ESTRUCTURAS SOMETIDAS A IMPACTO

José M. Goicolea

E.T.S. Ingenieros de Caminos, Universidad Politécnica Madrid,
Ciudad Universitaria, 28040 Madrid (Spain)
email: `goicolea@mecanica.upm.es`, `http://w3.mecanica.upm.es`

Palabras clave.– Dinámica, Impacto, Contacto, Elementos Finitos, Ondas de Tensión.

Resumen.– *Los fenómenos de impacto sobre las estructuras constituyen solicitaciones dinámicas de interés especial, ya que aunque por lo general su probabilidad es más baja que otros tipos de acciones, su efecto es potencialmente catastrófico.*

El análisis exige a menudo procedimientos de cálculo distintos a los de otras solicitaciones dinámicas más comunes en la dinámica estructural. Salvo para los impactos a muy baja velocidad, es frecuente un comportamiento no lineal acusado de la estructura, con grandes desplazamientos y deformaciones, respuesta no lineal del material con posible rotura local, y efectos de interacción complejos en los contactos. A medida que la velocidad del impacto es mayor, adquieren relevancia los fenómenos de transmisión de ondas de tensión o incluso de ondas de choque.

En este trabajo se discuten en primer lugar los fenómenos dinámicos impulsivos, analizando los distintos tipos de impacto. A continuación se describe de forma sucinta el comportamiento de los materiales, diferenciando los distintos tipos de fallo o rotura.

Salvo para los problemas más triviales, el cálculo no es posible mediante procedimientos analíticos y suele ser necesario emplear métodos numéricos basados en la discretización del espacio y del tiempo. La parte espacial se suele resolver mediante mallas de elementos finitos. Generalmente son preferibles las mallas Lagrangianas, ligadas al material, por su mejor capacidad para resolver los fenómenos de contorno como los contactos. La aplicación de la discretización espacial da lugar a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que debe resolverse numéricamente mediante integración directa en el tiempo, empleando procedimientos explícitos o implícitos. Se citan adicionalmente los nuevos procedimientos conservativos energía-momento que en ocasiones pueden aportar importantes ventajas.

Por último, se describen diversas aplicaciones que ilustran los fenómenos anteriormente descritos en diversas situaciones prácticas.

1. FENÓMENOS DE IMPACTO

1.1. Introducción

Los impactos sobre las estructuras son solicitaciones dinámicas de corta duración e intensidad elevada que, por su naturaleza, pueden producir daños importantes sobre las mismas, o alteraciones notables en su estabilidad o movimiento.

Dentro de los procedimientos clásicos de la mecánica de sistemas rígidos [14], el impacto se estudia mediante la *teoría de impulsiones*, por la que la duración de los impactos se considera instantánea. Las impulsiones teóricas están asociadas a fuerzas impulsivas de magnitud teóricamente infinita, mediante funciones Delta de Dirac $\delta(t-\tau)$, que cumplen $\delta(x) = 0 \ \forall x \neq 0$ y $\lim_{x\to 0} \delta(x) = \infty$. En esta teoría se aplica la conservación de cantidad de movimiento y momento cinético, mientras que el balance de energía se tiene en cuenta mediante el denominado «coeficiente de restitución». Otra simplificación generalmente empleada es la de la simultaneidad de las impulsiones, ya que generalmente una impulsión activa da lugar a otras impulsiones reactivas.

En definitiva, la teoría de impulsiones permite calcular un estado del movimiento después de la impulsión que deberá ser considerado como unas nuevas condiciones iniciales para la dinámica del sistema a partir de dicho instante. En ciertos casos, los fenómenos de impacto sobre las estructuras pueden estudiarse mediante este tipo de teorías. Esta sería la situación de un impacto de corta duración en el que la pérdida de energía fuese pequeña y pudiera considerarse elástico (coeficiente de restitución $e = 1$), o bien en un fenómeno en que, existiendo una cierta pérdida energética, se conozca de manera adecuada dicho coeficiente ($0 < e < 1$). En [5] puede encontrarse una descripción de estos procedimientos y su aplicación a diversas situaciones prácticas.

Sin embargo, en la mayoría de las situaciones reales es necesario un estudio más detallado, profundizando precisamente en aquello que la teoría de impulsiones no trata: cómo se produce la pérdida de energía, de qué manera se desarrolla la fuerza de impacto a través del contacto entre los cuerpos, así como la posible degradación y rotura de los mismos debido a las elevadas solicitaciones. Generalmente es necesario recurrir a métodos numéricos, mediante diferencias finitas o elementos finitos, que incluyan una resolución adecuada de las ecuaciones dinámicas en el tiempo.

No deben perderse de vista, sin embargo, los principios básicos de la dinámica que a menudo es necesario aplicar para deducir ciertas condiciones que no son inmediatas en el planteamiento del problema. Un ejemplo de esto es el cálculo de las fuerzas de impacto, a imponer en el modelo estructural, en situaciones en que no sea práctico realizar una modelización detallada del fenómeno local en la zona de impacto. Esta modelización local detallada necesitaría un modelo preciso de los contactos entre los cuerpos que impactan, la consideración de la propagación de ondas en la zona de impacto y de la rotura del material que conduzca a una penetración del proyectil en mayor o menor grado. Estos fenómenos son extraordinariamente complejos para representar, lo que obliga en ocasiones a realizar hipótesis simplificadoras sustentadas adecuadamente en los principios básicos de la mecánica.

1.2. Algunos escenarios frecuentes de impacto

Las situaciones en que se puede originar un impacto y en las cuales resulta necesario su estudio pueden ser muy diversas, lo que hace difícil abarcar en una lista todos estos escenarios. Sin embargo, y sin ánimo de exhaustividad, citaremos a continuación algunos ejemplos.

1.2.1. Impacto accidental de vehículos de transporte

El transporte en sus diversos modos involucra vehículos en movimiento, lo cual siempre entraña el riesgo de colisión. Cada vez se asigna más importancia en el diseño a la evaluación de la seguridad frente a impactos, habiéndose constituido este aspecto en una de las claves del éxito comercial de ciertos automóviles.

Empezando por las velocidades más bajas, pueden citarse los impactos de barcos, tanto sobre estructuras portuarias o pilas de puentes, como entre sí. Aunque la velocidad sea más baja que en otros supuestos, la enorme masa que puede verse involucrada hace que la energía a disipar para mitigar el impacto o protegerse del mismo sea de una magnitud difícil de alcanzar. Algunos ejemplos recientes son el colapso del puente de «As Pías» en Ferrol, o el hundimiento de un mercante en el sur de Italia con la muerte de su tripulación al ser embestido por otro barco. El diseño de protecciones de pilas en ocasiones tiene como finalidad el desviar el impulso del barco, más que su detención absoluta.

En cuanto a los automóviles, son conocidos los modelos y ensayos realizados por casi todos los fabricantes actuales para garantizar la seguridad de los ocupantes frente a impactos frontales o laterales. El diseño tiende a proveer una zona del propio vehículo que al colapsar produzca de forma controlada una disipación suficiente de energía, así como una celda de seguridad suficientemente rígida de forma que los ocupantes no sufran daño. En los vehículos de fórmula I las dimensiones y características de esta celda son parámetros esenciales para el diseño. Por otra parte, un aspecto de creciente importancia es el diseño de las protecciones en las carreteras, como las barreras flexibles, de forma que eviten la salida incontrolada del vehículo pero permitan una deformación suficiente para disipar o desviar la energía del impacto. Por último, un aspecto al cual se le presta una atención creciente es el efecto del impacto sobre conductores o sobre peatones arrollados, en donde se hacen necesarias consideraciones y estudios de biomecánica. De hecho, es en este ámbito multidisciplinar en donde se están dedicando últimamente una parte importante de los esfuerzos de investigación, tanto a nivel experimental (muñecos para simulación realista de accidentes y sus efectos) como de cálculo.

Los impactos de vehículos ferroviarios, aun siendo menos frecuentes, pueden tener efectos devastadores. Aquí es necesario considerar de manera especial, además del efecto sobre el propio vehículo, el impacto sobre las estructuras como por ejemplo las pilas de un puente que cruce sobre la vía, o sobre elementos del propio puente ferroviario sobre el que circule el convoy, como en un puente de tablero inferior. La alta velocidad ferroviaria hace aún más necesarias este tipo de consideraciones, que están previstas en la nueva norma de acciones sobre puentes de ferrocarril [6].

