

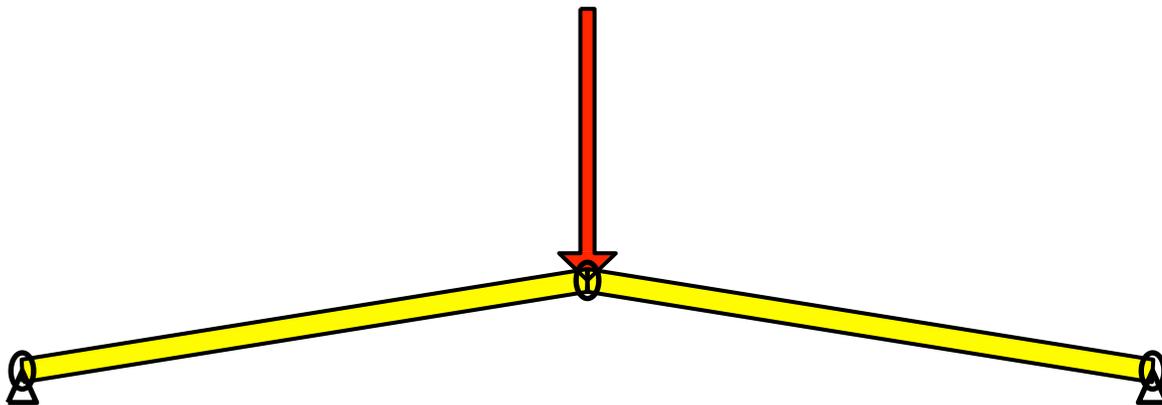
```
> restart:
```

## Pórtico triangular rebajado sometido a una carga vertical

Jose M.<sup>a</sup> Goicolea Ruigomez  
actualizado: 14/02/2014

```
Datos numéricos (SI): datos:={L=2,h=.2,E=2E11,A=.0001}:
```

```
> with(plottools):  
> b:=subs(datos,sqrt(L^2-h^2)): h[0]:=subs(datos,h):  
> plots[display] (  
  arrow([-b,0],[0,h[0]],.05,.05,0,color=yellow),  
  arrow([0,h[0]],[b,0],.05,.05,0,color=yellow),  
  circle([-b,0],.04,color=black,thickness=2),  
  circle([0,h[0]],.04,color=black,thickness=2),  
  circle([b,0],.04,color=black,thickness=2),  
  curve([[-(b+.05),-.07],[-(b-.05),-.07],[-b,0],[-(b+.05),-.07]],  
        color=black,thickness=2),  
  curve([[b+.05,-.07],[b-.05,-.07],[b,0],[b+.05,-.07]],  
        color=black,thickness=2),  
  arrow([0,.8],[0,h[0]],.05,h[0],.1,color=red),  
  axes=NONE,scaling=UNCONSTRAINED);
```



Longitud de las barras  $l$ , altura  $h$ , carga vertical en el ábside  $P$ , módulo de rigidez de las barras

$$k = \frac{EA}{l}$$

### Solucion exacta

Expresión "exacta" de la Energía potencial total (inc. energía elástica interna y energía potencial de cargas externas) en función del desplazamiento vertical  $u$  del ábside (positivo descendente):  $k := \frac{EA}{L}$

$$k := \frac{EA}{L} \quad (1)$$

```
> V:=u->2*1/2*k*(sqrt(L^2-2*h*u+u^2)-L)^2-P*u;
```

$$V := u \rightarrow k \left( \sqrt{L^2 - 2hu + u^2} - L \right)^2 - Pu \quad (2)$$

Obtenemos ahora las curvas de equilibrio  $Q$  en cada caso

```
> Q:=u->solve(diff(V(u),u),P):
```

Asignamos los valores numéricos para su representación gráfica

```
> assign(datos);
```

```
> u[max]:=2.2*h:
```

Rango de valores para la gráfica

```

> Q|min:=minimize(Q(u),u=0..u[max]);
Q|max:=maximize(Q(u),u=0..u[max]);
      Qmin := -7736.741293
      Qmax := 10525.28020

