

Análisis Sísmico de Estructuras: Dinámica Estructural

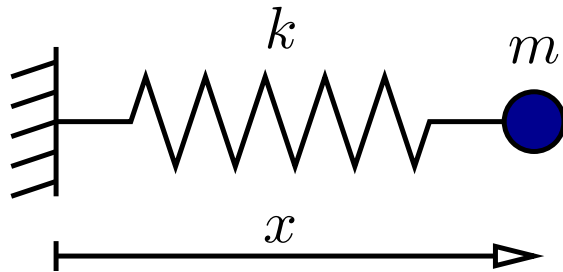
José M.^a Goicolea

Depto. Mecánica de Medios Continuos
y Teoría de Estructuras

22/03/2004

I. SISTEMAS LINEALES CON 1 G.D.L.

Oscilador Armónico Simple sin Amortiguamiento



Conservación energía:

$$m\ddot{x} = f_k(x)$$

$$f_k(x) = -kx \quad \Rightarrow \quad V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad (1)$$

donde A es la amplitud máxima ($\dot{x} = 0$).

Integración de la ecuación

Despejando \dot{x} en (1):

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{k}{m}} dt = \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}},$$

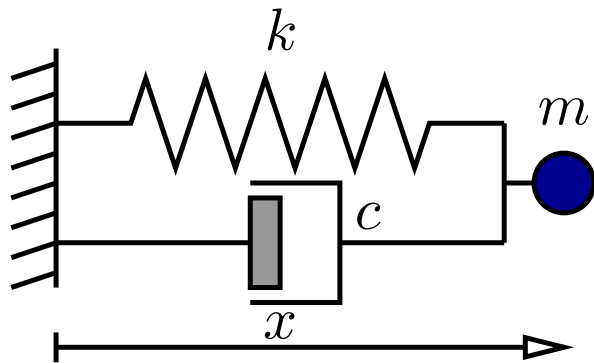
Integrando, denominando $\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{k/m}$, y tomando como condición inicial $x = 0$ para $t = 0$,

$$\omega_0 t = \arcsen\left(\frac{x}{A}\right) \quad \Rightarrow \quad x(t) = A \text{sen}(\omega_0 t).$$

En un caso general (condiciones iniciales genéricas x_0, \dot{x}_0):

$$x(t) = A \text{sen}(\omega_0 t + \phi).$$

Oscilador con Amortiguamiento



$$f_c = -c\dot{x} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$\text{Si } c < c_{\text{crit}} = 2\sqrt{km},$$

$$x(t) = Ae^{-\frac{c}{2m}t} \text{sen}(\omega_D t + \phi)$$

siendo $\omega_D \stackrel{\text{def}}{=} \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$; $c = 2\zeta\omega_0 m$. Alternativamente:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2)$$

$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega_0 t} \text{sen}(\omega_D t + \phi) \quad (3)$$

Las constantes (A, ϕ) se calculan mediante las condiciones iniciales (x_0, \dot{x}_0) .

Amortiguamiento

- Medida del amortiguamiento: decremento logarítmico (δ), logaritmo del cociente de amplitudes máximas en dos ciclos sucesivos.
- Amplitud ciclo i : $u_i = Ae^{-\zeta\omega_0 t_i}$.

$$t_{i+1} = t_i + \frac{2\pi}{\omega_D} \quad \Rightarrow \quad \delta = \ln \left(\frac{u_i}{u_{i+1}} \right) = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \approx 2\pi\zeta$$

(aproximadamente lineal con ζ si $\zeta \leq 20\%$).

Oscilaciones Forzadas

♠ Ecuación:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t) \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{p(t)}{m}. \quad (4)$$

♠ Solución general:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t), \quad \begin{cases} x_h(t) = Ae^{-\zeta\omega_0 t} \text{sen}(\omega_D t + \phi); \\ x_p(t) : \text{solución particular.} \end{cases} \quad (5)$$

♠ Solución particular para excitación armónica:

$$p(t) = p_0 \text{sen } \omega t \quad \Rightarrow \quad x_p(t) = x_0 \text{sen}(\omega t - \phi_p) \quad (6)$$

$$x_0 = \frac{p_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}} = \frac{p_0/k}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2}}, \quad \text{con } \beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (7)$$

Factor de Amplificación Dinámica

♥ Deformación estática: $x_{\text{est}} = \frac{p_0}{k}$.

♥ Deformación dinámica máxima: Factor de Amplificación Dinámica

$$x_0 = A_d x_{\text{est}}, \quad A_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\zeta^2 \beta^2}}. \quad (8)$$

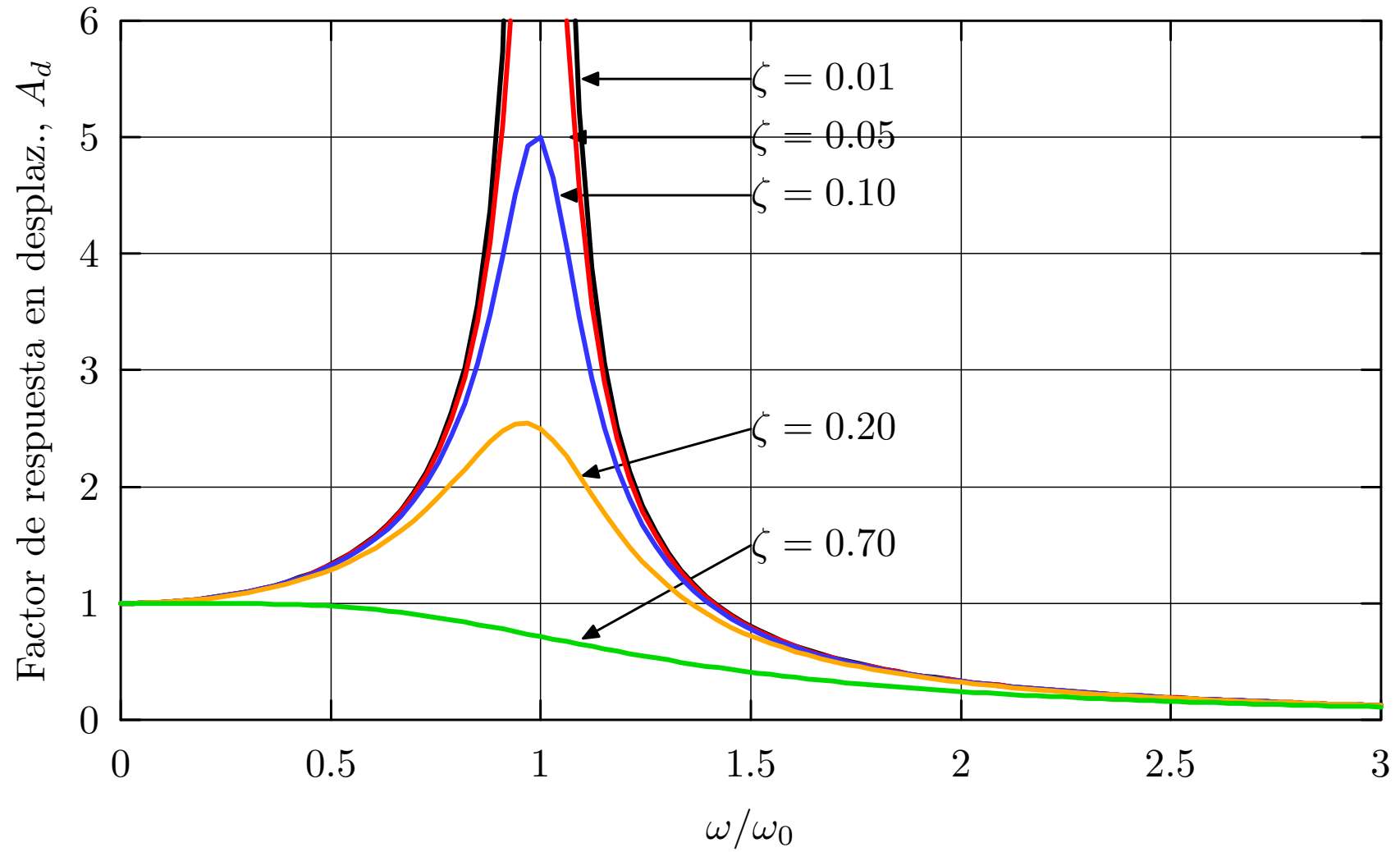
1. $\beta = \frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$: $A_d \rightarrow 0$; $x_0 \approx \frac{p_0}{m\omega^2}$. (controlado por m).

2. $\beta = \frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$: $A_d \rightarrow 1$; $x_0 \approx x_{\text{est}} = \frac{p_0}{k}$. (controlado por k).