En el ámbito de la aeronáutica, debido por una parte a la gran velocidad alcanzada y a la imprescindible ligereza de los aparatos, parece difícilmente alcanzable un diseño a prueba de colisiones. Sin embargo, en combinación con otros dispositivos de seguridad un adecuado diseño frente a impacto resulta muy beneficioso. Uno de los casos típicos a considerar es el de impacto de pájaro, fenómeno más frecuente de lo que pueda parecer a primera vista, especialmente en los aledaños de los aeropuertos. Suele diseñarse para resistir adecuadamente la colisión de un ave tanto el borde de ataque de las alas como la cabina de los pilotos, mediante experimentos (cañones de pájaros) y cálculos. También la «ingestión» de ave es uno de los requisitos de obligada consideración para el diseño de motores.

Cabe citar adicionalmente en este apartado el requisito de cálculo de ciertas estructuras frente a la hipótesis de impacto de avión, presente en la normativa de diseño nuclear de ciertos países como Alemania, debido al enorme potencial de daño que conllevaría dicho accidente.

Por último, debe citarse el impacto de meteoritos o de pequeñas piezas de basura espacial sobre naves espaciales. Aunque pudiera parecer una casuística de menor importancia, debido a nuestra lejanía cotidiana del escenario, constituye sin embargo una de las principales fuentes de preocupación actual para los vehículos aeroespaciales. esto es debido por una parte a que las enormes velocidades involucradas (fácilmente se alcanzan los 10–20 km/s) ocasionarían efectos catastróficos, aún para proyectiles muy pequeños, y por otra a la proliferación de basura espacial en ciertas órbitas terrestres.

1.2.2. Impacto accidental sobre edificios e instalaciones

Las instalaciones que revisten una peligrosidad importante suelen exigir, para limitar los riesgos a la población, la consideración de las hipótesis de impacto. Entre éstas cabe citar los depósitos de gas natural licuado (GNL) o gases licuados del petróleo (GLP), y especialmente los reactores nucleares [31].

De origen externo, los impactos más comúnmente tenidos en cuenta en el diseño son:

- Misiles generados por el viento (postes de telégrafo, etc.)
- Misiles creados por fallo de otras instalaciones (turbinas, recipientes a presión, etc.)
- Aviones civiles y militares [18].
- Proyectiles impulsados por explosiones accidentales externas, especialmente si hay líneas cercanas de transporte de mercancías.

El edificio de contención nuclear es posiblemente una de las instalaciones que requiera un nivel de seguridad mayor frente a impacto. Las fuentes de impacto en su interior son principalmente:

- Impactos de tuberías, que resultan por efecto látigo asociadas a roturas postuladas; los posibles blancos se extienden en general a todos los elementos dentro de la contención, incluidas sus posibles defensas o barreras, así como a la misma estructura de contención [33].
- Impactos relacionados con la caída accidental de diversos elementos, tales como combustible, barras de control, bombas, intercambiadores de calor y cualquier equipo que deba izarse en un momento dado.
- Impactos asociados a movimientos sísmicos, ya que éstos pueden causar el contacto entre componentes adyacentes, fallo de anclajes, caídas de equipos, etc.
- Rotura de cualquier elemento que contenga fluido a presión, especialmente gas o vapor.
- Explosiones relacionadas con la problemática de los llamados «accidentes severos».

Además de los anteriores, hay muchos otros problemas que la actividad nuclear requiere estudiar. Entre estos puede mencionarse:

- Accidentes asociados al transporte de combustible irradiado y de residuos radiactivos, especialmente los de alta actividad [32, 30].
- Accidentes relacionados con las operaciones de almacenamiento y manejo de residuos radiactivos de todas las categorías.
- Fallos de grúas y otra maquinaria de izado, tanto aleatorios como de origen sísmico, en relación con piscinas de almacenamiento.

1.2.3. Balística y explosiones

A diferencia de los escenarios anteriores, en este caso no se trata de impactos accidentales sino por lo general deliberados. Su casuística es por otra parte similar a la de determinados impactos accidentales de proyectiles surgidos de explosiones muy energéticas. Los estudios pueden realizarse desde el punto de vista del ataque, en cuyo caso el objetivo sería conseguir la máxima penetración o daño, o de la defensa, en cuyo caso el objetivo sería conseguir una protección o blindaje adecuado.

En cuanto a los tipos de proyectiles pueden citarse:

— Balas u ogivas clásicas, con o sin punta y generalmente de materiales densos como el plomo o el wolframio, cuyas velocidades de impacto suelen estar entre 500–1500 m/s;

— Proyectiles de fragmentación, procedentes de una detonación, con formas arbitrarias y que pueden alcanzar velocidades entre 500–2000 m/s;

— Barras largas, o penetradores de energía cinética, provenientes de munición subcalibrada, puede alcanzar velocidades de 1000-3000 m/s [24];

— Proyectiles autoforjados, por la acción de explosivos, con velocidades de 1500–3000 m/s;

— Cargas huecas, que convierten los forros metálicos en chorros de metal a velocidades de 3000–10000m/s [38].

Los explosivos se emplean tanto para propulsar a los proyectiles citados como para crear cargas dinámicas cerca de los blancos. Estos son de dos clases [29]:

1. *Pólvoras*, que se «queman» al arder el carbón y el azufre con el oxígeno contenido en los nitratos;

2. *Detonantes*, como la dinamita o el TNT, que explosionan cuando el carbono e hidrógeno reaccionan con los radicales de nitrógeno y oxígeno de la misma molécula. Estos son mucho más efectivos que la pólvora ya que, al contrario que aquélla, no necesitan estar confinados para producir altas presiones.

1.3. Clasificación

La velocidad es quizás el parámetro más simple para clasificar los distintos tipos de impactos. Sin embargo, resulta difícil clasificar de forma absoluta los mismos por un sólo parámetro, ya que otras variables de tipo geométrico o relacionadas con las propiedades del proyectil o del blanco tienen una importancia decisiva. A pesar de todo, y con objeto de realizar una primera aproximación, se han propuesto diversas clasificaciones [26, 39, 44, 46]. Sintetizando éstas, y citando los efectos sobre el material, se puede proponer la siguiente ordenación:

— *Baja velocidad* ($v < 50$m/s). Efectos elásticos, o deformación plástica localizada.

— *Velocidad media* (50m/s $< v <$ 500m/s). Deformación plástica generalizada.

— *Velocidad alta* (500m/s $< v <$ 2000m/s). La resistencia viscosa del material aún tiene importancia.

— *Hipervelocidad* (2000m/s $< v$). El material puede considerarse como un fluido hidrodinámico.

1.4. Fenómenos a considerar

Atendiendo a los escenarios y clasificación anteriores, pueden distinguirse según cada caso distintos fenómenos producidos por el impacto.

— *Dinámica y vibraciones estructurales* [3, 8]. En ellos la geometría estructural es predominante, siendo relevantes en los impactos a baja velocidad, y puede estudiarse mediante métodos de integración implícita o explícita en el tiempo.

— *Propagación de ondas de tensión y de choque* [42, 26, 28, 37]. En los impactos a velocidades medias y bajas es importante analizar con detalle el efecto de las ondas de tensión, que se convierten en ondas de choque para impactos a hipervelocidad, por encima de los 2000 m/s generalmente.

— *Comportamiento no lineal del material*: plasticidad, rotura, dependencia de la velocidad de deformación, dependencia de la energía interna o temperatura, ... Se produce en mayor medida al aumentar la velocidad de impacto, aunque para velocidades muy elevadas el material pasa a comportarse prácticamente como un fluido, su resistencia puede despreciarse.

— *Grandes desplazamientos*, es decir cambios de geometría y rotaciones finitas que a su vez influyen en las cargas y su efecto.

— *Grandes deformaciones*. Los alargamientos unitarios de los materiales en fases sólidas pueden superar el 100 %. Bajo presiones muy elevadas el material se comporta como un fluido, con deformaciones muy grandes.

— *Contactos* y fenómenos de interfaz en los contornos. El contacto es clave en cualquier modelo de impacto, ya que a través de él se transmiten las cargas.

— *Penetración y perforación*, por la rotura del material del blanco. (Se denomina penetración cuando el proyectil no traspasa, y perforación cuando el proyectil se produce penetración total y el proyectil pasa al otro lado del blanco.) [46].

— *Fenómenos locales de rotura*, como «Spalling», «Scabbing», «Petalling», «Plugging» ... [46]. Se trata de los mecanismos de rotura del blanco que producen la penetración parcial o total [43].