```

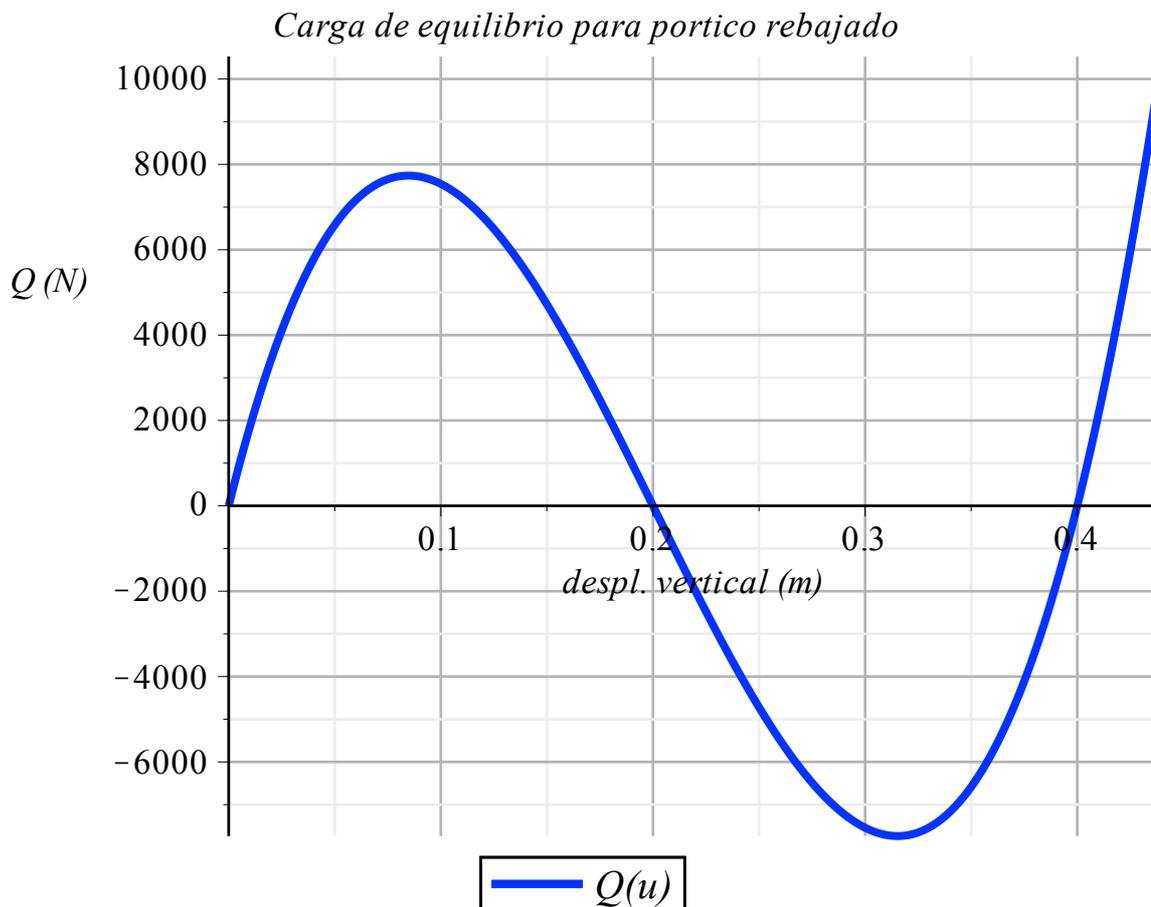
(3)

Dibujo:

```

> plot( Q(u),u=0..u[max] ,Q=Q|min..Q|max,
color=blue,thickness=3,gridlines=true,
title=`Carga de equilibrio para portico rebajado`,
labels=[`despl. vertical (m)`, `Q (N)`],
legend=`Q(u)`);

```



## Soluciones Aproximadas

```

> unassign('L','h','E','A');
> readlib(mtaylor);

```

Desarrollamos en serie el potencial, mediante la función "mtaylor" (se puede desarrollar en serie mediante la instrucción "series", pero en la expresión resultante aparece un término de orden que no sabemos quitar):

Vamos a comparar tres aproximaciones distintas.

La primera resulta de un desarrollo de  $V$  de orden 2 en  $u$

```

> assume(L>0);
> V2(u):=mtaylor(V(u),{u},3);

```

$$V2(u) := -Pu + \frac{EA h^2 u^2}{L^3}$$

(4)

La segunda resulta de un desarrollo de  $V$  de orden 4 en  $u$

```

> V4(u):=mtaylor(V(u),{u},5);

```

La tercera resulta del cálculo de  $V$  a partir del desarrollo de primer orden de la longitud deformada,

$$\sqrt{l^2 + u^2 + 2 h u} = \sqrt{l^2 + x} \text{ de orden 1 en } x = u^2 + 2 h u$$

> **l\_1:=x->sqrt(L^2+x);**

$$l_1 := x \rightarrow \sqrt{L^2 + x} \quad (5)$$

> **dl:=subs(x=u^2-2\*h\*u,mtaylor(l\_1(x)-L,x,2));**

$$dl := \frac{1}{2} \frac{-2 h u + u^2}{L} \quad (6)$$

> **Va(u):=expand(k\*dl^2)-P\*u;**

$$Va(u) := \frac{EA h^2 u^2}{L^3} - \frac{EA h u^3}{L^3} + \frac{1}{4} \frac{EA u^4}{L^3} - P u \quad (7)$$

