Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

José M.ª Goicolea

Felipe Gabaldón, Javier Rodríguez, Claudio García, Francisco Calvo, Beatriz Sanz

Grupo de Mecánica Computacional
E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos,
Universidad Politécnica de Madrid

31 de enero del 2006

Índice de la parte I

Índice de la parte II

Índice de la parte III

Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

José M.ª Goicolea

Tejidos blandos humanos

Parte I

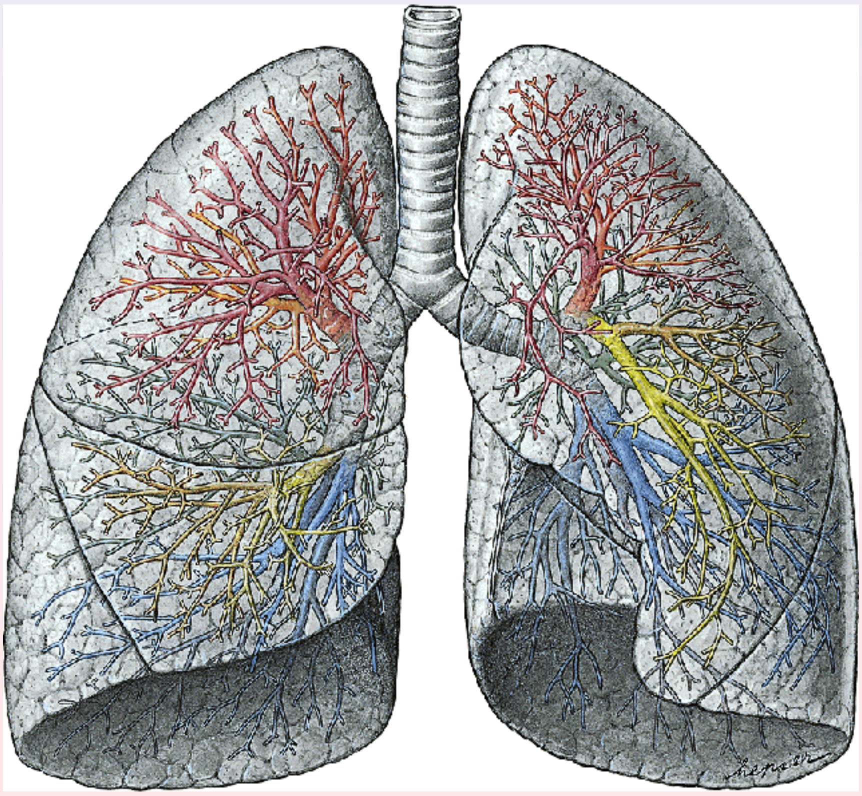