2. COMPORTAMIENTO DE MATERIALES SOMETIDOS A IMPACTO

2.1. Ecuaciones de la dinámica de sólidos

El comportamiento dinámico de materiales sólidos se rige por una serie de ecuaciones diferenciales básicas que expresan el balance de diversas magnitudes. El balance de cantidad de movimiento, o ecuación de Cauchy, se expresa en la configuración deformada como

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{b} = \rho \dot{\boldsymbol{v}}, \tag{1}$$

donde $\nabla \cdot (\cdot)$ es el operador divergencia, $\boldsymbol{\sigma}$ el tensor de tensiones de Cauchy, $\boldsymbol{b}$ las fuerzas volumétricas, ρ la densidad volumétrica y $\boldsymbol{v}$ la velocidad. Por su parte, el balance de momento cinético obliga a la simetría del tensor de tensiones, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}$. La conservación de la masa o ecuación de continuidad establece

$$\frac{1}{\rho}\dot{\rho} + \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0. \tag{2}$$

Por último, la ecuación de balance de energía (primer principio de termodinámica) se escribe

$$\rho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{:} \boldsymbol{d} + \nabla \cdot \boldsymbol{h} + r, \tag{3}$$

donde u es la energía interna por unidad de masa, $\boldsymbol{d} = \frac{1}{2}[\nabla \cdot \boldsymbol{v} + (\nabla \cdot \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}]$ el tensor velocidad de deformación, r la densidad de fuentes de calor, y $\boldsymbol{h}$ el vector de flujo calorífico.

Las ecuaciones anteriores son válidas para cualquier material. A ellas hay que agregar leyes adicionales, denominadas *ecuaciones constitutivas*, que expresan el comportamiento del material y varían dependiendo del mismo y del régimen a que esté sometido. Principalmente se trata de las ecuaciones constitutivas mecánicas, que expresan la tensión como función de la deformación y posiblemente otros parámetros, y las térmicas que establecen el flujo de calor.

Bajo solicitaciones pequeñas, como puede corresponder a impactos a baja velocidad, la respuesta del material será elástica y lineal. Admitiendo la hipótesis de pequeñas deformaciones en un material isótropo, esto se expresa mediante la ley de Hooke generalizada,

$$\boldsymbol{\sigma} = (K - 2G/3)\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} + 2G\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{4}$$

donde (K, G) son los módulos elásticos de compresibilidad y corte respectivamente, $\mathbf{1}$ es el tensor identidad de 2.º orden y $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el tensor de deformaciones lineal.

En impactos a velocidades medias, o incluso en ciertas configuraciones geométricas y velocidades bajas, se producen deformaciones plásticas en el material, así como grandes desplazamientos, rotaciones y deformaciones. Estos fenómenos originan un marcado carácter no lineal, faceta trascendental en la mayoría de los cálculos de impacto. La falta de espacio impide desarrollarlos adecuadamente aquí, por lo que se refiere al lector a otras publicaciones [35, 3, 12, 4].

2.2. Ondas de tensión

Los estudios locales detallados de dinámica de impacto exigen el análisis de propagación de las ondas de tensión, asociadas a frecuencias propias mucho más elevadas que las de las vibraciones estructurales. Se describen a continuación las ondas elásticas para dos casos básicos unidimensionales representativos.

Tensión uniaxial.— Se trata de una barra recta sin restricción lateral, medida por la coordenada x, de módulo elástico E y densidad ρ (figura 1.a). La ecuación dinámica, a partir de (1) y (4), teniendo en cuenta que la única componente no nula de la tensión es $\sigma_x = Eu_{,x}$, resulta

$$\ddot{u} = c_0^2 u_{,xx}, \tag{5}$$

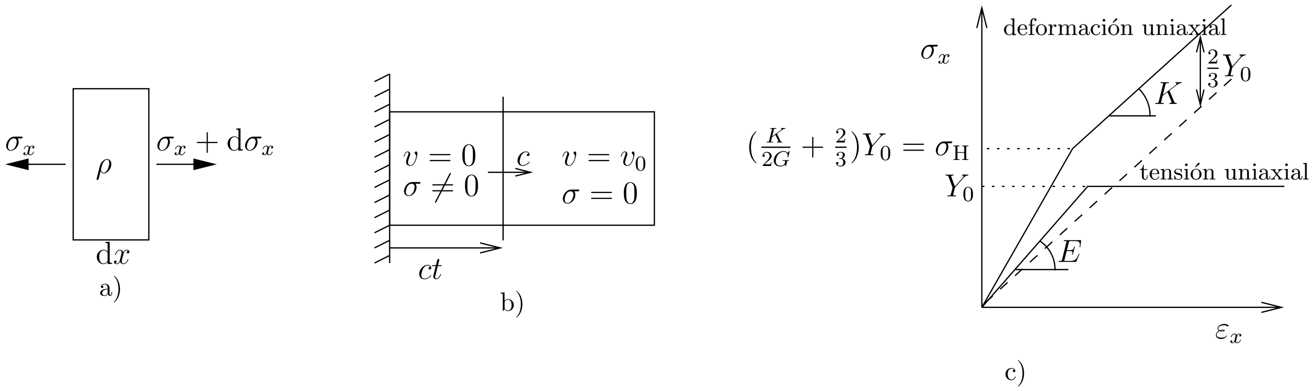

Figura 1: *a) Esquema de una rebanada de una barra sometida a tensión uniaxial; b) Balance de cantidad de movimiento al avanzar el frente de la onda de tensión, en una barra con velocidad v_0 que choca contra un muro rígido; c) Comparación de las curvas en tensión y deformación uniaxial.*

donde $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ es la velocidad con la que se propagan las ondas de tensión o velocidad del sonido. Las ondas de tensión están asociadas a discontinuidades de las derivadas de la presión o de la velocidad, aunque los valores de estas últimas siguen siendo continuos. Por concretar el orden de magnitud, en el acero es del orden de $(c_0)_{\mathrm{acer}} \approx 5100$ m/s, y en el hormigón $(c_0)_{\mathrm{horm}} \approx 3500$ m/s.

Por otra parte, si se considera la onda de tensión producida por el impacto de una barra con velocidad v_0 sobre una pared rígida, estableciendo el balance de cantidad de movimiento en el avance de la onda (figura 1.b), se deduce la magnitud de la onda de tensión:

$$\sigma = -\rho c_0 v_0, \tag{6}$$

donde el signo $-$ indica compresión. Esta sencilla expresión permite calcular de forma aproximada las tensiones generadas en un impacto y juzgar si se va a producir o no plastificación debido al choque. Por ejemplo, podemos estimar que en un acero típico con límite elástico $Y_0 = 500$ Mpa se producirán deformaciones plásticas para impactos por encima de aproximadamente $v_0 = 12{,}5$ m/s.

Otros fenómenos importantes debidos directamente a las ondas de tensión son los producidos por reflexiones y coincidencia de varios frentes de onda, aspectos descritos con detalle en [28, 26]. Merece la pena citar el fenómeno de «spalling» o desconchamiento en la cara posterior, por rotura a tracción de los materiales con resistencia a tracción limitada, producida cuando la onda de compresión $(-\sigma)$ se refleja como tracción en el extremo libre posterior, y se suma a la onda de descarga, produciendo una tracción de magnitud aproximadamente igual a σ.

Deformación uniaxial.— Cuando el impacto es sobre una placa en lugar de una barra de pequeña sección transversal, la condición es más bien deformación uniaxial en lugar de tensión uniaxial. Las deformaciones transversales al impacto no tienen tiempo de desarrollarse por la inercia, el material se encuentra confinado. En estas condiciones, particularizando (4) se obtiene la ley uniaxial $\sigma_x = (K + 4G/3)u_{,x}$. El valor de la tensión para que se alcance el límite elástico en estas circunstancias se denomina *límite elástico de Hugoniot*, $\sigma_{\mathrm{H}} = (K/2G + 2/3)Y_0$, siendo Y_0 el límite elástico en tensión uniaxial (figura 1.c).

Planteando la ecuación de ondas de forma similar a (5), se deduce la velocidad de propagación de las denominadas *ondas planas*, $c_p = \sqrt{(K + 4G/3)/\rho}$, mayor que la c_0 obtenida anteriormente para tensión uniaxial.

Ondas de choque.— Cuando las presiones suben considerablemente por encima del límite de Hugoniot σ_{H}, la evidencia experimental indica que en casi todos los materiales la curva tensión–deformación es cóncava hacia arriba (figura 2). Para perturbaciones en distintos puntos de la misma, las velocidades de ondas correspondientes son $c = \sqrt{S/\rho}$, siendo $S = \mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\varepsilon$. Esto provoca que la parte superior del frente de onda viaje más rápido que la inferior, dando lugar eventualmente a un frente vertical con una discontinuidad brusca de presión u onda de choque.