3. $\beta = \frac{\omega}{\omega_0} \approx 1$: A_d máximo (resonancia), para

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}; \Rightarrow x_{0,r} = \frac{p_0}{c\omega_0} \text{ (controlado por } c).$$

Factor de Amplificación Dinámica



Amplificación de desplazamientos, velocidades y aceleraciones

♣ Despreciando la solución de la homogénea $x_h(t) \rightarrow 0$,

$$x(t) = \frac{p_0}{k} A_d(\beta) \operatorname{sen}(\omega t - \phi_p); \quad (9)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{p_0}{\sqrt{km}} A_v(\beta) \cos(\omega t - \phi_p); \quad (10)$$

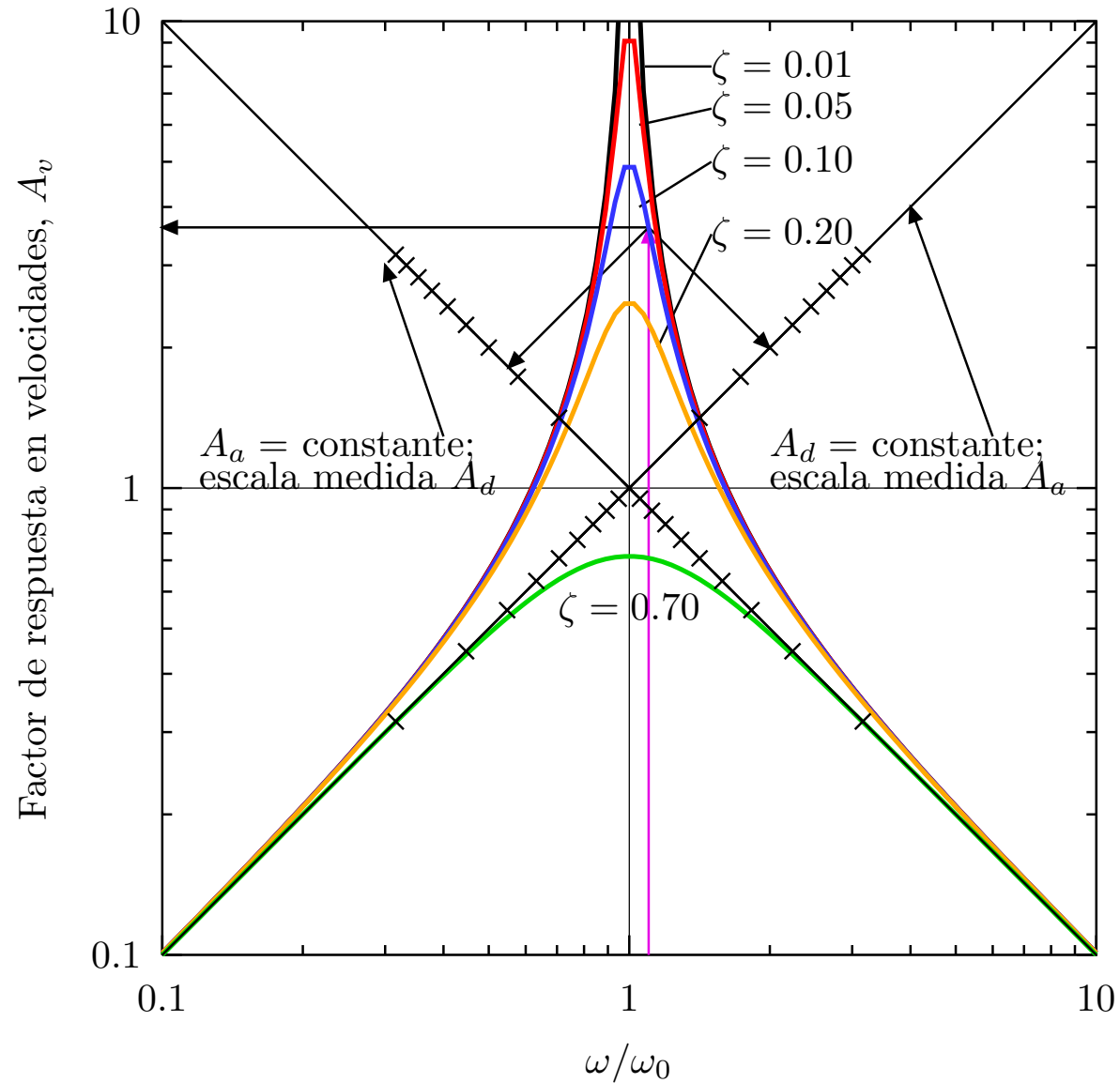
$$\ddot{x}(t) = -\frac{p_0}{m} A_a(\beta) \operatorname{sen}(\omega t - \phi_p). \quad (11)$$

Donde $A_v = \frac{\omega}{\omega_0} A_d$; $A_a = \frac{\omega}{\omega_0} A_v = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 A_d$.

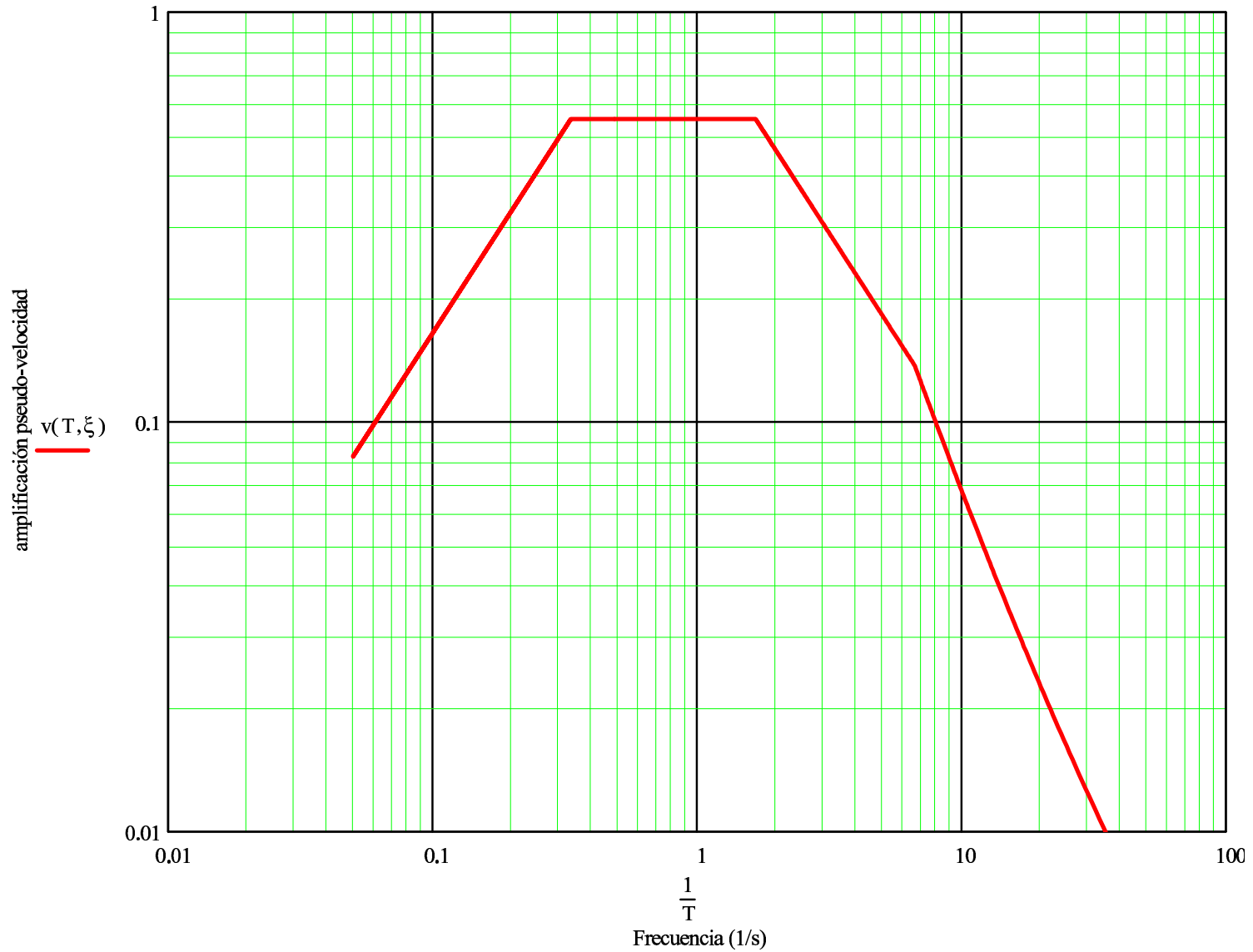
♣ En gráfico doblemente logarítmico ($\ln(\omega/\omega_0)$, $\ln A_v$):

- $A_d = \text{cte.}$: $\ln A_v = \ln(\omega/\omega_0) + \ln A_d$, recta pendiente $+45^\circ$
- $A_a = \text{cte.}$: $\ln A_v = -\ln(\omega/\omega_0) + \ln A_a$, recta pendiente -45°