Obtenemos ahora las carpas de equilibrio  $Q$  en cada caso

> **Q2:=u->solve(diff(V2(u),u),P);**

$$Q2 := u \rightarrow \text{solve}\left(\frac{d}{du} V2(u), P\right) \quad (8)$$

> **Q4:=u->solve(diff(V4(u),u),P);**

$$Q4 := u \rightarrow \text{solve}\left(\frac{d}{du} V4(u), P\right) \quad (9)$$

> **Qa:=u->solve(diff(Va(u),u),P);**

$$Qa := u \rightarrow \text{solve}\left(\frac{d}{du} Va(u), P\right) \quad (10)$$

Asignamos los valores numéricos para su representación gráfica

> **assign(datos);**

> **u[max]:=2.2\*h;**

Rango de valores para la gráfica

Máximos:

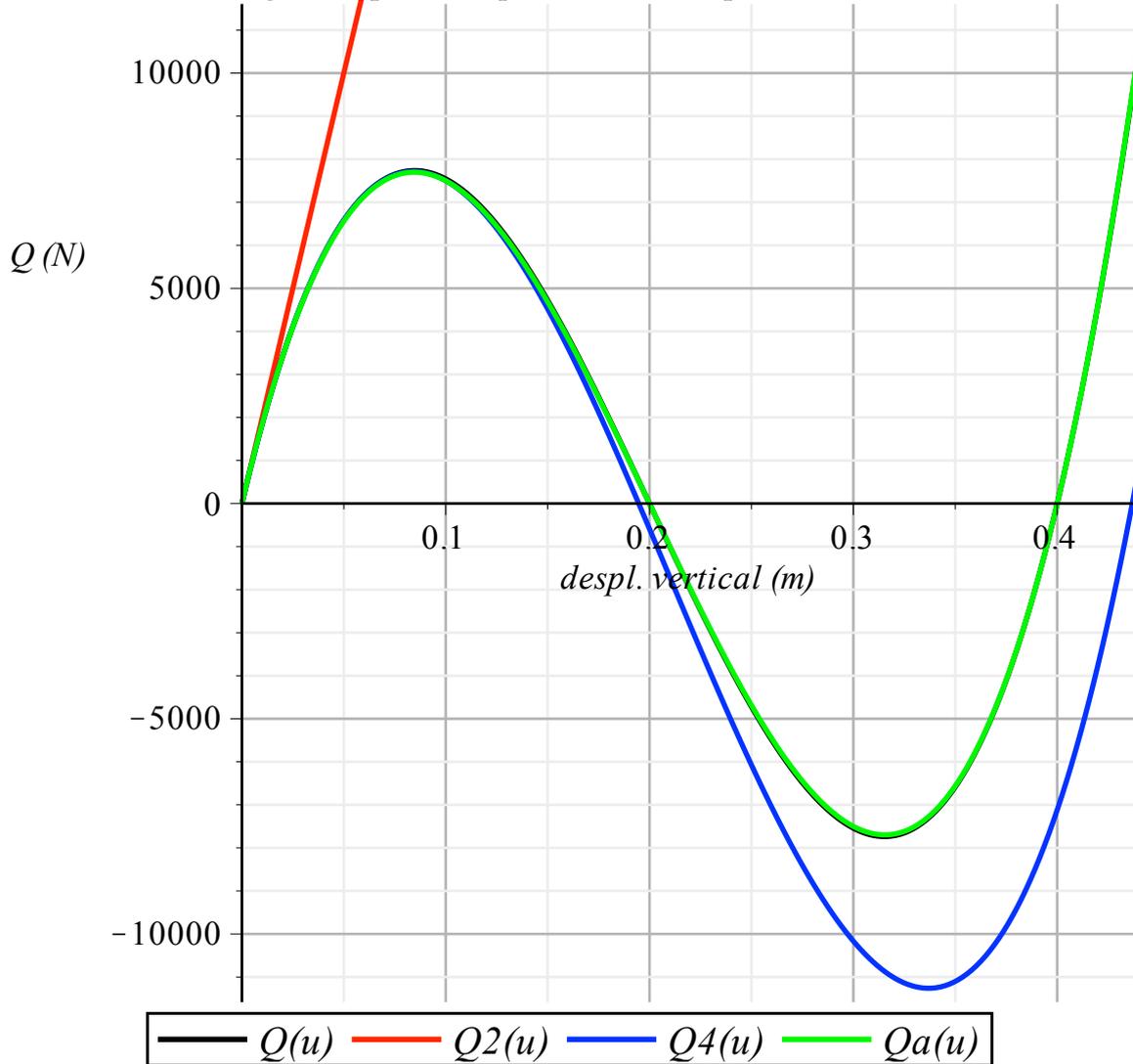
> **#eval(maximize(Qa(u),u=0..2\*h));**

> **Q|max:=eval(maximize(Q(u),u=0..2\*h));**

$$Q_{max} := 7736.741293 \quad (11)$$

> **plot([Q(u), Q2(u), Q4(u), Qa(u)], u=0..u[max], Q=1.5\*Q|max..1.5\*Q|max, color=[black, red, blue, green], thickness=2, gridlines=true, title=`Carga de equilibrio para distintas aproximaciones`, labels=[`despl. vertical (m)`, `Q (N)`], legend=[`Q(u)`, `Q2(u)`, `Q4(u)`, `Qa(u)`]);**