Las ondas de choque se alcanzan generalmente a partir de presiones del orden de 10 GPa, para velocidades de impacto del orden de 2 km/s, dependiendo del material. Al contrario que en el caso de las ondas de tensión, las ondas de choque involucran una discontinuidad energética con aumento de entropía. Para modelizarlas es preciso un conocimiento de las ecuaciones de estado del material $P = P(\rho, u)$, así como de la curva característica de Hugoniot, curva que expresa el lugar geométrico de los estados de choque que se puedan alcanzar para las variables de la ecuación de estado, desde el punto termodinámico. Una explicación más detallada de estos aspectos puede encontrarse en [44, 37, 42].

Cuando los materiales se ven sometidos a impactos a muy altas velocidades, la resistencia del material puede despreciarse (término constante $2Y_0/3$ en figura 1), comportándose el material como un fluido hidrodinámico. Por el contrario, cobra gran importancia la representación correcta de la ecuación de estado y de la curva de Hugoniot para

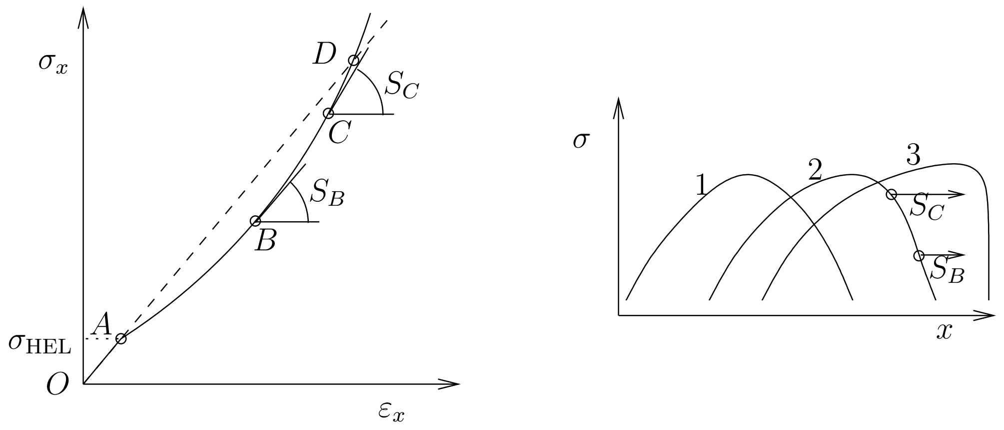

Figura 2: *Evolución creciente de la pendiente S de la curva tensión–deformación, para ondas planas con altas presiones: a medida que el frente de onda progresa, las presiones más altas se propagan con velocidades mayores que las más bajas ($S_C > S_B$), agolpándose en un frente vertical que se propaga con la velocidad correspondiente a OD.*

representar la propagación de las ondas de choque. Por otra parte, son necesarias técnicas numéricas especiales para calcular numéricamente esta propagación, basadas generalmente en viscosidad artificial [42].

3. MÉTODOS DE CÁLCULO

Salvo métodos específicos de tipo analítico o semiempírico [1, 48, 45], válidos sólo para escenarios particulares, el cálculo de problemas de impacto debe realizarse mediante procedimientos numéricos que requieren una discretización en el espacio, mediante el método de los elementos finitos (MEF) o diferencias finitas (DF). En [4] se puede encontrar una excelente recopilación de los distintos procedimientos de cálculo para impacto.

Considerando el caso de elementos finitos, y tomando como incógnitas los desplazamientos en cada punto $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$, se suele adoptar una aproximación de la forma:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t) = \sum_{A=1}^{N} \boldsymbol{u}_A(t) N_A(\boldsymbol{X}), \tag{7}$$

donde $\boldsymbol{u}_A(t)$ son los desplazamientos nodales, incógnitas discretas a resolver en cada incremento de tiempo, y $N_A(\boldsymbol{X})$ son las funciones de forma que definen la interpolación espacial. La expresión anterior implica que ambas aproximaciones (temporal y espacial) se realizan de forma independiente, lo que se denomina *semidiscretización* [8, 2, 12].

El proceso de cálculo consiste en establecer primeramente un incremento de tiempo para avanzar la solución al instante $t_{n+1} = t_n + \Delta t_{n+\frac{1}{2}}$. La discretización en el espacio se realiza en primer lugar mediante MEF o DF, convirtiendo las ecuaciones en derivadas parciales (EDP) en un conjunto de N ecuaciones difereciales ordinarias (EDO). Estas se resuelven a continuación mediante un método directo de integración en el tiempo, bien explícito o implícito.

3.1. Discretización espacial

Mientras que para los problemas de dinámica estructural (velocidades de impacto bajas) es más común el empleo de MEF [8, 3], para los problemas de propagación de ondas de choque hidrodinámicos es más común el empleo de DF [47].

En los modelos de elementos finitos pueden emplearse elementos estructurales, tales como vigas o láminas, que incorporan hipótesis cinemáticas como la obligación de secciones planas. Este tipo de elementos sólo se pueden aplicar en impactos a velocidades bajas, o bien fuera de la zona de impacto para una evaluación global de la dinámica estructural. En este último caso, la zona local del impacto debe estudiarse mediante otro procedimiento (ver apartado 4.4).

A medida que la velocidad de impacto es mayor, o bien para la evaluación local en la zona de impacto, resulta conveniente emplear elementos de continuo, en dos o tres dimensiones. En los problemas de impacto, asociados a discontinuidades y fenómenos no lineales fuertes resulta aconsejable emplear elementos de bajo orden de interpolación, huyendo de funciones de interpolación de alto orden que por lo general resultan menos robustos. La regla general es una malla más fina, con elementos simples y robustos, formulados en régimen no lineal (grandes deformaciones y desplazamientos, plasticidad, etc.) [12].

Mallas Lagrangianas.— Se trata de la discretización más común para sólidos, en la que la malla está ligada al material y por lo tanto se deforma con el mismo. Esto proporciona las siguientes ventajas:

— la ecuación de continuidad (2) se cumple de forma trivial, haciendo constantes las masas nodales;

— los contornos se representan de forma nítida, lo que permite calcular de forma precisa los contactos y demás fenómenos de borde.

Por el contrario, cuando las distorsiones son muy elevadas, las mallas Lagrangianas se vuelven inservibles y es necesario recurrir a técnicas de remallaje [40]. Estas operaciones precisan una interpolación de las variables para la nueva malla y, aunque en ocasiones se pueden realizar de forma cuasi-automática, la solución acaba resultando inviable.

Mallas Eulerianas.— Se encuentran fijas en el espacio, permitiendo que el material fluya a través de ellas. Es la discretización habitualmente empleada para mecánica de fluidos. En los problemas de altas presiones, en que la respuesta del material es de tipo hidrodinámica, resultan de uso obligado.

Al expresar las derivadas temporales que intervienen en las ecuaciones del movimiento en una malla Euleriana surgen términos adicionales de transporte. Para calcular la derivada material de una variable vectorial $\boldsymbol{a}$,

$$\dot{\boldsymbol{a}} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t}\right|_X = \left.\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_x \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t} = \nabla \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} + \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t}, \tag{8}$$

siendo la primera derivada según una partícula fija (X), y la segunda en un punto del espacio fijo ($\boldsymbol{x}$). Esta expresión puede aplicarse, por ejemplo, a la velocidad $\boldsymbol{v}$ o a cualquier otra magnitud material.

los modelos Eulerianos tienen lógicamente la desventaja de tener que calcular el transporte o flujo ($\nabla \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}$) a través de la malla, con lo que se puede perder precisión o difuminar el frente de onda si no se toman precauciones adecuadas. Algunos códigos [22, 7] son capaces de emplear mallas Lagrangianas en unas zonas y Eulerianas en otras, teniendo en cuenta el acoplamiento entre ambas con lo que permiten soluciones muy eficaces a problemas como el impacto de chorros a alta velocidad o la penetración de cargas huecas.

Métodos ALE.— Se basan en emplear una malla intermedia entre las dos opciones anteriores, respondiendo las siglas a malla «Arbitraria Lagrangiana-Euleriana». Sigue siendo necesario considerar el flujo de los parámetros materiales respecto de la malla, que ahora no se moverá con velocidad $\boldsymbol{v}$ como en (8) sino con una velocidad arbitraria especificada $\boldsymbol{v}'$. Este procedimiento puede reportar ventajas en algunos casos específicos [8, 9].