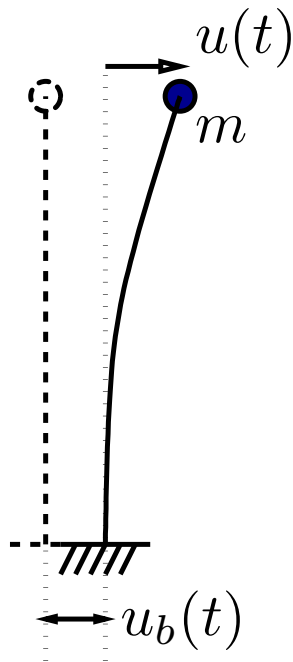
Representación logarítmica de amplificación dinámica



Ejemplo de espectro de respuesta para acción sísmica



Excitación en la base. Ecuaciones



$$u_T(t) = u_b(t) + u(t)$$

$$m\ddot{u}_T = f(t) = -ku(t) - c\dot{u}(t)$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_b(t)$$

◇ Excitación armónica:

$$u_b(t) = u_{b0} \text{sen}(\omega t)$$

$$\ddot{u}_b = -\omega^2 u_{b0} \text{sen}(\omega t).$$

◇ Equivale a fuerza aplicada (fuerza inercial, ficticia):

$$p(t) = p_0 \text{sen} \omega t; \quad p_0 = mu_{b0}\omega^2 .$$

Excitación en la base. Ecuaciones (2)

◇ Desplazamientos relativos

$$u(t) = \frac{m\omega^2 u_{b0}}{k} A_d \text{sen}(\omega t - \phi_p) = u_{b0} (\omega/\omega_0)^2 A_d \text{sen}(\omega t - \phi_p)$$

Son los que generan los esfuerzos estructurales (fuerzas estáticas equivalentes, f_S):

$$f_S(t) = ku(t) = -m\ddot{u}_T - c\dot{u}$$

◇ Desplazamientos totales

$$u_T = u_b + u = u_{b0} \text{sen}(\omega t) + u_{b0} (\omega/\omega_0)^2 A_d \text{sen}(\omega t - \phi_p)$$

Mediante la aceleración total se obtienen las fuerzas totales sobre m :

$$f_T = -m\ddot{u}_T = ku + c\dot{u}$$

Excitación en la base. Transmisibilidad.

◇ Sea movimiento en la base $\ddot{u}_b(t) = \ddot{u}_{b0} \text{sen } \omega t$. Aceleraciones:

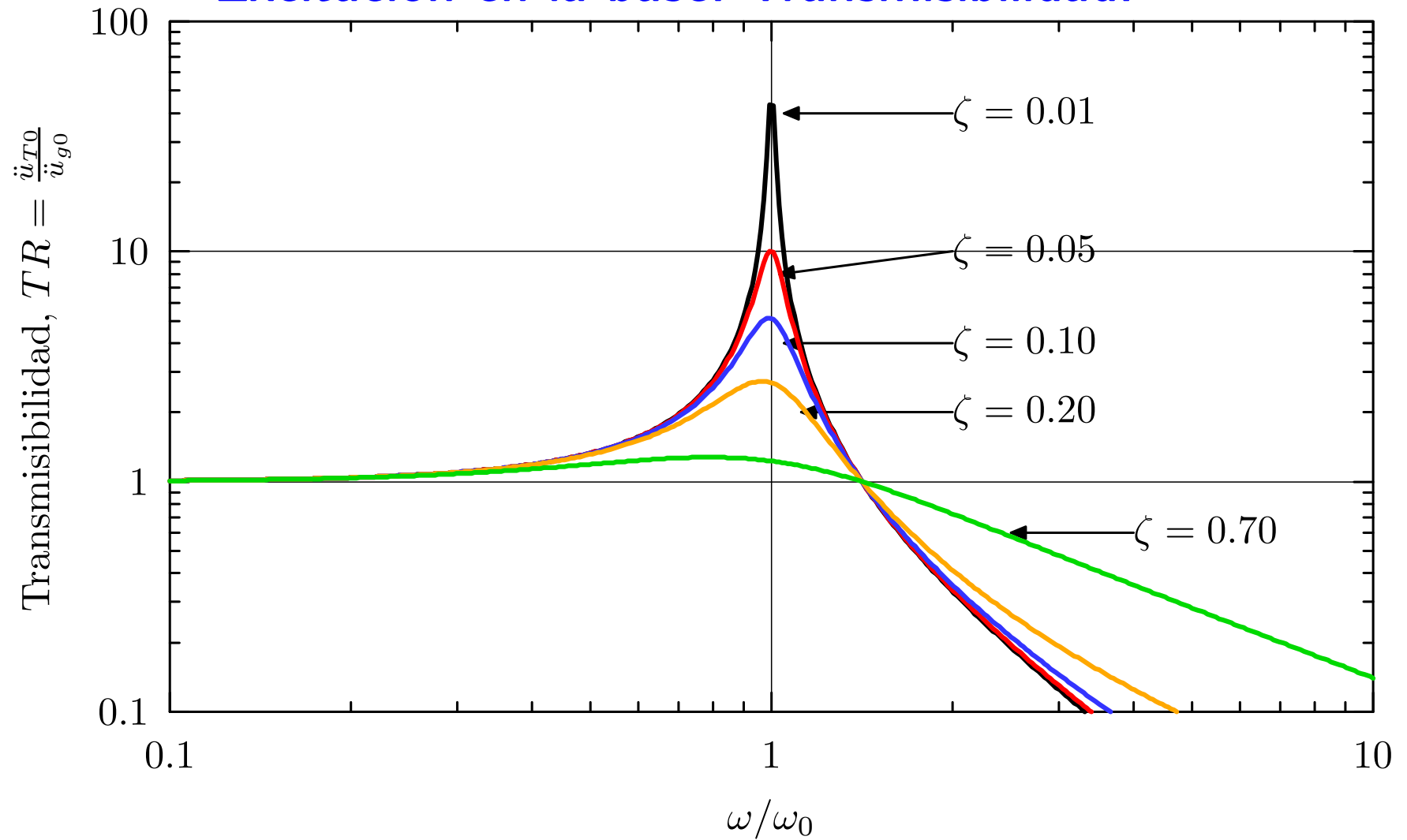
$$\ddot{u}_T(t) = \ddot{u}_b + \ddot{u} = \ddot{u}_{b0} [\text{sen}(\omega t) + \beta^2 A_d \text{sen}(\omega t - \phi_p)]; \quad \beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega}{\omega_0} .$$

◇ Se define la Transmisibilidad como $TR \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ddot{u}_{T0}}{\ddot{u}_{b0}}$;

$$F_{\text{max,base}} = m\ddot{u}_T = m\ddot{u}_{b0} \cdot TR; \quad TR = \sqrt{\frac{1 + 4\zeta^2\beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2}}$$

- $\beta = \frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow 0$: $TR \rightarrow 1$, $\ddot{u}_{T0} \approx \ddot{u}_{b0}$.
- $\beta = \frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow \infty$: $TR \rightarrow 0$, $\ddot{u}_{T0} \approx 0$.
- Si $\beta = \frac{\omega}{\omega_0} > \sqrt{2}$, **¡amortiguamiento aumenta respuesta!**

Excitación en la base. Transmisibilidad.

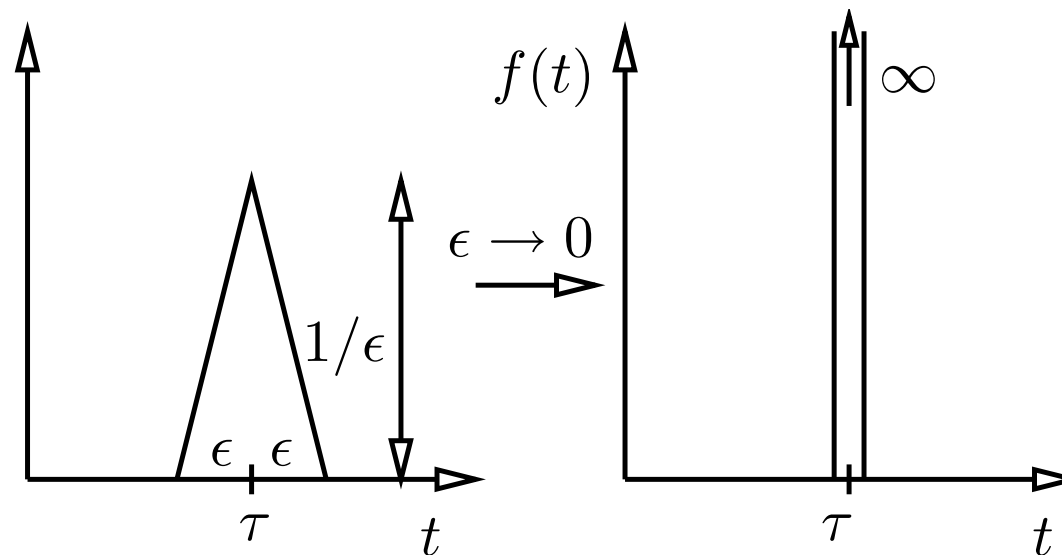


$\omega/\omega_0 \rightarrow 0 \Rightarrow TR = 1$; $\omega/\omega_0 \rightarrow \infty \Rightarrow TR = 0$ (aislam. base)

Impulso Instantáneo: δ de Dirac

♣ En $t = \tau$, se define mediante:

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & \forall t \neq \tau \\ \lim_{t \rightarrow \tau} \delta(t) = \infty; & \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) dt = 1 \end{cases} \quad (12)$$



♣ Prop. fundamental: $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\delta(t - \tau) dt = g(\tau)$

Respuesta a función impulso.