Tejidos

Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

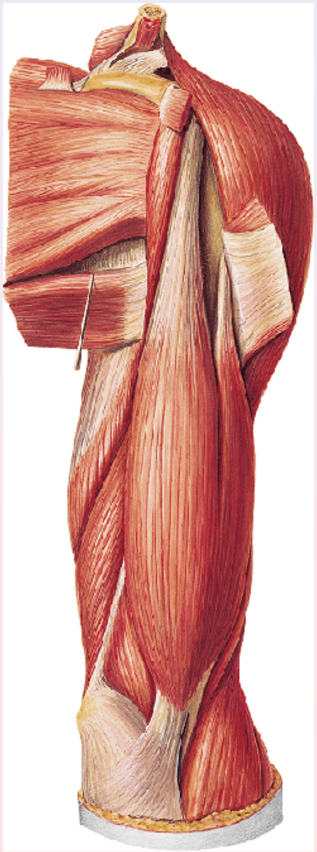
José M.ª Goicolea

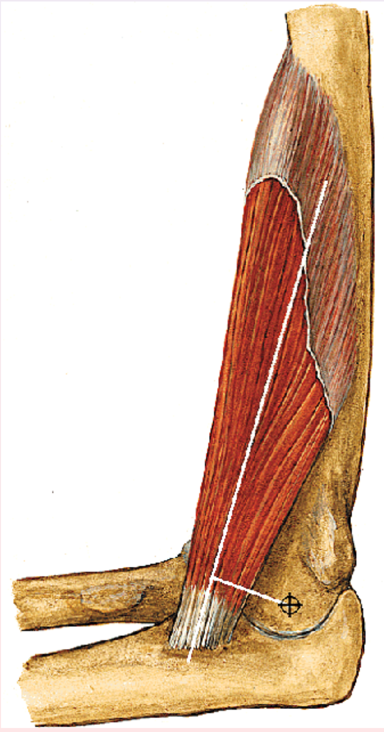
Tejidos blandos humanos

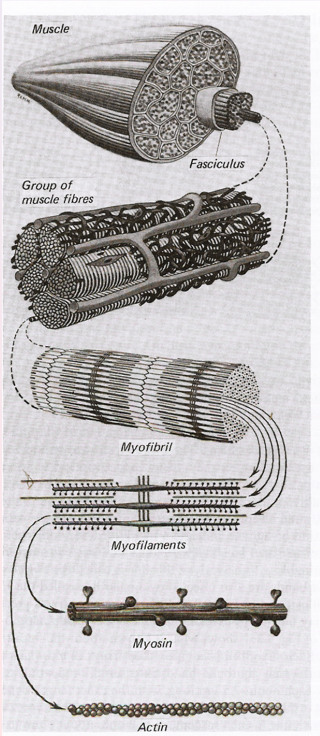
Pulmones



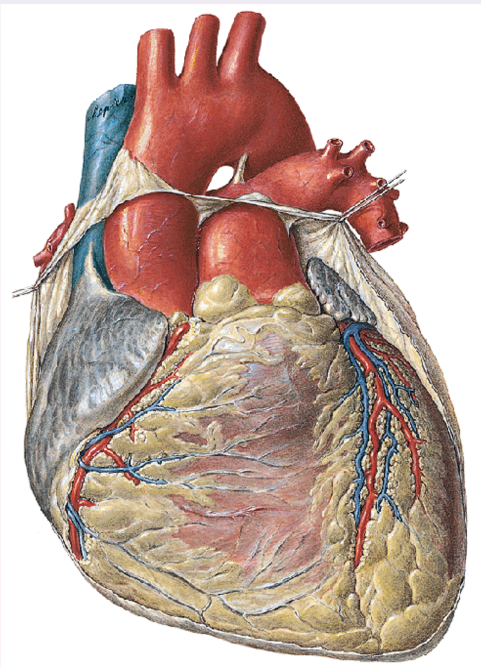
Músculo esqueletal

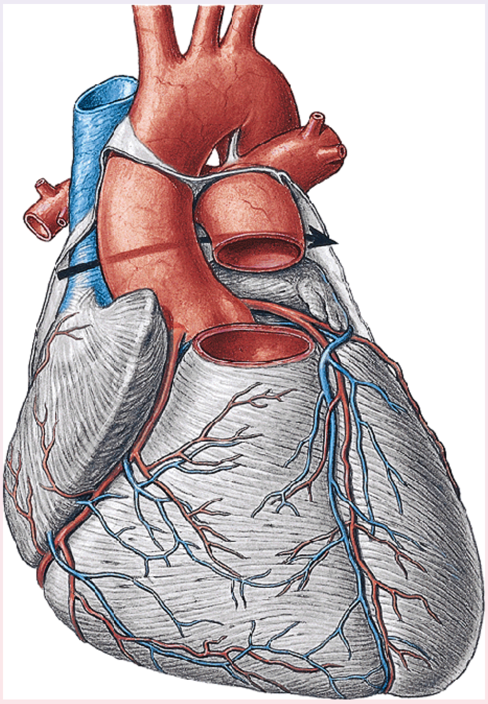






Corazón





Miocardio y Coronarias

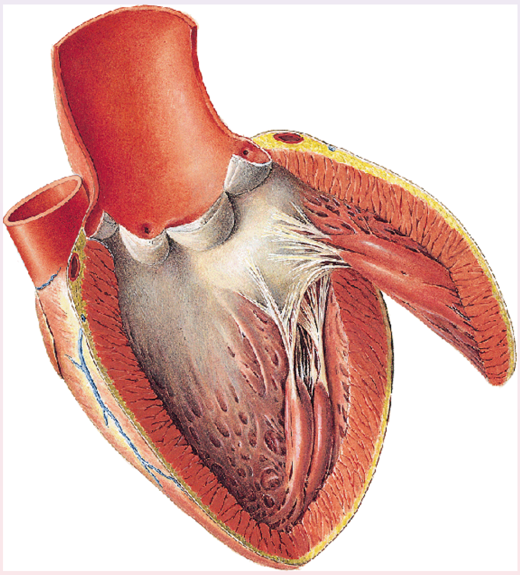
Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