Cuerpos Rígidos.— En ocasiones el cálculo del impacto puede realizarse considerando ciertas partes del sistema como rígidas, dentro de lo que se denomina *sistemas multicuerpo*. Esto puede ser bien para simplificar la modelización de zonas de la estructura lejos de la zona del impacto, cuyo efecto sea casi únicamente inercial, o bien porque el sistema conste claramente de diversas partes unidas por juntas o articulaciones que forman un mecanismo.

La escala de tiempo de respuesta para los efectos inerciales de los cuerpos rígidos es considerablemente mayor que la de las vibraciones estructurales, y ésta a su vez notablemente superior a la de transmisión de ondas de tensión en la zona del impacto. Por este motivo, sólo tiene sentido realizar modelos que incluyan sólidos rígidos en impactos a velocidad baja, en los que sea necesario además una simulación de duración prolongada.

Las distintas escalas de cálculo dan lugar, a no ser que se adopten métodos simplificados como el uso de coeficientes de restitución semiempíricos, a sistemas de ecuaciones fuertemente no lineales y con carácter marcadamente «stiff». Esto plantea dificultades formidables para la estabilidad de la integración temporal. Recientemente han sido propuestos métodos denominados energía-momento [36] que aportan una estabilidad y precisión muy elevadas, lo que ha permitido simulaciones de larga duración con impactos en sistemas multicuerpo flexibles [10, 16, 11].

Contactos.— Constituyen un ingrediente esencial en la mayoría de los cálculos de impacto. Involucran dos tipos de cálculos: 1) detección de contactos, mediante algoritmos que analicen topológica y geométricamente las superficies; 2) cálculo de las fuerzas de interacción.

En cuanto al primer aspecto, se precisan métodos para detección automática de líneas o superficies de contacto con posibilidad de separación y deslizamiento, a partir de un análisis topológico de la malla. Cuando se produce erosión (eliminación de elementos que se consideren fracturados), es necesario crear las superficies de contacto nuevas [41].

Existen dos tipos de técnicas básicas para el cálculo de las fuerzas de contacto:

— *Multiplicadores de Lagrange*, que se basan en la introducción de variables adicionales (multiplicadores, con dimensiones de fuerza), de forma que se garantice el cumplimiento exacto de las restricciones geométricas. Originan un sistema de ecuaciones algebraicas mixto, con variables de desplazamientos y de fuerzas. Es el procedimiento que suelen seguir los códigos de cálculo con integración implícita en el tiempo (apartado 3.2.2), por ejemplo [23], resultando adecuado para velocidades de impacto bajas.

— *Penalización*: consideran fuerzas de contacto proporcionales a la penetración, a través de constantes de penalización. Permiten por tanto una pequeña penetración en los mismos [13, 40, 41]. Para que los errores geométricos sean suficientemente pequeños, lo penalizadores deben ser elevados, aunque existen procedimientos para cálculo automático de las constantes de penalización de forma que la penetración sea admisible, en relación con la geometría del modelo. Los valores altos de los penalizadores pueden introducir frecuencias altas y ruido numérico en el problema. Los programas de integración explícita (apartado 3.2.1) suelen emplear esta técnica, ya que en el ciclo de cálculo no se resuelve un sistema de ecuaciones simultáneas, y el empleo de los multiplicadores resultaría contrario a esta filosofía. La técnica de penalización se emplea por tanto en cálculos de impacto a velocidades altas o medias.

Recientemente se han propuesto métodos de penalización, en el contexto de integración temporal energía-momento (apartado 3.2.3), que evitan los inconvenientes clásicos de la penalización y resuelven con precisión el impacto aunque el paso de tiempo sea hasta dos órdenes de magnitud superior a los periodos propios introducidos por los penalizadores.

3.2. Discretización temporal

Salvo los casos más simples en que la respuesta durante el impacto sea lineal, o que se trate de evaluar vibraciones lineales resultantes de la aplicación de un impulso conocido, es necesario resolver un problema a menudo fuertemente no lineal, por lo que se necesita resolver mediante integración directa en el tiempo. El problema básico a resolver en cualquier esquema es obtener la solución en el instante t_{n+1}, a partir de los valores en instantes anteriores [8, 25].

3.2.1. Métodos explícitos

Constituyen la forma más directa para avanzar en el tiempo. Se basan en establecer las ecuaciones dinámicas en el instante t_n para calcular las variables $\boldsymbol{x}_{n+1}$. Bajo ciertas condiciones, resulta posible un algoritmo explícito de resolución, que evite el planteamiento y resolución de un sistema global de ecuaciones [25, 8].

Como ejemplo, citaremos el esquema de diferencias centrales, el óptimo entre los algoritmos de 2.º orden:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{n+\frac{1}{2}} = \dot{\boldsymbol{x}}_{n-\frac{1}{2}} + \ddot{\boldsymbol{x}}_n \Delta t; \tag{9}$$

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n + \dot{\boldsymbol{x}}_{n+\frac{1}{2}} \Delta t. \tag{10}$$

En la ecuación anterior, la aceleración resulta de integrar el modelo en el instante t_n. Por ejemplo, en un cálculo de elementos finitos, empleando masas concentradas, la aceleración de un nodo genérico A sería

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_n^A = \frac{1}{m_A}\left(\sum_{i=1}^{k_A}\int_{\Omega_{A_i}} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V + \boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}^A\right). \tag{11}$$

En esta expresión el sumatorio de fuerzas internas se extiende a los k_A elementos Ω_{A_i} conectados al nodo A.

Los esquemas explícitos, cuando se emplea una matriz de masas concentradas, proporcionan un algoritmo de cálculo elemento por elemento, que no precisa ni ensamblar ni resolver un sistema global de ecuaciones. Entre otros aspectos, esto conlleva la ventaja de evitar el almacenamiento de matrices de coeficientes globales, con lo que el coste crece de forma tan sólo lineal con tamaño del problema, aspecto que puede resultar decisivo para problemas 3D grandes.

Como contrapartida, tiene el inconveniente de que la estabilidad es tan sólo condicional, exigiéndose que el paso de tiempo sea inferior a un valor crítico (condición de Courant). Para diferencias centrales y masa concentrada:

$$\Delta t < \Delta t_{\mathrm{crit}} = \frac{h}{c} = \frac{2}{\omega_{\max}}, \tag{12}$$

donde c es la máxima velocidad de ondas, h el tamaño del elemento, y $\omega_{\max}$ la máxima frecuencia propia del sistema. Este requisito obliga a realizar muchos pasos de tiempo de pequeña amplitud. Por el contario, dentro de cada paso de tiempo el cálculo es explícito y no se itera para controlar residuo, lo que redunda en una gran sencillez. Los métodos de cálculo explícitos resultan en la práctica sencillos y robustos, ya que la condición (12) se puede establecer de forma automática con un esquema de paso variable.

En problemas de propagación de ondas, el paso Δt está obligado por motivos físicos a ser pequeño para poder resolver las altas frecuencias, por lo que la limitación de Δt_{crit} no resulta restrictiva en la práctica.

Debe hacerse notar que los elementos finitos con interpolación de alto orden no se suelen usar con integración explícita, al plantear varios problemas: 1) producen más ruido; 2) Δt_{crit} es más pequeño; 3) resulta difícil concentrar la masa.

3.2.2. Métodos implícitos

Estos se bassn en calcular las variables $\boldsymbol{x}_{n+1}$ mediante la ecuación dinámica en t_{n+1} el propio instante que se busca resolver [20, 21]. Como consecuencia, se plantea un sistema de ecuaciones algebraicas acoplado, generalmente no lineal. Para su resolución, en cada incremento es necesario plantear un método iterativo, normalmente mediante linealización (método de Newton, con el cálculo de la matriz tangente, que habrá de ser algorítmicamente consistente si se desea convergencia cuadrática).

Como ejemplo, detallaremos el esquema del método trapezoidal, uno de los de la familia β-Newmark (con $\beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{2}$), seguramente uno de los más comunes en dinámica estructural. Se puede interpretar mediante la hipótesis de aceleración media constante en el intervalo, $\bar{\boldsymbol{a}}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\ddot{\boldsymbol{x}}_n + \ddot{\boldsymbol{x}}_{n+1})$:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{n+1} = \dot{\boldsymbol{x}}_n + \frac{1}{2}(\ddot{\boldsymbol{x}}_n + \ddot{\boldsymbol{x}}_{n+1})\Delta t; \tag{13}$$

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n + \dot{\boldsymbol{x}}_n\Delta t + \frac{1}{4}(\ddot{\boldsymbol{x}}_n + \ddot{\boldsymbol{x}}_{n+1})(\Delta t)^2 \tag{14}$$

El esquema trapezoidal es indondicionalmente estable en el régimen lineal [25]. Esto permite a priori emplear paso de tiempo mayores, aunque estarán limitados por cuestiones de precisión como es lógico. La estabilidad se consigue a costa de un algoritmo de mayor complejidad, y de la necesaria reslución de un sistema global de ecuaciones en cada paso. Se realizan por tanto menos pasos de tiempo, aunque de mayor complejidad que en el caso explícito.

