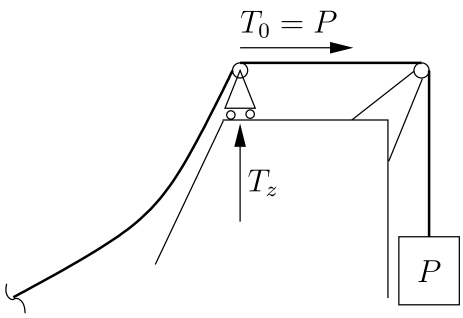


Figura 22: *Cable sometido a tensión horizontal dada.*

3.4.3. Punto de anclaje con rozamiento

En el extremo apoyado sobre la recta la reacción vertical es T_z y la horizontal T_0 (figura 23). La relación entre las componentes de la tensión es $\mu T_z \geq T_0 = T_z / \operatorname{tg} \alpha$, por lo cual para el equilibrio habrá de ser

$$1/\operatorname{tg} \alpha \leq \mu = \operatorname{tg} \varphi \;\Rightarrow\; \alpha \geq \pi/2 - \varphi.$$

En el límite estricto de equilibrio será $1/\operatorname{tg} \alpha = \mu$ ($\alpha = \pi/2 - \varphi$).

3.4.4. Anclaje en bloque pesado con rozamiento

Se considera aquí un extremo A anclado a un bloque pesado sobre un suelo rugoso, del cual tira hacia arriba el cable (figura 24). Para el equilibrio debe considerarse que la normal es $N = mg - T_{A,z}$, y de nuevo que el límite de la tensión horizontal es μN. En este caso se considera la masa del bloque como puntual y por lo tanto no se estudia el posible vuelco del mismo.

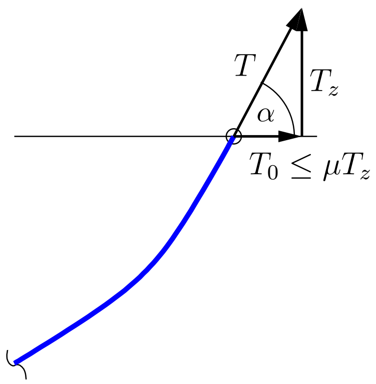


Figura 23: *Cable anclado en una anilla que desliza en una recta horizontal con rozamiento.*

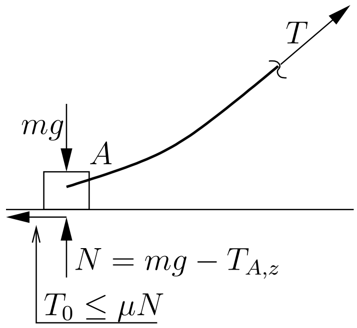


Figura 24: *Cable anclado en bloque pesado sobre suelo rugoso.*

3.4.5. Carga puntual deslizante

Suponemos en este caso un cable con extremos anclados a igual altura, y una carga puntual situada en el mismo de forma que pueda deslizar libremente. Obviamente se tenderá a situar en el punto medio, de forma que se forme un ángulo entre las dos ramas de catenaria simétricas que se forman a derecha e izquierda de la carga (figura 25). Debe tenerse en cuenta que el punto A donde se sitúa la carga no es el vértice de esta catenaria. Por el contrario, con la convención usual de considerar el origen de abscisas bajo el vértice de la catenaria, la abscisa de este punto es a priori una incógnita del problema (x_A). Para relacionar ésta con los datos del problema, expresamos en forma de ecuación que cada una de las catenarias simétricas debe equilibrar la mitad de la carga vertical:

$$T_{A,z} = \frac{P}{2} = qa \operatorname{senh} \frac{x_A}{a}.$$

3.4.6. Anclaje en puntos a distinta altura

Sea un cable homogéneo, de peso unitario q, con anclajes en los puntos A y B, situados a distinta altura (figura 26). Se conoce el valor de la reacción horizontal en uno de los anclajes H, la luz entre ambos L y el desnivel h.