José M.ª Goicolea

Tejidos blandos humanos

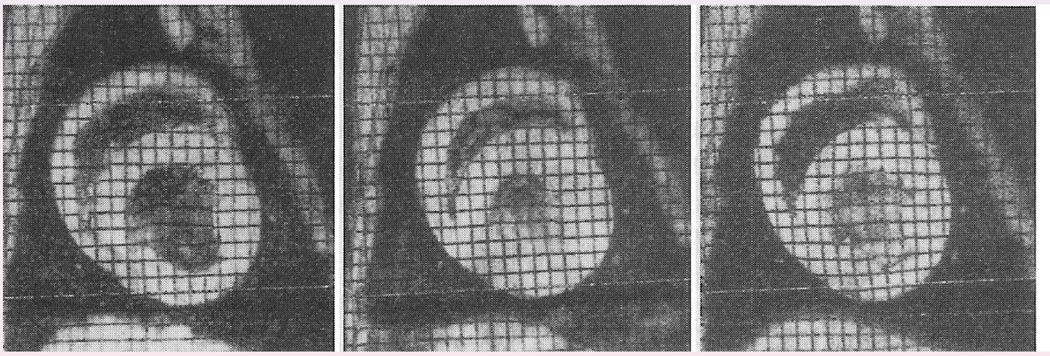
Algunos tipos de tejidos
Respuesta mecánica
Estructura del tejido arterial
Patologías y tratamientos intervencionistas

Corazón (cont)



Ventrículos

Corazón (cont)



Resonancia magnética marcada. Deformación del ventrículo izq.

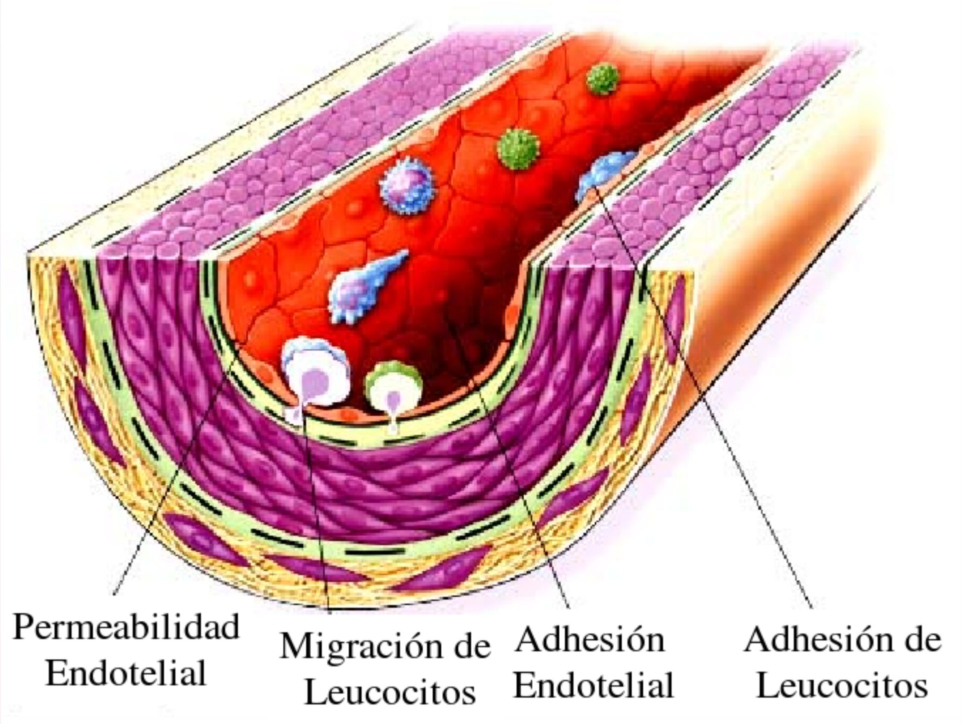
Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