Se precisa el almacenamiento de matrices de coeficientes globales, por lo que para problemas tridimensionales grandes el coste puede ser prohibitivo, ya que crece cuadráticamente con el tamaño del problema.

En el caso no lineal, se asegura un control de la convergencia, manteniendo los residuos por debajo de la tolerancia especificada. Sin embargo, es difícil dar una garantía incondicional de estabilidad en el caso no lineal. En casos de fuerte no linealidad, pueden ser convenientes otros esquemas de integración (apartado 3.2.3).

3.2.3. Métodos Energía-Momento

Estos métodos, propuestos recientemente [34, 36], pueden resultar adecuados para dinámica fuertemente no lineal. Están basados en la conservación algorítmica de magnitudes como el momento cinético o la energía cinética, claves para estabilidad en dinámica no lineal [10, 16, 11]. Se basan en una modificación de la regla del punto medio, o bien en el planteamiento consistente de una derivada discreta que tenga las propiedades deseadas. La falta de espacio impide desarrollar adecuadamente aquí más este aspecto, por lo que se refiere al lector a la bibliografía citada.

4. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

4.1. Impacto esfera sobre plano rígido

Se trata de una esfera de acero, diámetro $\phi = 7{,}5\,\mathrm{mm}$, propiedades $E = 210\,\mathrm{GPa}$, $\nu = 0{,}3$, $\rho = 7850\,\mathrm{kg/m^3}$. El modelo es elastoplástico (J_2) con límite elástico $Y_0 = 510\,\mathrm{MPa}$ y endurecimiento lineal isótropo de constante $H = 100\,\mathrm{Mpa}$.

Se realizaron impactos a 50, 100 y 200 m/s, mediante cálculo explícito [17], de los cuales en la figura 3 se extractan algunos para el caso de 100 m/s.

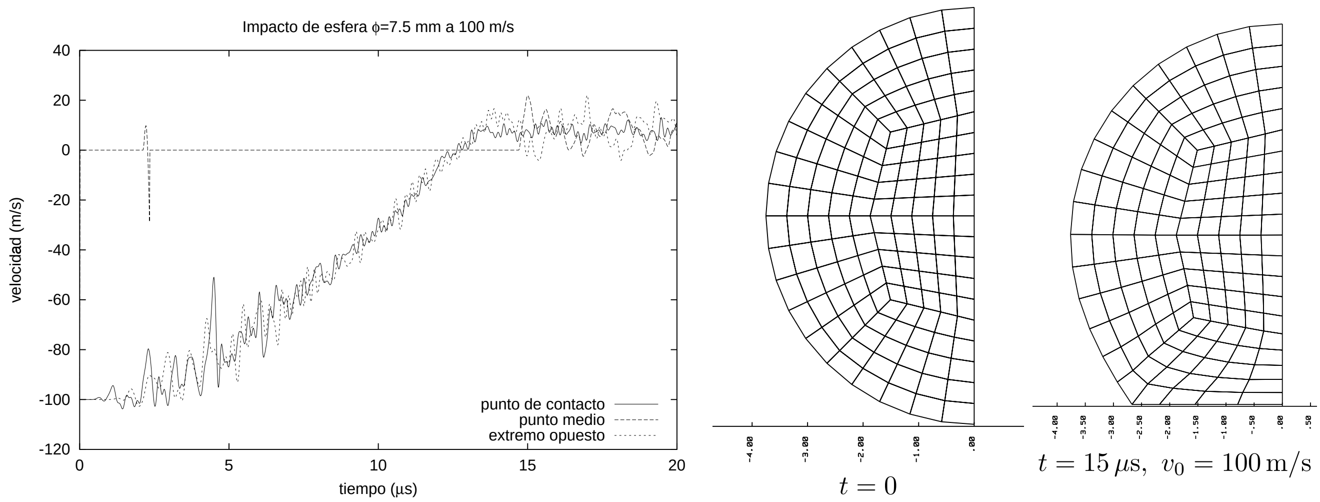

Figura 3: *: Impacto contra un plano liso y rígido de una esfera de acero de $\phi = 7{,}5$ mm: Historias de velocidad en distintos puntos de la esfera, malla inicial y estado final de la misma (cálculo [17] realizado con PR2D [13]).*

4.2. Caída de un equipo de radar portátil

En este caso se trata de simular el impacto por caída libre del equipo, de masa 28 kg y con velocidad de impacto 2 m/s. El equipo consta de un trípode, unas cajas articuladas, y una antena parabólica. El objetivo era la interpretación de los daños observados en el eje de elevación de la antena, a través del cual está unida a la caja, que resultó dañado en caídas del equipo sucedidas en maniobras de campo. En dicho eje se produjeron deformaciones plásticas localizadas que exigieron en primer lugar un análisis detallado de elementos finitos para obtener, de forma numérica, la ley momento torsor–giro [19].

La antena se representa como una estructura elástica, simplificada mediante elementos viga, y el eje de torsión mediante vigas elastoplásticas con torsión. La caja y pies se consideran como sólidos rígidos, con su masa y tensor de inercia correspondientes. El contacto con el terreno en el impacto se idealizó mediante una «almohadilla» elastoplástica, ya que dista de ser un contacto totalmente rígido, a la que se asignó una resistencia máxima $Y = 1{,}2$ kN, para la penetración de $\delta = 10$ mm.

El cálculo se realizó con [41], empleando 7643 pasos de tiempo explícitos, para una simulación total de 70 ms. En la figura 4 se extractan algunos resultados, de los cuales se destaca el acoplamiento que se produce en este caso entre distintas componentes de energía, la cinética de rotación y traslación, y el trabajo de las fuerzas externas o de deformación internas. La variación y el trasvase significativo entre estas aconseja un tratamiento del impacto englobando los cuerpos rígidos.

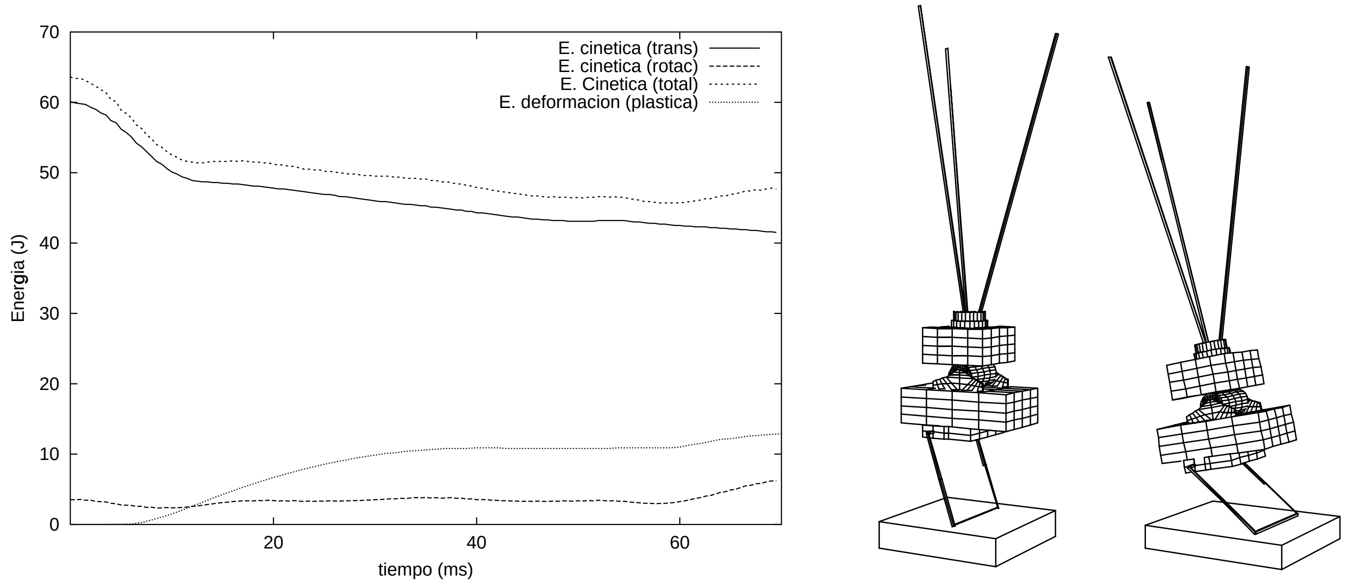

Figura 4: *Impacto de un radar portátil: evolución de las distintas componentes de la energía y configuraciones inicial y final del sistema [19].*

4.3. Impacto sobre varias chapas con perforación

En este caso se exponen los resultados de un ejemplo resuelto con [41] mediante cálculo explícito en que se ilustran capacidades avanzadas de contacto y erosión. Se trata del impacto de esfera elástica de acero, perforando varias placas de acero elastoplásticas. La velocidad de impacto es de 381 m/s, y el espesor de las chapas variable entre 6,3 y 10 mm. El límite elástico se considera $Y_0 = 248$ MPa, con endurecimiento lineal $H = 2{,}07$ GPa. Cuando se alcanza una deformación plástica de 100 %, se considera que el material está inutilizado y se eliminan los elementos correspondientes, creando superficies de contacto nuevas. La simulación se realiza para durante 250 μs, mostrándose en la figura 5 una instantánea significativa en 110 μs.