Carga de equilibrio para distintas aproximaciones



Observamos cómo el valor real de la carga de equilibrio, resultante de la expresión exacta del potencial, muestra dos puntos críticos (valor nulo de  $\frac{\partial}{\partial u} Q = \frac{\partial^2}{\partial u^2} V$ ). El pandeo (inestabilidad) del pórtico se producirá cuando se alcance el primero de ellos. Una vez superado éste, la carga de equilibrio desciende hasta hacerse nula precisamente en la configuración  $u = h$ , correspondiente a las dos barras alineadas, posición altamente inestable. Posteriormente la carga de equilibrio es negativa (habrá que "sujetar" al pórtico) hasta que se alcanza el segundo punto crítico, a partir del cual el sistema vuelve a ser estable. Se vuelve a carga nula para  $Q = 2h$ , posición simétrica a la de partida, a partir de la cual las barras comienzan a funcionar a tracción y la carga de equilibrio vuelve a ser positiva. (Debe aclararse que en este modelo sólo se tiene en cuenta la inestabilidad global del pórtico y no la posible inestabilidad local de cada una de las barras por alcanzar la carga de Euler de cada una de ellas, que es la que normalmente se alcanzaría en realidad)

El desarrollo en serie de orden 2 ( $V_2(u)$ ) proporciona una respuesta lineal completamente inadecuada, aproximando tan sólo la tangente en el origen. El desarrollo en serie directo de orden 4 en  $u$  ( $V_4(u)$ ) muestra la primera carga de pandeo, aunque a partir de aquí pierde exactitud. La aproximación  $V_a(u)$  a partir del desarrollo del incremento de longitud, que conduce a una expresión de  $V$  también de orden 4 en  $u$ , aunque distinta de la anterior y mucho más sencilla (faltan algunos términos que entrarían con un desarrollo de orden superior de la longitud de la barra), conduce sin embargo a un resultado prácticamente exacto.

## Cargas críticas

Resolvemos ahora para los valores de las cargas críticas, empleando la aproximación tercera ( $Va(u)$ ) que es la más indicada como se ha visto.

```
> L:='L':h:='h':k:='k':E:='E':A:='A':
```

```
> ucr:=[solve(diff(Va(u),u$2),{u})];
```

$$ucr := \left[ \left\{ u = \left( 1 + \frac{1}{3} \sqrt{3} \right) h \right\}, \left\{ u = \left( 1 - \frac{1}{3} \sqrt{3} \right) h \right\} \right] \quad (12)$$

```
> Pcr1:=expand(subs(ucr[1],Qa(u)));
```

$$Pcr1 := -\frac{2}{9} \frac{A E h^3 \sqrt{3}}{L^3} \quad (13)$$

```
> Pcr2:=expand(subs(ucr[2],Qa(u)));
```

$$Pcr2 := \frac{2}{9} \frac{A E h^3 \sqrt{3}}{L^3} \quad (14)$$

comprobamos la estabilidad e inestabilidad respectivas de dos posiciones antes y después de la primera carga crítica

```
> evalf(expand(subs(u=subs(ucr[2],0.9*u),diff(Va(u),u$2))));
```

```
evalf(expand(subs(u=subs(ucr[2],1.1*u),diff(Va(u),u$2))));
```

$$\frac{0.1517691454 E A h^2}{L^3}$$

$$-\frac{0.1410511778 E A h^2}{L^3} \quad (15)$$

Dibujamos la carga junto con los valores obtenidos

```
> ucr1t:=[subs(ucr[1],u),t,t=Qmin..Qmax]:
```

```
> ucr2t:=[subs(ucr[2],u),t,t=Qmin..Qmax]:
```

```
> assign(datos);
```

```
> plot( [Qa(u),ucr1t,ucr2t,Pcr1,Pcr2],u=0.. u[max],y=Q| |min..
Q| |max,
color=[black,red, red, blue,blue],thickness=2,
title=`Carga de equilibrio y puntos críticos`,
labels=[`despl. vertical (m)`, `Q (N)`]);
```

*Carga de equilibrio y puntos críticos*