♣ Impulso de una fuerza: $I \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt = m(v_1 - v_0) = m\Delta v$.

♣ Fuerza impulsiva o impulso instantáneo: $f_I(t) = I\delta(t - \tau)$

♣ Sistema inicialmente en reposo ($v_0^- = 0$): impulso instantáneo equivale a velocidad inicial $v_0^+ = \Delta v_0 = I/m$, seguida de vibración libre.

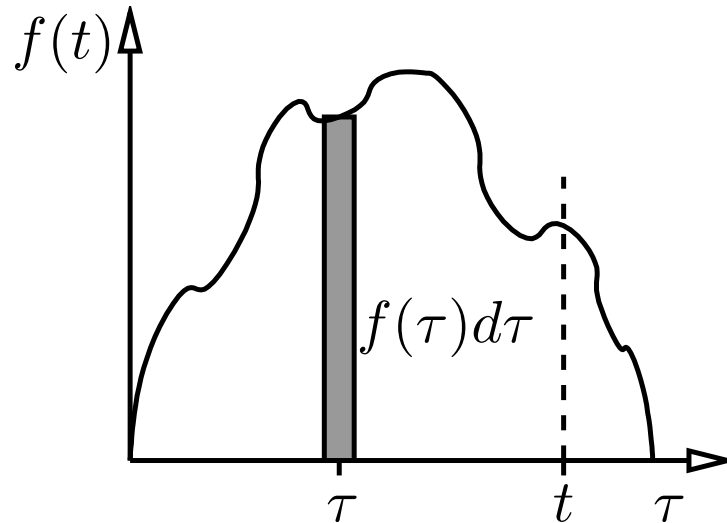
♣ Para impulso unidad ($I = 1$) en $t = \tau$, sustituyendo en vibración libre (3) las C.I. ($x_0 = 0, \dot{x}_0 = 1/m$) resulta

$A = \frac{1}{m\omega_D}, \phi = 0$:

$$h(t - \tau) = \frac{1}{m\omega_D} e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \text{sen}(\omega_D(t - \tau)) \quad (\forall t > \tau) \quad (13)$$

(función elemental de respuesta a un impulso unidad)

Respuesta en el tiempo: Convolución



- Efecto de $f(\tau)$ cualquiera: superposición lineal de impulsos elementales, $dI = f(\tau) d\tau$;
- Respuesta (en el instante t) a un impulso elemental (en el instante τ): $h(t - \tau) f(\tau) d\tau$

- Respuesta a $f(\tau)$ cualquiera: suma de impulsos elementales,

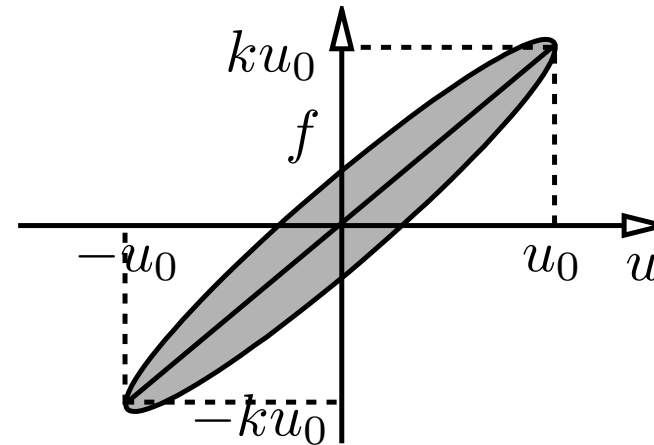
$$\begin{aligned}
 x(t) &= \int_{-\infty}^t h(t - \tau) f(\tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^t \frac{f(\tau)}{m\omega_D} e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \text{sen}(\omega_D(t - \tau)) d\tau
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

- Incluye respuesta en régimen transitorio

Ciclo de histéresis en amortiguamiento viscoso

♥ Energía disipada por las fuerzas internas: ($f_{\text{int}} = -ku - c\dot{u}$)
 en un ciclo del régimen permanente, $u(t) = u_0 \text{sen}(\omega t - \phi_p)$:

$$\begin{aligned}
 E_D &= \int_0^{2\pi/\omega} f_{\text{int}} \dot{u} dt \\
 &= -c\omega u_0^2 \int_0^{2\pi/\omega} [\cos^2(\omega t - \phi_p) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \text{sen}(2\omega t - 2\phi_p)] dt \\
 &= -\pi c\omega u_0^2 = -2\pi\zeta \frac{\omega}{\omega_0} k u_0^2
 \end{aligned}$$



♥ El resorte ($f_k = -ku$) no desarrolla trabajo.

♥ ¡ E_D depende de la frecuencia ω !

Amortiguamiento Histerético

♣ Buscamos E_D independiente de ω , más acorde con resultados experimentales en vibraciones estructurales.

♣ Tomamos $c' = \frac{\eta k}{\omega} \rightarrow f_D = -\frac{\eta k}{\omega} \dot{u}$:

$$E_D = -\pi\eta k u_0^2 = -2\pi\eta E_{S_0} \quad (\text{siendo } E_{S_0} = \frac{1}{2} k u_0^2) \quad (15)$$

♣ Más realista para materiales estructurales, pero más incómodo para resolver analíticamente.

♣ *Amortiguamiento viscoso equivalente*: centrado en $\omega = \omega_0$,

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_0} = \frac{\eta}{2\beta}; \quad \beta = 1 \quad \Rightarrow \quad \zeta_{eq} = \frac{\eta}{2} \quad (16)$$

Función de Respuesta Compleja (I)

♠ Carga definida como función compleja:

$$p(t) = p_0 e^{i\omega t} = p_0 (\cos(\omega t) + i \operatorname{sen}(\omega t)) \quad (17)$$

(sólo tiene validez física la parte real, $p_0 \cos(\omega t)$)

♠ Respuesta: $u(t) = u_0 e^{i\omega t} = u_0 (\cos(\omega t) + i \operatorname{sen}(\omega t))$, con $u_0 \in \mathbb{C}$.

♠ Derivando: $\dot{u} = i\omega u$; $\ddot{u} = -\omega^2 u$, luego:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad \Rightarrow \quad u_0 e^{i\omega t} \underbrace{(-m\omega^2 + ic\omega + k)}_{= Z(\omega), \text{ impedancia}} = p_0 e^{i\omega t} \quad (18)$$

♠ Otra forma de expresar $Z(\omega)$:

$$Z(\omega) = [(1 - \beta^2) + 2i\zeta\beta] k, \quad \left(\beta = \frac{\omega}{\omega_0} \right). \quad (19)$$

Función de Respuesta Compleja (II)

♠ *Función de Respuesta Compleja o Admitancia: $H(\omega) \in \mathbb{C}$,*

$$u_0 Z(\omega) = p_0 \quad \Rightarrow \quad u_0 = \frac{1}{Z(\omega)} p_0 = H(\omega) p_0$$

$$\boxed{H(\omega) = \frac{1/k}{(1 - \beta^2) + 2i\zeta\beta}} \quad (20)$$

♠ El módulo define la amplitud de la respuesta:

$$|H(\omega)| = \frac{1/k}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2}} = A_d \frac{1}{k} \quad (21)$$

Rigidez Compleja

◇ Sistema con amortiguamiento histerético, $c' = \eta k / \omega$.