La tensión horizontal en el hilo es constante, de valor $T_0 = H$, por lo que se conoce $a = H/q$. La incógnita es la abscisa x_A del apoyo A en relación

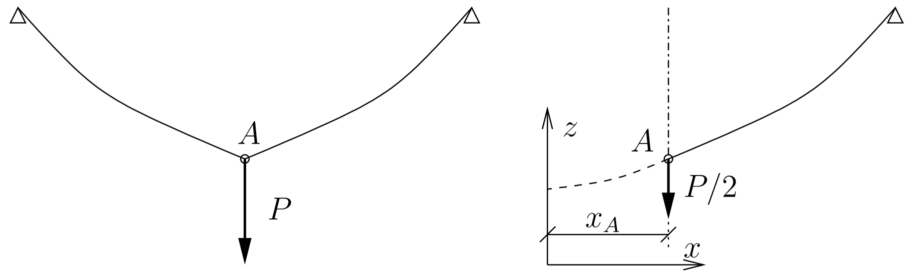


Figura 25: *Cable con extremos anclados a igual altura y sometido a una carga puntual deslizante, que se sitúa en el medio formando dos arcos simétricos de catenaria.*

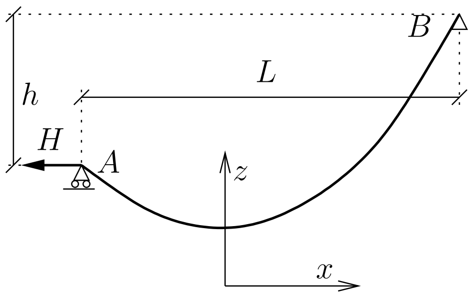


Figura 26: *Cable anclado en apoyos a distinta altura, sometido a carga horizontal constante H.*

con el vértice de la catenaria, ya que $x_B = x_A + L$. Se plantea por tanto la ecuación siguiente:

$$a \cosh \frac{x_A + L}{a} - a \cosh \frac{x_A}{a} = h.$$

Para resolver esta ecuación, desarrollamos el coseno hiperbólico de la suma. Denominando $u = \cosh(x_A/L)$ (incógnita) y $\beta = \cosh(L/a)$ (dato), resulta:

$$\beta u + \sqrt{\beta^2 - 1}\sqrt{u^2 - 1} - u = \frac{h}{a},$$

Expresión que equivale a una ecuación cuadrática de fácil resolución para u.

4. Cables apoyados sobre superficies

4.1. Superficie lisa sin cargas

Una superficie lisa sobre la que se apoya un hilo proporciona una reacción que es normal a la superficie y al propio hilo. Puesto que las fuerzas exteriores están siempre en el plano osculador (ecuación (2)$_3$), esta normal es precisamente la normal principal del hilo.

Las curvas trazadas sobre una superficie para las que la normal principal a la curva es en todo punto la normal a la superficie, son las denominadas *geodésicas*[7]. Por lo tanto la curva de equilibrio que adopta un hilo apoyado sobre una superficie lisa, sin otras cargas exteriores, es una geodésica de la superficie.

Por ejemplo, en una esfera las geodésicas son siempre círculos máximos. En un cilindro, las geodésicas son bien secciones rectas normales al eje, bien generatrices, o bien hélices.

OBSERVACIONES:

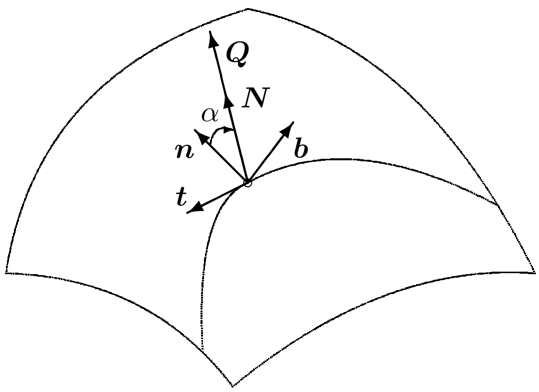
- Al no existir fuerza tangencial, de (2) se deduce que la tensión en el hilo es constante.
- También de (2) se deduce que la reacción normal sobre la superficie es $\frac{T}{R}$, siendo R el radio de curvatura del hilo. Nótese que ésta es la reacción por unidad de longitud del hilo.

4.2. Superficie lisa con cargas

Consideremos ahora, que además de la reacción normal a la superficie, actúan unas cargas exteriores de valor $\boldsymbol{q}$ por unidad de longitud del hilo.