José M.ª Goicolea

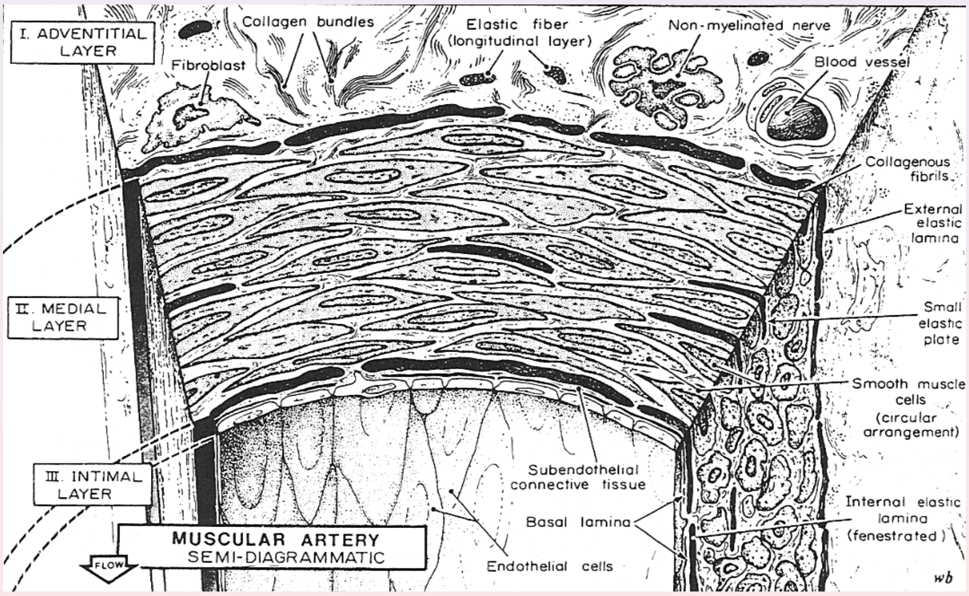
Tejidos blandos humanos

Algunos tipos de tejidos
Respuesta mecánica
Estructura del tejido arterial
Patologías y tratamientos intervencionistas

Arteria



Músculos lisos



Estructura de arteria muscular

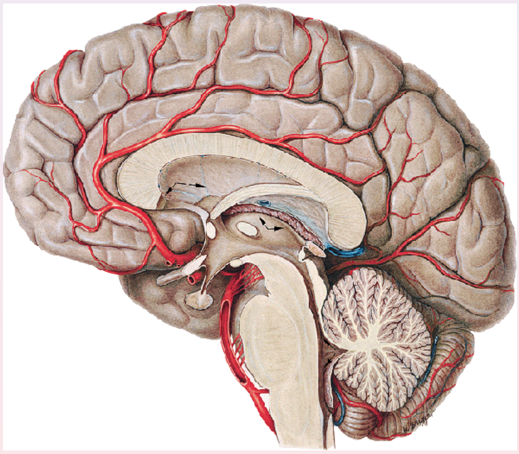
Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

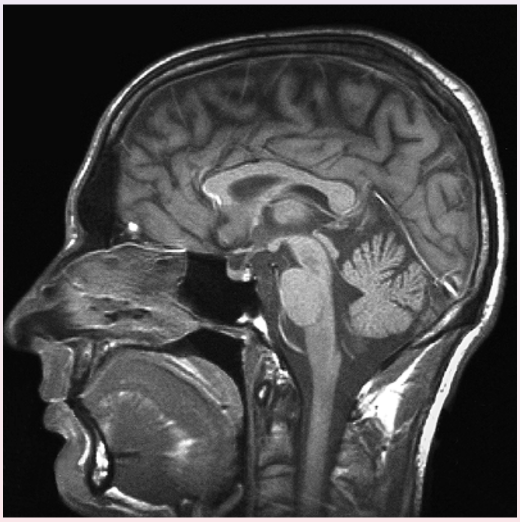
José M.ª Goicolea

Tejidos blandos humanos

Algunos tipos de tejidos
Respuesta mecánica
Estructura del tejido arterial
Patologías y tratamientos intervencionistas