En notación compleja,

$$\begin{aligned}
 m\ddot{u} + \left(\frac{\eta k}{\omega}\right) \overbrace{i\omega u}^{\dot{u}} + ku &= p_0 e^{i\omega t} \\
 m\ddot{u} + \underbrace{k(1 + i\eta)}_{\bar{k}} u &= p_0 e^{i\omega t}
 \end{aligned} \tag{22}$$

◇ *Rigidez compleja:* $\bar{k} = k(1 + i\eta)$

◇ En este caso, la función de respuesta compleja es:

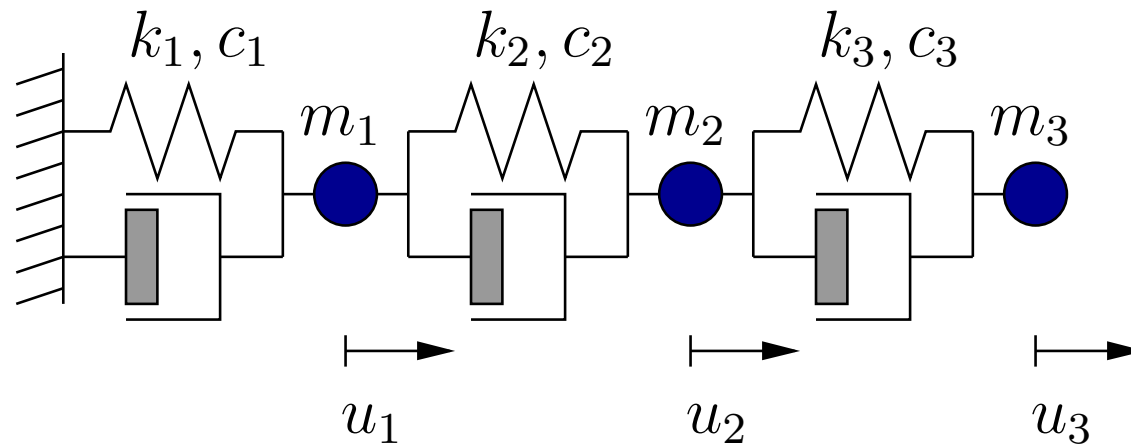
$$H(\omega) = \frac{1}{k(1 + i\eta) + m\omega^2} = \frac{1/k}{(1 - \beta)^2 + i\eta} \tag{23}$$

Sistemas con N G.D.L.: Ecuaciones

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{p}(t)\}$$

$$m_{ip}\ddot{u}_p + c_{ip}\dot{u}_p + k_{ip}u_p = f_i, \quad i, p = 1, \dots, N$$

Ejemplo:



$$[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}; \quad [\mathbf{C}] = \begin{pmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{pmatrix}; \quad [\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix}$$

Sistemas con N G.D.L.: Propiedades

♣ Matrices de coeficientes:

- $[\mathbf{M}]$: matriz de masa; simétrica y > 0 .
- $[\mathbf{C}]$: matriz de amortiguamiento viscoso; ≥ 0 .
- $[\mathbf{K}]$: matriz de rigidez; simétrica y > 0 .

♣ Linealidad:

si $\{\mathbf{u}_1\}$ solución de $\{\mathbf{f}_1\}$ y $\{\mathbf{u}_2\}$ solución de $\{\mathbf{f}_2\}$

⇓

$\alpha\{\mathbf{u}_1\} + \beta\{\mathbf{u}_2\}$ solución de $\alpha\{\mathbf{f}_1\} + \beta\{\mathbf{f}_2\}$

Vibraciones libres sin amortiguamiento

♣ Ecuaciones del movimiento (acopladas):

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{0}\}$$

$$m_{ip}\ddot{u}_p + k_{ip}u_p = 0, \quad i, p = 1, \dots, N$$

Buscamos solución del tipo $\{\mathbf{u}(t)\} = \Re(\{\mathbf{a}\}Ce^{i\omega t})$.

$$\begin{cases} \{\mathbf{a}\} \in \mathbb{R}^N; \\ C = D + Ei \in \mathbb{C}, \quad (D, E \in \mathbb{R}); \\ e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \operatorname{sen}(\omega t). \end{cases}$$

$$\Re(Ce^{i\omega t}) = D \cos(\omega t) - E \operatorname{sen}(\omega t) = B \cos(\omega t - \delta)$$

Análisis modal

Sustituyendo en la ecuación:

$$\begin{aligned}\{\dot{\mathbf{u}}\} &= i\omega\{\mathbf{a}\}Ce^{i\omega t}; & \{\ddot{\mathbf{u}}\} &= -\omega^2\{\mathbf{a}\}Ce^{i\omega t}; \\ (-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}])\{\mathbf{a}\}Ce^{i\omega t} &= \{\mathbf{0}\}\end{aligned}$$

Para que exista esta solución, $\{\mathbf{a}\}$ y ω deben cumplir:

$$(-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}])\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{0}\}$$

Se trata de un *problema de autovalores generalizado*, en función de $\lambda = \omega^2$:

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{a}\} = \lambda[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}\}$$

(Podría convertirse en un problema de autovalores *estándar*, del tipo $[\mathbf{A}]\{\mathbf{a}\} = \lambda\{\mathbf{a}\}$, mediante $[\mathbf{A}] = [\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{K}]$, pero esto llevaría a perder la propiedad de simetría.)

Análisis modal (2)

Condición para la existencia de solución no trivial ($\{\mathbf{a}\} \neq \{\mathbf{0}\}$)
(*ecuación característica*):

$$\det(-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]) = 0$$

♣ Polinomio de grado N en λ . Al ser $[\mathbf{M}]$ y $[\mathbf{K}]$ simétricas y > 0 , se obtienen N autovalores reales y positivos.

♣ Para cada autovalor λ_k , resolviendo el problema de autovalores, se obtiene un autovector asociado $\{\mathbf{a}_k\}$. Este queda definido a falta de una constante (si $\{\mathbf{a}_k\}$ es autovector, $\mu\{\mathbf{a}_k\}$ también lo es).

♣ Se denomina:

- $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$: *frecuencia propia*;
- $\{\mathbf{a}_k\}$: *modo normal de vibración*.

Análisis modal (3)

♣ La solución general es combinación lineal de los N modos:

$$\{\mathbf{u}(t)\} = \sum_{k=1}^N \{\mathbf{a}_k\} B_k \cos(\omega_k t - \delta_k),$$

donde (B_k, δ_k) son $2N$ constantes que se obtienen con las $2N$ condiciones iniciales $(\{\mathbf{u}_0\}, \{\dot{\mathbf{u}}_0\})$.

♠ *Ortogonalidad* de los modos normales de vibración:

«Modos correspondientes a frecuencias propias distintas son *ortogonales* respecto de la matriz de masa»

$$\{\mathbf{a}_k\}^T [\mathbf{M}] \{\mathbf{a}_l\} = 0 \quad \text{si } k \neq l.$$

♠ *Masa modal*:

$$M_k \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_k\}^T [\mathbf{M}] \{\mathbf{a}_k\} \neq 0 \quad (= 1 : \text{«normalizados»})$$

Análisis modal (4)

♠ Definimos la *matriz modal* como aquella que tiene por filas los modos normales de vibración:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \{\mathbf{a}_1\}^T \\ \{\mathbf{a}_2\}^T \\ \dots \\ \{\mathbf{a}_N\}^T \end{bmatrix} = [a_{ij}] \rightarrow \begin{cases} \text{modo } i \\ \text{comp. } j \end{cases}$$

♠ Diagonaliza simultáneamente $[\mathbf{M}]$ y $[\mathbf{K}]$:

$$[\mathbf{A}][\mathbf{M}][\mathbf{A}]^T = \text{diag}(M_1, M_2, \dots, M_N)$$

$$[\mathbf{A}][\mathbf{K}][\mathbf{A}]^T = \text{diag}(\omega_1^2 M_1, \omega_2^2 M_2, \dots, \omega_N^2 M_N)$$

♠ Otros autores (Clough, Chopra, Humar) usan $[\Phi] = [\mathbf{A}]^T$

Análisis modal (5)

♠ La matriz modal permite un cambio de variables, de las coordenadas *geométricas* ($\{\mathbf{u}\}$) a las coordenadas *normales* ($\{\mathbf{x}\}$). Estas no son más que las amplitudes, variables con el tiempo, de los modos de vibración:

$$\begin{aligned}\{\mathbf{u}(t)\} &= \{\mathbf{a}_1\}x_1(t) + \{\mathbf{a}_2\}x_2(t) + \dots + \{\mathbf{a}_N\}x_N(t) \\ &= [\mathbf{A}]^T \{\mathbf{x}(t)\}.\end{aligned}$$

♠ Cambiando a las coordenadas normales y premultiplicando por $[\mathbf{A}]$, las ecuaciones quedan desacopladas:

$$M_k \ddot{x}_k + \omega_k^2 M_k x_k = 0, \quad k = 1, \dots, N$$

(N ecuaciones independientes de 1 g.d.l.)

Análisis modal (6)

♠ Descomposición modal espectral de \mathbf{M} , \mathbf{K}

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{M_k} (\mathbf{M}\mathbf{a}_k)(\mathbf{a}_k^T \mathbf{M}); \quad \mathbf{K} = \sum_{k=1}^N \frac{\omega_k^2}{M_k} (\mathbf{M}\mathbf{a}_k)(\mathbf{a}_k^T \mathbf{M})$$

♠ Descomposición modal espectral de \mathbf{M}^{-1} , \mathbf{K}^{-1}

$$\mathbf{M}^{-1} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{M_k} \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^T; \quad \mathbf{K}^{-1} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\omega_k^2 M_k} \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^T$$

Oscilaciones libres con amortiguamiento

◇ Sistema de ecuaciones (acopladas):

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{0}\}$$

$$m_{ip}\ddot{u}_p + c_{ip}\dot{u}_p + k_{ip}u_p = 0, \quad i, p = 1, \dots, N$$

◇ Caso general: $[\mathbf{C}]$ no se diagonaliza simultáneamente con $[\mathbf{M}]$ y $[\mathbf{K}]$.