4.4. Impacto sobre un depósito de hormigón para gas natural licuado

En este caso se exigía garantizar la seguridad estructural y la ausencia de perforación del tanque frente a un proyectil postulado, de tipo rígido, de masa 1000 kg a 50 m/s, proveniente de una posible explosión cercana.

La penetración local fue evaluada mediante fórmulas analíticas con justificación semiempírica [27], ya que un estudio más detallado hubiera resultado de una dificultad fuera de la escala de los recursos disponibles en el proyecto [15]. Esta penetración permitió diseñar un elemento de contacto, cuya energía disipada corresponde con la pérdida de energía cinética del proyectil al penetrar. De esta forma, el modelo se realizó con elementos estructurales de lámina, empleando un modelo elastoplástico de material para el hormigón de tipo Drucker-Prager, con resistencias uniaxiales $\sigma_c = 40$ Mpa a compresión y $\sigma_t = 3{,}6$ Mpa a tracción. Se representaron de forma segregada las armaduras pasivas mediante barras elastoplásticas. El cálculo se realizó con integración implícita [23], para un tiempo total de simulación de 60 ms.

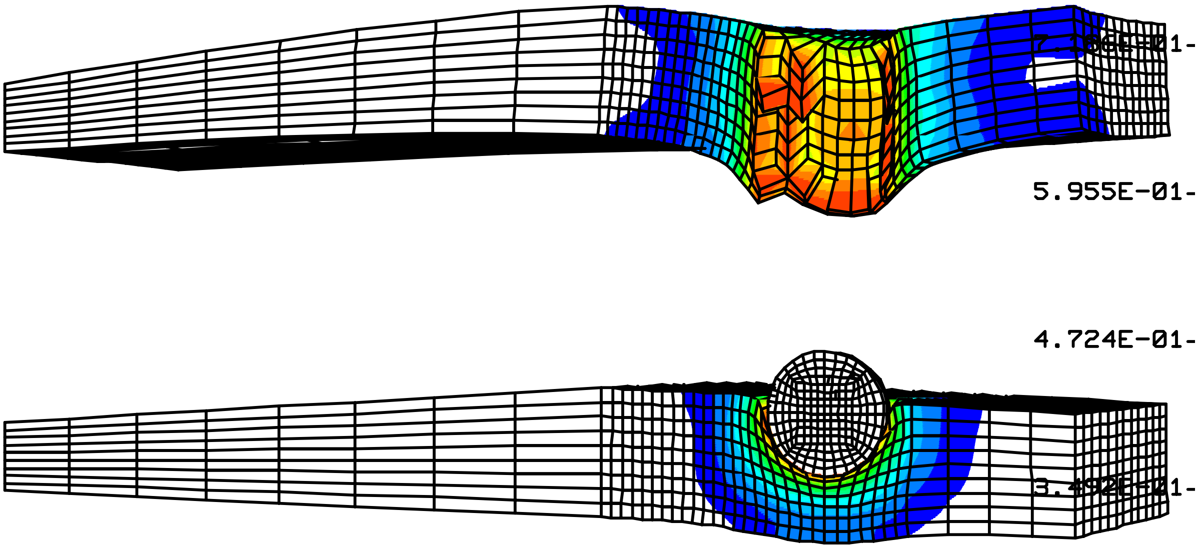

Figura 5: *Impacto y perforación de varias placas metálicas, cálculo con DYNA3D [41]. Estado del modelo a* $110\,\mu$s*, cuando la esfera está penetrando en la segunda placa.*

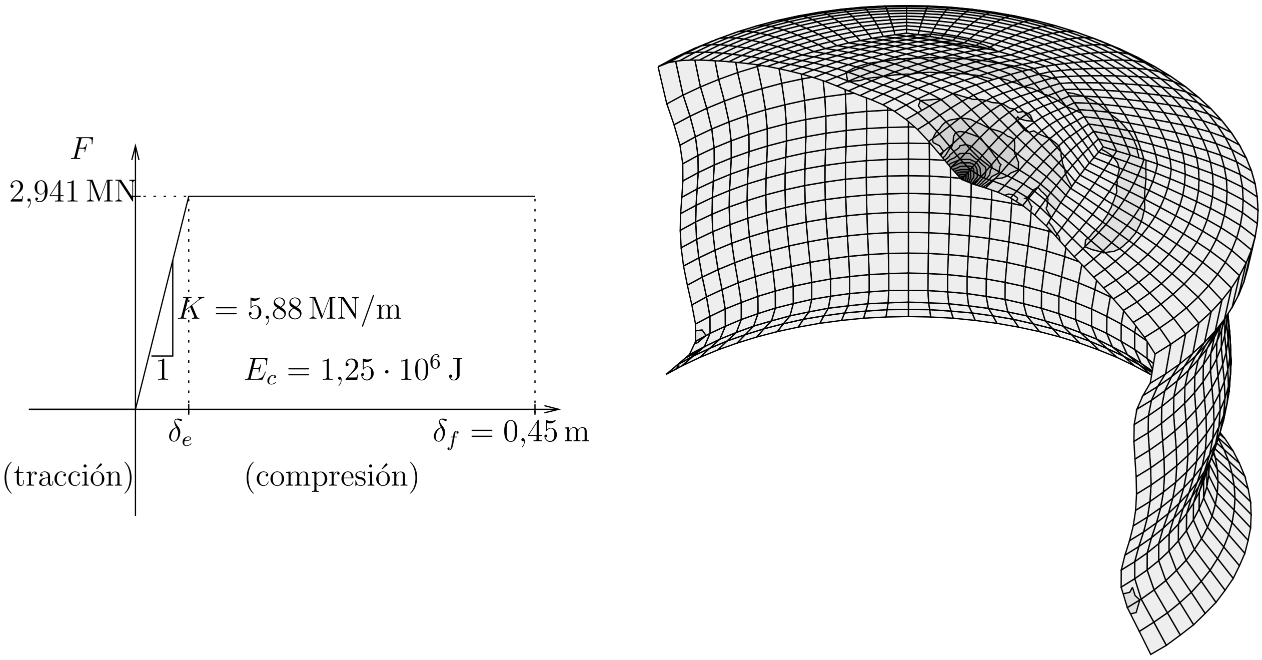

Figura 6: *Impacto de proyectil rígido de* 1000 *kg a* 50 *m/s sobre la cúpula de hormigón armado de un tanque de gas natural licuado, de espesor* 0,45 *m y* 70 *m de diámetro [15]. El impacto se realiza a través de un elemento de contacto que simula la fuerza en función de la penetración local, que es de* 0,43 *m, casi total. En la figura se dibujan los contornos de cortante transversal sobre la estructura con los desplazamientos exagerados* ($\times 500$)*, a los* 17 *ms. la deformación que se observa en el muro proviene de la fase anterior de carga, en la que se aplica un pretensado circunferencial con deformaciones diferidas por fluencia. Cálculo realizado con integración implícita [23].*

5. CONCLUSIONES

De forma resumida, concluimos con las observaciones siguientes.