Cerebro





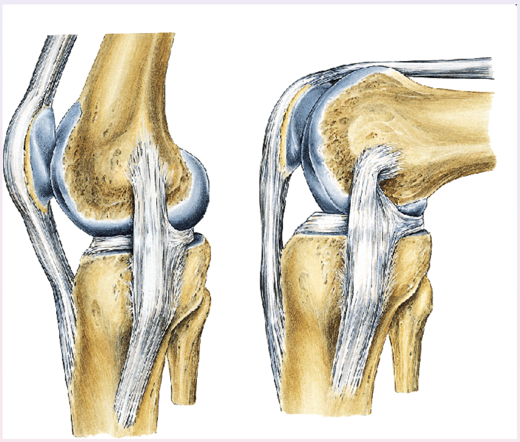
Ligamentos, tendones, meniscos

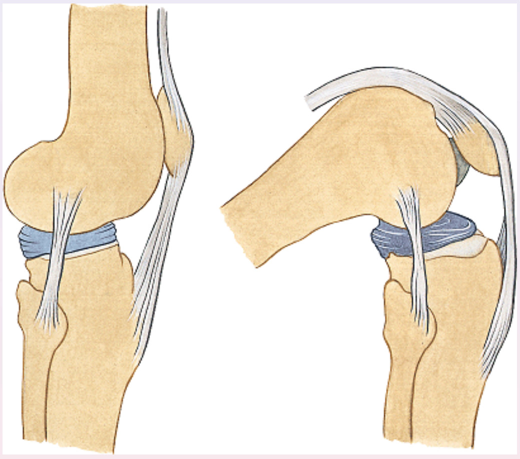
Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

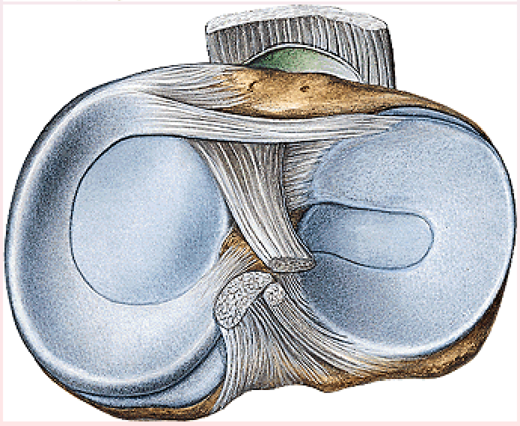
José M.ª Goicolea

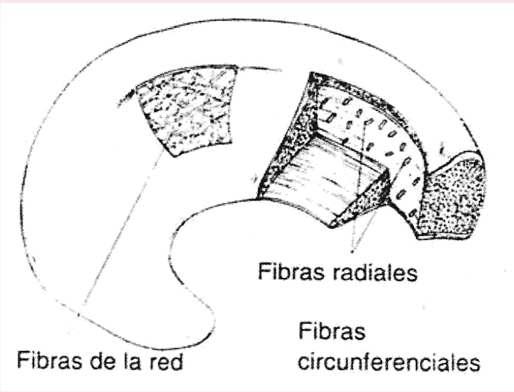
Tejidos blandos humanos

Algunos tipos de tejidos
Respuesta mecánica
Estructura del tejido arterial
Patologías y tratamientos intervencionistas