◇ *Amortiguamiento clásico*: $[\mathbf{C}]$ diagonalizable simultáneamente con $[\mathbf{M}]$ y $[\mathbf{K}]$

$$[\mathbf{A}][\mathbf{M}][\mathbf{A}]^T = \text{diag}(M_1, M_2, \dots, M_N);$$

$$[\mathbf{A}][\mathbf{C}][\mathbf{A}]^T = \text{diag}(2\zeta_1\omega_1 M_1, 2\zeta_2\omega_2 M_2, \dots, 2\zeta_N\omega_N M_N);$$

$$[\mathbf{A}][\mathbf{K}][\mathbf{A}]^T = \text{diag}(\omega_1^2 M_1, \omega_2^2 M_2, \dots, \omega_N^2 M_N)$$

Amortiguamiento Clásico

◇ Resultan N ecuaciones desacopladas (de 1 g.d.l. con amortiguamiento):

$$M_k \ddot{x}_k + 2\zeta_k \omega_k M_k \dot{x}_k + \omega_k^2 M_k x_k = 0, \quad k = 1, \dots, N$$

◇ Solución general: oscilaciones amortiguadas

$$\{\mathbf{u}(t)\} = \sum_{k=1}^N \{\mathbf{a}_k\} B_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos(\omega_{D,k} t - \delta_k).$$

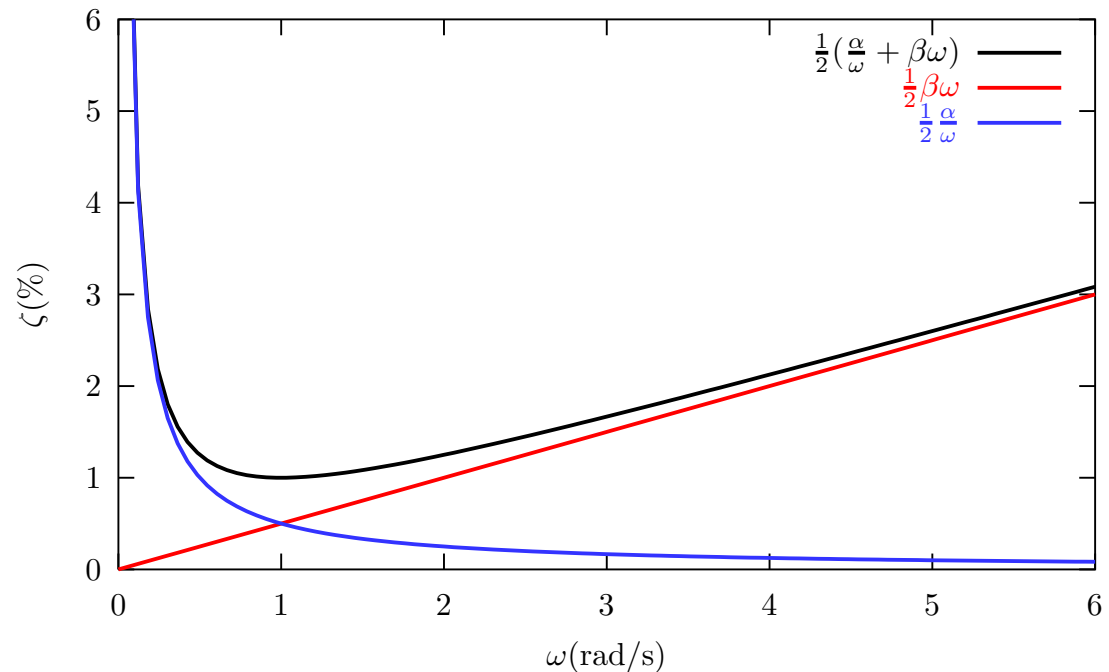
Las $2N$ constantes (B_k, δ_k) se obtienen a partir de las $2N$ condiciones iniciales

Amortiguamiento Clásico (2)

◇ *Amortiguamiento de Rayleigh*: ($[C] = \alpha[M] + \beta[K]$):

$$[A][C][A]^T = \alpha[A][M][A]^T + \beta[A][K][A]^T$$

$$\zeta_k = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_k} + \beta\omega_k \right)$$



◇ Puede elegirse el valor del amortiguamiento en dos modos:
 $(\omega_a, \zeta_a), (\omega_b, \zeta_b) \Rightarrow (\alpha, \beta)$.

Amortiguamiento Clásico (3)

- ◇ Amortiguamiento modal prefijado para cada modo: (ω_k, ζ_k) .
- ◇ La matriz se construye mediante la descomposición espectral modal:

$$\mathbf{C} = \sum_{k=1}^N \frac{2\zeta_k \omega_k}{M_k} (\mathbf{M} \mathbf{a}_k) (\mathbf{a}_k^T \mathbf{M})$$

Se comprueba que

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{C} \mathbf{a}_j = \delta_{ij} 2\zeta_i \omega_i M_i$$

Vibraciones forzadas

♥ Sistema de ecuaciones (acopladas):

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{p}(t)\}$$

$$m_{ip}\ddot{u}_p + c_{ip}\dot{u}_p + k_{ip}u_p = p_i(t), \quad i, p = 1, \dots, N$$

♥ Solución general: sol. general homogénea + sol. particular completa:

$$\{\mathbf{u}(t)\} = \{\mathbf{u}_h(t)\} + \{\mathbf{u}_p(t)\}$$

♥ Sistema con amortiguamiento: $\lim_{t \rightarrow \infty} \{\mathbf{u}_h(t)\} = 0$.

♥ *Régimen permanente* (para excitación periódica):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{\mathbf{u}_p(t)\}$$

Vibraciones forzadas (2)

♥ Suponemos excitación definida como

$$\{\mathbf{p}(t)\} = \{\mathbf{s}\}p(t)$$

($\{\mathbf{s}\}$ vector de excitación; $p(t)$ variación temporal de la excitación)

♥ Realizando la descomposición modal:

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{A}]^T \{\mathbf{x}\} = \sum_{k=1}^N \{\mathbf{a}_k\} x_k(t);$$

$$[\mathbf{A}][\mathbf{M}][\mathbf{A}]^T \{\ddot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{A}][\mathbf{C}][\mathbf{A}]^T \{\dot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{A}][\mathbf{K}][\mathbf{A}]^T \{\mathbf{x}\} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{s}\}p(t)$$

Vibraciones forzadas (3)

◇ resultan N ecuaciones desacopladas,

$$M_k \ddot{x}_k + 2\zeta_k \omega_k M_k \dot{x}_k + \omega_k^2 M_k x_k = \underbrace{a_{kp} s_p p(t)}_{P_k(t)} \quad k = 1, \dots, N$$

◇ Dividiendo por las masas modales M_k ,

$$\ddot{x}_k + 2\zeta_k \omega_k \dot{x}_k + \omega_k^2 x_k = \underbrace{\frac{1}{M_k} a_{kp} s_p p(t)}_{\Gamma_k} \quad k = 1, \dots, N \quad (24)$$

◇ $P_k(t)$ se denominan *fuerzas modales*, y los términos $\Gamma_k = \frac{1}{M_k} \{\mathbf{a}_k\}^T \{\mathbf{s}\}$ se denominan *coeficientes de participación modal* (Coeficientes de las fuerzas modales por ud. de masa modal). Determinan las amplitudes modales $x_k(t)$. No ofrecen una definición intrínseca, *dependen del tipo de normalización* elegida para los modos de vibración.

Descomposición modal de la excitación

♠ El vector de excitación $\{\mathbf{s}\}$ se puede descomponer como suma

$$\{\mathbf{s}\} = \sum_{n=1}^N \{\mathbf{s}_n\} = \sum_{n=1}^N \Gamma_n[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_n\},$$

♠ Es inmediato comprobar que la componente $\{\mathbf{s}_n\}$ sólo produce respuesta para el modo n (por la ortogonalidad modal, $\{\mathbf{a}_m\}^T \{\mathbf{s}_n\} = \Gamma_n \{\mathbf{a}_m\}^T [\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_n\} = 0$ si $m \neq n$).

♠ La descomposición en las componentes modales $\{\mathbf{s}_n\}$ no depende de la normalización elegida, es *intrínseca*.