- El impacto constituye una solicitación dinámica que exige un tratamiento específico, con un marcado carácter no lineal, lo que difiere de otros casos de dinámica estructural. Este hecho convierte en prácticamente obligado un cálculo numérico con integración directa en el tiempo.
- Según los distintos escenarios y velocidades de impacto, los mecanismos que gobiernan el fenómeno son de índole diversa, desde los problemas gobernados por la dinámica estructural (bajas velocidades) a los dominados por ondas de tensión a velocidades más altas, o incluso ondas de choque.
- El modelo adecuado para el material difiere de un caso a otro, pasando de modelos elastoplásticos con fallo para velocidades bajas o medias a modelos hidrodinámicos para altas velocidades.
- En numerosas situaciones es imprescindible un modelo detallado de los contactos y de la posible penetración o rotura local.
- Los métodos de integración implícita están adecuados a impactos a velocidades más bajas en los que predomina la dinámica estructural, mientras que los explícitos resultan preferibles para velocidades más altas.
- Por lo general resulta preferible el empleo de elementos robustos y simples, sin funciones de interpolación de orden elevado.
- En el caso de que se desee emplear elementos estructurales (vigas o láminas), para impactos a baja velocidad, deberá realizarse de forma adicional la verificación adecuada de los efectos locales del impacto.

Referencias

[1] M. E. Backman y W. Goldsmith. The mechanics of penetration of projectiles into targets. *Int. Journal of Engineering Science*, 16:1–99, 1978.

[2] T. Belytschko. An overview of semidiscretization and time integration procedures. En Belytschko y Hughes [3], capítulo 1.

[3] T. Belytschko y T. J. Hughes, editores. *Computational Methods for Transient Analysis*. North-Holland, Amsterdam, 1983.

[4] D. J. Benson. Computational methods in lagrangian and eulerian hydrocodes. *Computer Methods in Applied mechanics and Engineering*, 99(2–3):235–394, 1992.

[5] R. M. Brach. *Mechanical Impact Dynamics*. John Wiley, 1991.

[6] Comisión redactora IAPF. Instrucción para las acciones de cálculo en puentes de ferrocarril. Informe técnico, Ministerio de Fomento, 2000. Borrador pendiente de aprobación definitiva, comisión coordinada por José M.ª Goicolea, E.T.S.I. Caminos, Madrid.

[7] M. S. Cowler y N. K. Birnbaum. *AUTODYN user manual*. Century Dynamics Inc, Oakland, CA (USA), 1989.

[8] J. Donea, editor. *Advanced Structural Dynamics*. Applied Science Publishers, London, 1978.

[9] J. Donea. Arbitrary lagrangian-eulerian finite element methods. En Belytschko y Hughes [3], capítulo 10.

[10] J. C. García Orden. *Dinámica no lineal de sistemas multicuerpo flexibles mediante algoritmos conservativos*. Tesis Doctoral, E.T.S.I. Caminos, Universidad Politécnica de Madrid, 1999.

[11] J. C. García Orden y J. M. Goicolea. Conserving properties in constrained dynamics of flexible multibody systems. *Multibody System Dynamics*, 4(2–3):225–244, 2000.

[12] J. M. Goicolea. Análisis termomecánico no lineal mediante métodos explícitos de diferencias finitas y elementos finitos. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 8(3):235–265, 1992.

[13] J. M. Goicolea. *PR2D – User's Guide, version 1-2.10*, october 1992.

[14] J. M. Goicolea. *Mecánica*. Colección Escuelas. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid, 1995.

[15] J. M. Goicolea, R. Anero, et al. Cálculos no lineales de impacto y explosión sobre un tanque de GNL. Informe Técnico UPM-NC.3008 rev. 1, ferrovial-AGROMAN S.A., marzo 2000. Confidencial.

[16] J. M. Goicolea y J. C. García Orden. Dynamic analysis of rigid and deformable multibody systems with penalty methods and energy-momentum schemes. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1999. Accepted for publication.

[17] J. M. Goicolea y I. Hervella Pajares. Impactos axilsimétricos en PR2D. Informe técnico, Depto. de Medios Continuos y Teoría de Estructuras, E.T.S. Ingenieros de Caminos, Univ. Politécnica de Madrid, july 1996.

[18] J. M. Goicolea, J. Martí, I. Attalla, y C. Gratieux. Modelling of reinforced concrete containments during expernal impact. En W. J. Amman et al., editores, *Impact: Effect of Fast Transient Loadings*, págs. 333–341. A.A. Balkema, Rotterdam, 1987.

[19] J. M. Goicolea y F. J. Martínez Cutillas. Low velocity impact of a deformable multi-body system. En P. S. Bulson, editor, *Structures under Shock and Impact III*. Computational Mechanics Publications, Southampton, UK, june 1994.

[20] M. Géradin. Implicit finite element methods. En Belytschko y Hughes [3], capítulo 9.

[21] M. Géradin y D. Rixen. *Mechanical Vibrations, Theory and Applications to Structural Dynamics*. John Wiley, Chichester (UK), 1997.

[22] S. Hancock. *PISCES 3DELK User´s Manual*. Pisces International Company, San Leandro, CA (USA), 1981.

[23] HKS Inc., Rhode Island (USA). *ABAQUS 5.8 – Theory, User, Example manuals*, 1998.

[24] V. Hohler y A. J. Stilp. Long-rod penetration mechanics. En Zukas [45], capítulo 5.

[25] T. J. Hughes. Analysis of transient algorithms with particular reference to stability behaviour. En Belytschko y Hughes [3], capítulo 2.

[26] W. Johnson. *Impact Strength of Materials*. Edward Arnold, London, 1972.

[27] R. P. Kennedy. A review of procedures for the analysis and design of concrete structures to resist missile impact effects. *Nuclear Engineering and Design*, 37:183–203, 1976.

[28] H. Kolsky. *Stress Waves in Solids*. Dover, New York, 1972.

[29] C. A. Mader. Introduction to energetic materials. En Zukas [45], capítulo 10.

[30] J. Martí. Impact analysis of transport flasks. En C. A. Brebbia y V. Sánchez Gálvez, editores, *Shock and Impact on Structures*, capítulo 8. Computational Mechanics Publications, Southampton, UK, 1994.

[31] J. Martí y J. M. Goicolea. Impactos y grandes deformaciones. *Revista de la Sociedad Nuclear Española*, 68:23–27, 1988.

[32] J. Martí, J. M. Goicolea, R. Kunar, y M. Alderson. Impact analysis of transport flasks. En *Int. Conf. on Nuclear Containment*. Cambridge, UK, 1987.

[33] J. Martí, G. S. Kalsi, y N. K. Prinja. Three-dimensional nonlinear analysis of pipe-to-pipe impact. En *ASCE Engineering Mechanics Division Specialty Conf.*. Purdue University, USA, 1983.

[34] J. Simó y K. Wong. Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 31:19–52, 1991.

[35] J. C. Simó y T. J. Hughes. *Computational Inelasticity*. Springer, New York, 1998.

[36] J. C. Simó, N. Tarnow, y K. K. Wong. Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for non-linear dynamics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 100:63–116, 1992.

[37] T. Nicholas y R. F. Recht. Introduction to impact phenomena. En Zukas [45], capítulo 1.

[38] W. P. Walters. Fundamentals of shaped charges. En Zukas [45], capítulo 11.

[39] G. Weirauch. *Das Verhalten von Kupferstiften beim Auftreffen auf verschiedene Werkstoffe mit Geschwindigkeiten zwischen 50 m/s und 1650 m/s*. Tesis Doctoral, Universitat Karlsruhe, 1971.

[40] R. G. Whirley, B. E. Engelmann, y J. O. Hallquist. Dyna2d—a nonlinear, explicit, two-dimensional finite element code for solid mechanics; user manual. Informe Técnico UCRL-MA-110630, Lawrence Livermore national Laboratory, april 1992.

[41] R. G. Whirley y J. O. Hallquist. Dyna3d—a nonlinear, explicit, three-dimensional finite element code for solid and structural mechanics; user manual. Informe Técnico UCRL-MA-107254, Lawrence Livermore national Laboratory, may 1991.

[42] M. L. Wilkins. *Computer Simulation of Dynamic Phenomena*. Springer, 1999.

[43] R. L. Woodward. Material failure at high strain rates. En Zukas [45], capítulo 2.

[44] J. A. Zukas. Stress waves in solids. En Zukas et al. [48], capítulo 1.

[45] J. A. Zukas, editor. *High Velocity Impact Dynamics*. John Wiley, New York, 1990.

[46] J. A. Zukas. Introduction to penetration dynamics. En *High Velocity Impact Dynamics* [45], capítulo 4.

[47] J. A. Zukas. Survey of computer codes for impact simulation. En *High Velocity Impact Dynamics* [45], capítulo 9.

[48] J. A. Zukas et al., editores. *Impact Dynamics*. John Wiley, New York, 1982.