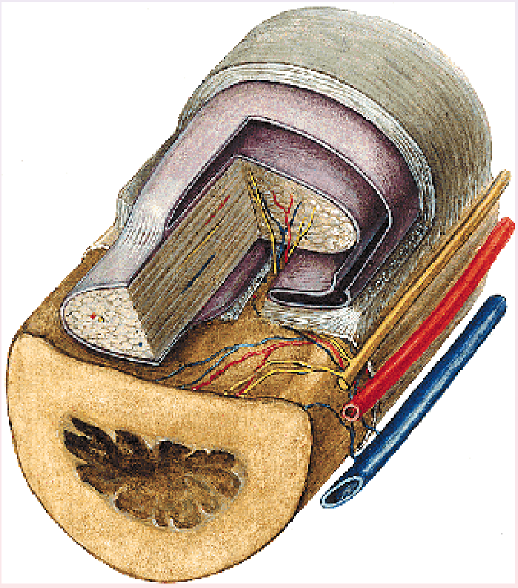


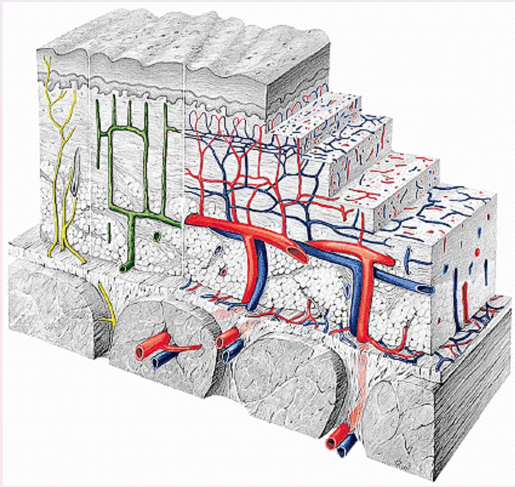






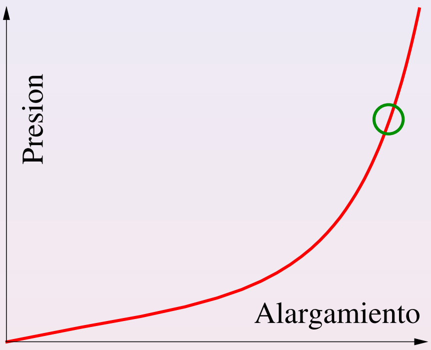
Tendones, Piel





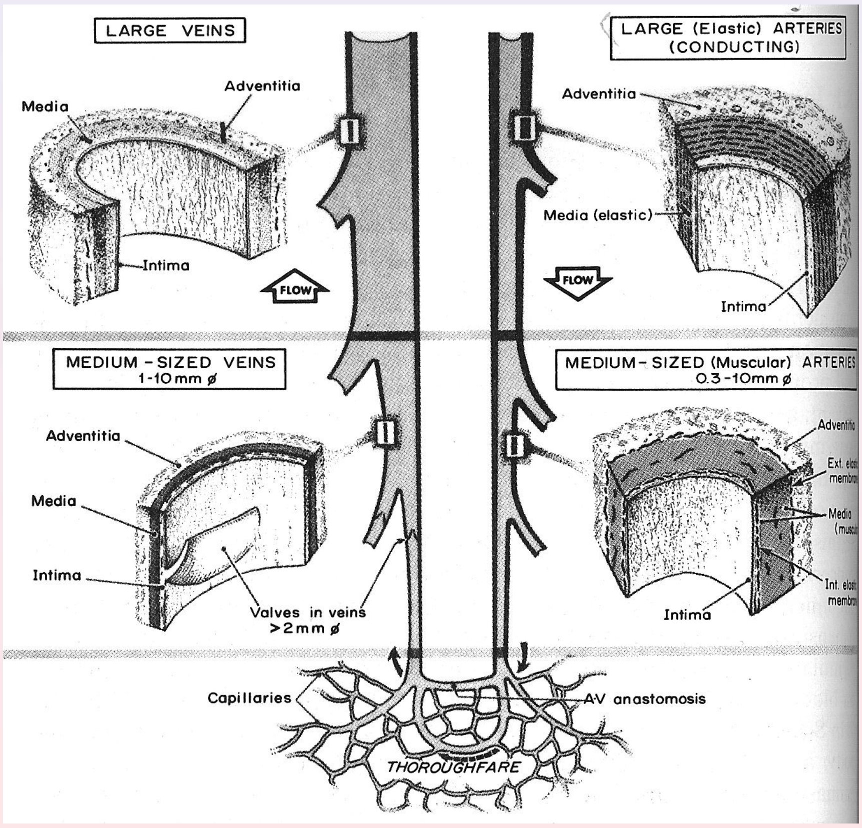
Respuesta mecánica de tejidos blandos

- Respuesta *geométrica no lineal:* grandes desplazamientos y deformaciones
- Respuesta *no lineal del material:* elastina + colágeno, reclutamiento y alineamiento progresivos