♠ La componente del modo n de la excitación produce la componente modal n del desplazamiento respuesta:

$$\{\mathbf{s}_n\}p(t) = \Gamma_n[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_n\}p(t) \quad \Longrightarrow \quad \{\mathbf{u}_n(t)\} = \{\mathbf{a}_n\}x_n(t)$$

Descomposición modal de la excitación (2)

♥ *Fuerzas estáticas equivalentes*: aplicadas de forma estática a la estructura, producen los mismos esfuerzos que la excitación dinámica

$$\begin{aligned}
 \{\mathbf{f}_n(t)\} &= [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}_n\} = [\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_n\}x_n(t) \\
 &= \omega_n^2[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_n\}x_n(t) \\
 &= \frac{\omega_n^2}{\Gamma_n}\{\mathbf{s}_n\}x_n(t)
 \end{aligned} \tag{25}$$

♥ Los valores de las amplitudes modales $x_n(t)$ se calculan de las ecuaciones modales de 1 G.D.L. (24):

$$\ddot{x}_n + 2\zeta_n\omega_n\dot{x}_n + \omega_n^2x_n = \Gamma_np(t) \quad n = 1, \dots, N$$

Descomposición modal de la excitación (3)

♣ El máximo desplazamiento obtenido de estas ecuaciones modales, como se vió en (8), puede determinarse como:

$$x_{n,0} = x_n^{\text{est}} A_d(\omega_n) \quad (26)$$

♣ Si $p_0 = \text{máx}[p(t)]$, el desplazamiento estático es: $x_n^{\text{est}} = \frac{\Gamma_n p_0}{\omega_n^2}$

♣ El factor de amplificación dinámico $A_d(\omega_n)$ depende de la variación temporal de la excitación $p(t)$ y de la frecuencia propia del modo considerado, ω_n . Para el caso particular de una excitación armónica pura de frecuencia ω , vimos que su valor es (en función de $\beta = \omega/\omega_n$):

$$A_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2}}.$$

Descomposición modal de la excitación (4)

- ◇ Suponemos ahora una determinada componente de la respuesta que interesa determinar, $r(t)$ (p. ej. un esfuerzo cortante, un flector, el desplazamiento de un punto determinado, etc.).
- ◇ El valor de $r(t)$ podrá ser determinado a partir de las fuerzas estáticas equivalentes (25) (con dependencia lineal de las mismas). La componente de $r(t)$ debida a la componente n de la excitación —es decir, $\{\mathbf{s}_n\}p(t)$ — es $r_n(t)$, siendo $r(t) = \sum_{n=1}^N r_n(t)$. Sea r_n^{est} la respuesta estática (debida a $\{\mathbf{s}_n\} = \Gamma_n[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_n\}$). Considerando (25)₃ y la linealidad de la respuesta, se verifica:

$$r_n(t) = r_n^{\text{est}} \frac{\omega_n^2}{\Gamma_n} x_n(t) \quad (27)$$

Descomposición modal de la excitación (5)

♠ Sea $r_{n,0}$ el máximo valor de la respuesta debida al modo n , que provendrá de la máxima amplitud modal $x_{n,0}$ (26).

Sustituyendo en la ecuación (27),

$$r_{n,0} = r_n^{\text{est}} \frac{\omega_n^2}{\Gamma_n} \underbrace{\left(\frac{\Gamma_n p_0}{\omega_n^2} A_d(\omega_n) \right)}_{x_{n,0} = x_n^{\text{est}} A_d(\omega_n)} = r_n^{\text{est}} p_0 A_d(\omega_n). \quad (28)$$

♠ La respuesta máxima queda definida como producto de:

- El factor constante p_0 (máximo de $p(t)$);
- r_n^{est} , respuesta estática a la comp. $\{\mathbf{s}_n\} = \Gamma_n [\mathbf{M}] \{\mathbf{a}_n\}$;
- $A_d(\omega_n)$, amplificación dinámica del modo n ;
esta amplificación será ≈ 1 para ω_n altos, $\gg 1$ para ω_n resonantes, y ≈ 0 para ω_n bajos.

Descomposición modal de la excitación (6)

♥ Teniendo en cuenta la respuesta estática total

$r^{\text{est}} = \sum_{n=1}^N r_n^{\text{est}}$, cabe definir unos *factores de contribución modal* (Chopra, 1995):

$$\bar{r}_n = \frac{r_n^{\text{est}}}{r^{\text{est}}}. \quad (29)$$

♥ Estos factores de contribución modal \bar{r}_n definen la contribución estática de cada modo en la respuesta estructural para la componente que se pretende calcular, $r(t)$.

A diferencia de los denominados *factores de participación modal* Γ_n , no dependen de la normalización que se haya llevado a cabo en los modos. Su suma es la unidad,

$$\sum_{n=1}^N \bar{r}_n = 1.$$

Vibraciones por movimiento de la base

♠ Descomposición mov. base + mov. relativo:
tivo:

$$\{\mathbf{u}_T\} = \{\mathbf{u}_b\} + \{\mathbf{u}\}$$

$$\{\mathbf{u}_b\} = \{\boldsymbol{\iota}\}u_b(t)$$

♠ $\{\boldsymbol{\iota}\}$: (vector de influencia).

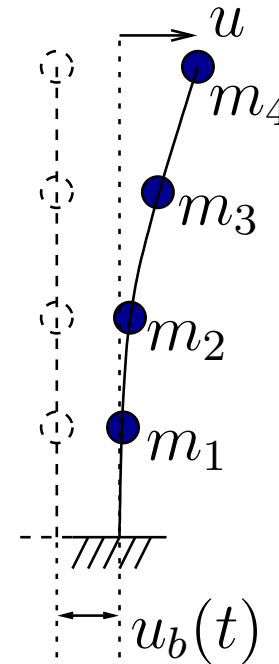
En este caso (2 g.d.l. / nodo),

$$\{\boldsymbol{\iota}\} = \{\boldsymbol{\iota}^x\} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)^T$$

♠ Las ecuaciones resultan:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = -[\mathbf{M}]\{\boldsymbol{\iota}\}\ddot{u}_b(t)$$

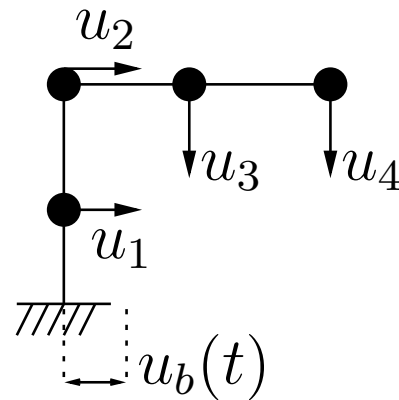
$$m_{ip}\ddot{u}_p + c_{ip}\dot{u}_p + k_{ip}u_p = -m_{ip}\iota_p\ddot{u}_b(t), \quad i, p = 1, \dots, n$$



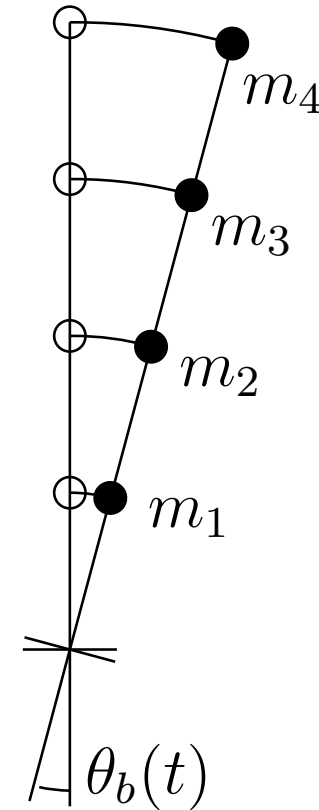
Vibraciones por movimiento de la base (2)

♠ *Vectores de influencia:*

Desplazamientos estáticos en cada GDL para un movimiento unitario de la base. Si el apoyo es isostático, son simplemente los desplazamientos cinemáticos.



$$\{\boldsymbol{v}^x\}^T = (1, 1, 0, 0)$$



$$\{\boldsymbol{v}^\theta\}^T = (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

Vibraciones por movimiento de la base (3)

♣ Vectores de influencia en caso general (3D, con 6 GDL por nodo): para cada nodo I ,

$$\{\boldsymbol{\nu}_I^x\}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\boldsymbol{\nu}_I^y\}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\boldsymbol{\nu}_I^z\}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\boldsymbol{\nu}_I^{\theta_x}\}^T = \begin{pmatrix} 0 & -z_I & y_I & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\boldsymbol{\nu}_I^{\theta_y}\}^T = \begin{pmatrix} z_I & 0 & -x_I & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\boldsymbol{\nu}_I^{\theta_z}\}^T = \begin{pmatrix} -y_I & x_I & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(siendo (x_I, y_I, z_I) las coordenadas relativas del nodo I respecto a la base).