Llamemos $\boldsymbol{Q}$ a la reacción normal de la superficie, que ahora no coincidirá necesariamente con la normal principal del hilo, aunque seguirá siendo normal a este (al ser normal a la superficie también es normal a cualquier curva sobre la misma).

Figura 27: *Hilo sobre superficie lisa con cargas exteriores* $\boldsymbol{F}$*: la reacción normal de la superficie* $\boldsymbol{N}$ *no es necesariamente la normal principal al hilo.*



Denominamos $\boldsymbol{n}$ a la normal principal al hilo, $\boldsymbol{b}$ a la binormal, y $\boldsymbol{N}$ a la normal a la superficie. Todos estos vectores son versores unitarios. Sea α el ángulo que forman $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{N}$:

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{N} = \cos\alpha$$

[7] *Curso de Mecánica*, J.M. Goicolea (2010) apartado 2.5, o D.J. Struik, *Geometría Diferencial Clásica*, ed. Aguilar, (apartado 2.5).

La reacción vale (figura 27)

$$\boldsymbol{Q} = Q\boldsymbol{N}$$

y en componentes

$$\begin{cases} Q\cos\alpha, & \text{componente según } \boldsymbol{n} \\ \\ Q\,\mathrm{sen}\,\alpha, & \text{componente según } \boldsymbol{b} \end{cases}$$

Escribimos las ecuaciones de equilibrio en las direcciones del triedro intrínseco (2)

$$\begin{aligned} 0 &= q_t + \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} \\ 0 &= q_n + Q\cos\alpha + \frac{T}{R} \\ 0 &= q_b + Q\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{aligned} \tag{28}$$

Proyectamos éstas sobre la normal a la superficie, $\boldsymbol{N}$, multiplicando la 2.ª ecuación por $\cos\alpha$ y la 3.ª por $\mathrm{sen}\,\alpha$:

$$\underbrace{q_n\cos\alpha + q_b\,\mathrm{sen}\,\alpha}_{=q_N} + Q + \frac{T}{R}\cos\alpha = 0$$

Apliquemos ahora el Teorema de Meusnier de geometría diferencial[8]. Este afirma que para una curva Γ sobre una superficie, con radio de curvatura R (de la curva), el radio de curvatura R_n de la sección normal a la superficie que es tangente a Γ en ese punto verifica

$$R_n\cos\alpha = R,$$

por lo que podemos escribir la ecuación anterior como

$$\boxed{q_N + Q + \frac{T}{R_n} = 0} \tag{29}$$

siendo R_n el radio de curvatura de la sección normal a la superficie tangente al hilo en cada punto.

EJEMPLO 9: Hilo homogéneo pesado, situado sobre un paralelo horizontal en una esfera lisa, en una latitud α (figura 28).

La normal principal del hilo $\boldsymbol{n}$ está dirigida hacia el centro del paralelo, la normal a la superficie $\boldsymbol{N}$ hacia el centro de la esfera, y la binormal $\boldsymbol{b}$ es perpendicular al plano del paralelo, es decir vertical. La carga del peso

[8] D.J. Struik, *Geometría Diferencial Clásica*, ed. Aguilar, (apartado 2.5).

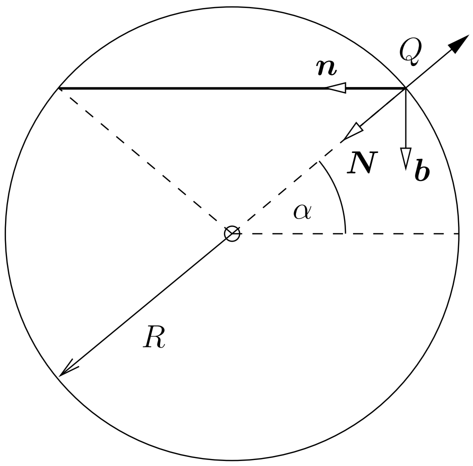


Figura 28: *Hilo pesado situado sobre una esfera lisa, en un paralelo de latitud α.*

distribuido es $\boldsymbol{q} = q\,\boldsymbol{b}$. Denominando $\boldsymbol{Q} = -Q\,\boldsymbol{N}$ a la reacción de la esfera sobre el hilo, la ecuación de equilibrio en la dirección de $\boldsymbol{b}$ (28_3) arroja:

$$-Q\operatorname{sen}\alpha + q = 0 \quad\Rightarrow\quad Q = \frac{q}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