Vibraciones por movimiento de la base (4)

♠ Cortante Q_x en la base, como respuesta a un movimiento impuesto (sísmico) en dirección x de la misma: se obtiene también mediante el vector de influencia $\{\boldsymbol{\iota}^x\}$:

$$Q_x = \{\mathbf{s}\}^T \{\boldsymbol{\iota}^x\} \quad (30)$$

♠ Componente modal n de cortante Q_x :

$$Q_{x,n} = \{\mathbf{s}_n\}^T \{\boldsymbol{\iota}^x\} = \Gamma_n^x \{\mathbf{a}_n\}^T [\mathbf{M}] \{\boldsymbol{\iota}^x\}; \quad (31)$$

teniendo en cuenta la definición de Γ_n^x , para la excitación que nos concierne: $\Gamma_n^x = \frac{1}{M_n} \{\mathbf{a}_n\}^T \{\mathbf{s}\} = \frac{1}{M_n} \{\mathbf{a}_n\}^T [\mathbf{M}] \{\boldsymbol{\iota}^x\}$, resulta

$$Q_{x,n} = \Gamma_n^x (\Gamma_n^x M_n) = \boxed{(\Gamma_n^x)^2 M_n \stackrel{\text{def}}{=} M_{\text{eff},n}^x} \quad (32)$$

Vibraciones por movimiento de la base (5)

- ◇ La *Masa efectiva* del modo n en dirección x , $M_{\text{eff},n}^x$, define la contribución de dicho modo al cortante en la base en dicha dirección, para una aceleración unitaria de la base.
- ◇ La definición realizada de masa efectiva es *intrínseca*, independiente de cómo se hayan normalizado los modos.
- ◇ La suma de las masas efectivas para todos los modos es la masa total de la estructura (salvo la masa asignada a los nodos de la base):

$$\sum_{n=1}^N M_{\text{eff},n}^x = M^x.$$

- ◇ Por tanto, si el cortante en la base es una variable relevante, el número de modos deberá ser tal que su masa efectiva sea suficientemente próxima a la total (p.ej. 90 %).

Vibraciones por movimiento de la base (6)

♣ Momento en la base M_θ (caso 2D), debido a movimiento x de la base ($\{\mathbf{s}\} = [\mathbf{M}]\{\boldsymbol{\iota}^x\}$):

$$M_\theta = \{\mathbf{s}\}^T \{\boldsymbol{\iota}^\theta\}$$

♣ La componente debida al modo n es

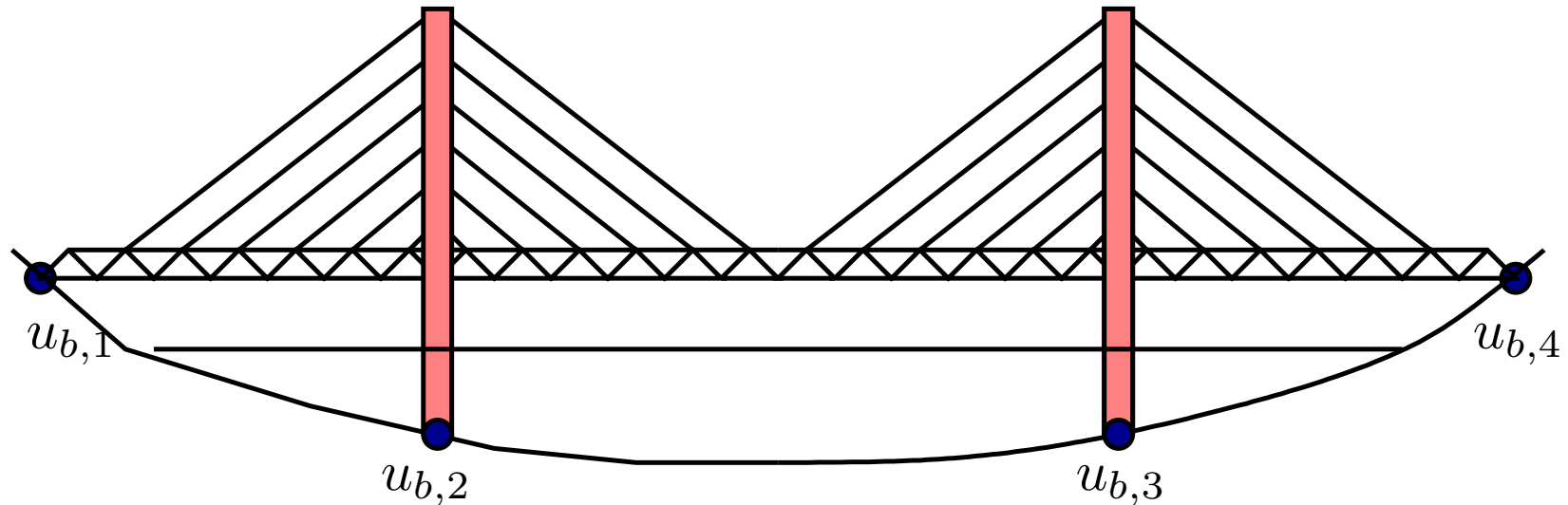
$$\begin{aligned} M_{\theta,n} &= \{\mathbf{s}_n\}^T \{\boldsymbol{\iota}^\theta\} = \Gamma_n^x \{\mathbf{a}_n\}^T [\mathbf{M}] \{\boldsymbol{\iota}^\theta\} \\ &= \frac{1}{M_n} (\{\mathbf{a}_n\}^T \{\mathbf{s}\}) \{\mathbf{a}_n\}^T [\mathbf{M}] \{\boldsymbol{\iota}^\theta\} \\ &= \frac{1}{M_n} (\{\mathbf{a}_n\}^T [\mathbf{M}] \{\boldsymbol{\iota}^x\}) (\{\mathbf{a}_n\}^T [\mathbf{M}] \{\boldsymbol{\iota}^\theta\}) \\ &= M_n \Gamma_n^x \Gamma_n^\theta \end{aligned}$$

♣ Altura efectiva modo n : $h_{\text{eff},n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M_{\theta,n}}{Q_{x,n}} = \frac{\Gamma_n^\theta}{\Gamma_n^x}$.

Excitación en apoyos múltiples

◇ Suponemos excitación sísmica distinta en N_b apoyos:

$$\{\mathbf{u}_b\} = (u_{b,1}, u_{b,2}, \dots, u_{b,N_b})^T$$



◇ Particionamos vector de desplazamientos: $\begin{Bmatrix} \mathbf{u}^T \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix}$,

siendo \mathbf{u}^T los desplazamientos (*totales*) en los N g.d.l. estructurales, y \mathbf{u}_b los N_b desplazamientos sísmicos impuestos.

Excitación en apoyos múltiples (2)

♠ Ecuación matricial (particionada):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{M}_b \\ \mathbf{M}_b^T & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}^T \\ \ddot{\mathbf{u}}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{C}_b \\ \mathbf{C}_b^T & \mathbf{C}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}^T \\ \dot{\mathbf{u}}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_b \\ \mathbf{K}_b^T & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^T \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_b(t) \end{Bmatrix} \quad (33)$$

♠ Descomposición de desplazamientos estáticos + dinámicos:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}^T \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

Excitación en apoyos múltiples (3)

♣ \mathbf{u}^s : desplaz. estáticos en estructura debidos a mov. impuesto $\mathbf{u}_b(t)$. Deben verificar:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_b \\ \mathbf{K}_b^T & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_b^s \end{Bmatrix} \quad (34)$$

($\mathbf{p}_b^s = \mathbf{0}$ si los apoyos son isostáticos).

♣ Desarrollando primera fila de expresión matricial anterior:

$$\mathbf{K}\mathbf{u}^s + \mathbf{K}_b\mathbf{u}_b = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}^s = -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}_b\mathbf{u}_b = \boldsymbol{\iota}\mathbf{u}_b. \quad (35)$$

♣ Matriz de influencia $\boldsymbol{\iota}$ ($N \times N_b$): una columna por cada grado de libertad impuesto, $[\boldsymbol{\iota}] = [\boldsymbol{\iota}_1 | \boldsymbol{\iota}_2 | \dots | \boldsymbol{\iota}_{N_b}]$:

$$\mathbf{u}^s(t) = \sum_{l=1}^{N_b} \boldsymbol{\iota}_l \mathbf{u}_{b,l}(t) = \boldsymbol{\iota} \mathbf{u}_b(t). \quad (36)$$

Excitación en apoyos múltiples (4)

♥ Desarrollando primera fila de expresión matricial (33):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} \\ = \underbrace{-(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^s + \mathbf{M}_b\ddot{\mathbf{u}}_b) - (\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^s + \mathbf{C}_b\dot{\mathbf{u}}_b)}_{= \mathbf{p}_{\text{eff}}(t)} - \underbrace{(\mathbf{K}\mathbf{u}^s + \mathbf{K}_b\mathbf{u}_b)}_{= \mathbf{0}} \end{aligned} \quad (37)$$

♥ Teniendo en cuenta que las fuerzas de amortiguamiento son (generalmente) pequeñas, y que la masa asociada a los nodos de las bases móviles es pequeña, la fuerza sísmica efectiva puede simplificarse:

$$\mathbf{p}_{\text{eff}}(t) = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^s = -\mathbf{M}\boldsymbol{\iota}\ddot{\mathbf{u}}_b(t) = -\sum_{l=1}^{N_b} \mathbf{M}\boldsymbol{\iota}_l\ddot{u}_{b,l}(t). \quad (38)$$