Por otra parte, la ecuación de equilibrio en la dirección $\boldsymbol{N}$ (29) conduce a:

$$q\operatorname{sen}\alpha - Q + \frac{T}{R} = 0 \quad\Rightarrow\quad T = qR\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} - \operatorname{sen}\alpha\right) = qR\cos\alpha\operatorname{cotg}\alpha.$$

4.3. Enrollamiento sobre tambor rugoso

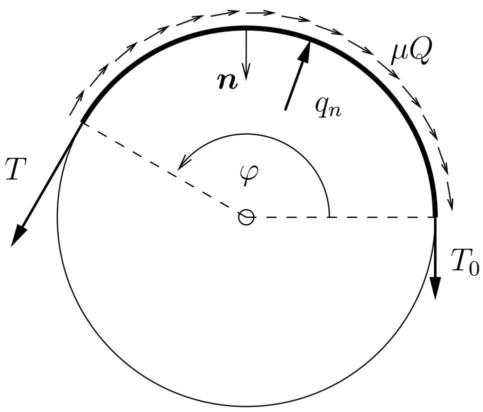
Si el hilo está apoyado sobre una superficie rugosa, se producen fuerzas tangenciales debido al rozamiento y el problema se complica considerablemente. En principio se podría tratar como el caso estudiado en el apartado anterior, considerando las fuerzas de rozamiento como cargas aplicadas $\boldsymbol{q}$. Sin embargo las fuerzas de rozamiento son por lo general desconocidas a priori, y definidas por desigualdades ($R \leq \mu N$), lo cual complica aún más su tratamiento.

Un caso particular importante y que tiene solución analítica es el del enrollamiento sobre un tambor rugoso. Haremos para ello las siguientes hipótesis:

1. No existen cargas exteriores aplicadas sobre el hilo;
2. El tambor tiene una sección recta convexa (no es necesario exigir que ésta sea circular);
3. El hilo se enrolla según una sección recta del tambor.

Se desea calcular la situación límite del equilibrio, cuando al tirar de un extremo más que del otro el hilo está a punto de deslizar sobre el tambor. En esta situación límite, por ser inextensible el hilo, el rozamiento se agota simultáneamente en toda la longitud del hilo apoyada sobre el tambor. Suponemos que se está tirando desde un extremo con una tensión T, mientras que en el origen existe una tensión T_0 fija. Por tanto el rozamiento se moviliza en sentido contrario a T (figura 29).

Figura 29: *Hilo enrollado sobre un tambor rugoso, en el cual se tira desde T, en situación de equilibrio estricto (a punto de deslizar)*



Planteamos las ecuaciones de equilibrio (2), denominando q_n la reacción normal del tambor (figura 29).

- Según la tangente:
$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} - \mu q_n = 0, \tag{30}$$
- Según la normal:
$$\frac{T}{R} - q_n = 0. \tag{31}$$

El signo negativo de q_n proviene de considerar sentido positivo el opuesto a la normal $\boldsymbol{n}$, es decir hacia el lado convexo del tambor.

De (31) obtenemos $q_n = T/R$, por lo que de (30)

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = \mu \frac{T}{R},$$

y separando variables

$$\frac{\mathrm{d}T}{T} = \mu \frac{\mathrm{d}s}{R} = \mu \, \mathrm{d}\varphi.$$

Integramos entre dos puntos, el origen $\varphi = 0$, donde suponemos que la tensión vale $T = T_0$, y un punto genérico φ donde la tensión vale T:

$$\boxed{T = T_0 \mathrm{e}^{\mu\varphi}.} \tag{32}$$

Esta fórmula indica el aumento de la tensión producido por el rozamiento, desde un punto en $\varphi = 0$ con tensión T_0, hasta un punto en que el hilo se ha enrollado un ángulo φ, desde el que se tira con tensión $T > T_0$.