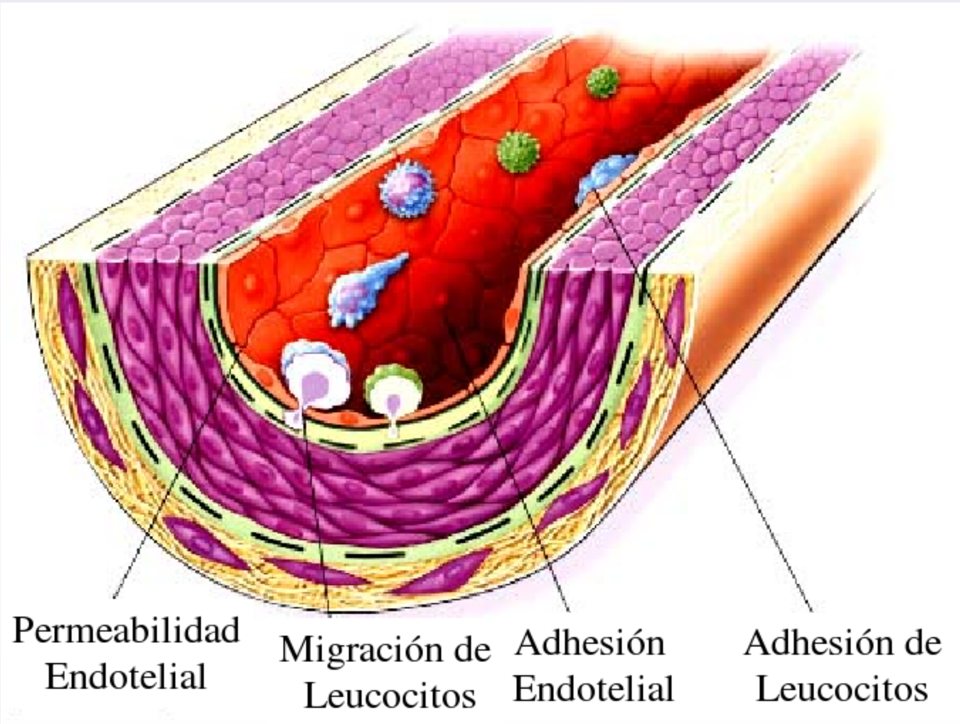


- *Anisotropía*, direcciones preferentes de fibras de colágeno
- *Incompresibilidad* (fase acuosa)
- Comportamiento *reológico (viscoelástico)* y «*pseudoelástico*»
- Adaptación a acciones externas. *Remodelación:* variación de características geométricas o mecánicas
- *Tensiones iniciales* en la configuración sin cargas
- Tono y actividad muscular

Estructura del tejido arterial



Estructura del tejido arterial



Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

José M.ª Goicolea

Tejidos blandos humanos

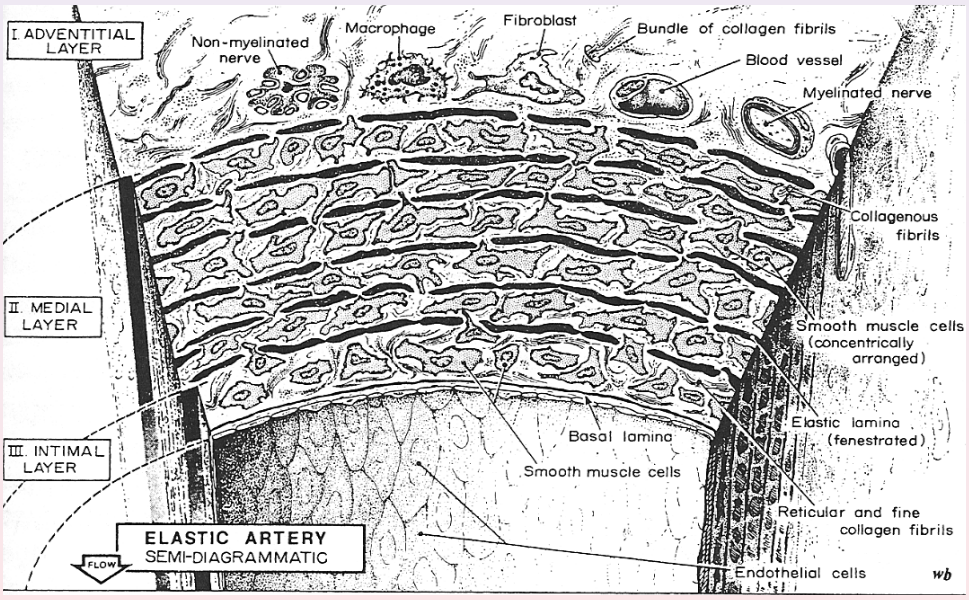
Algunos tipos de tejidos

Respuesta mecánica

Estructura del tejido arterial

Patologías y tratamientos intervencionistas

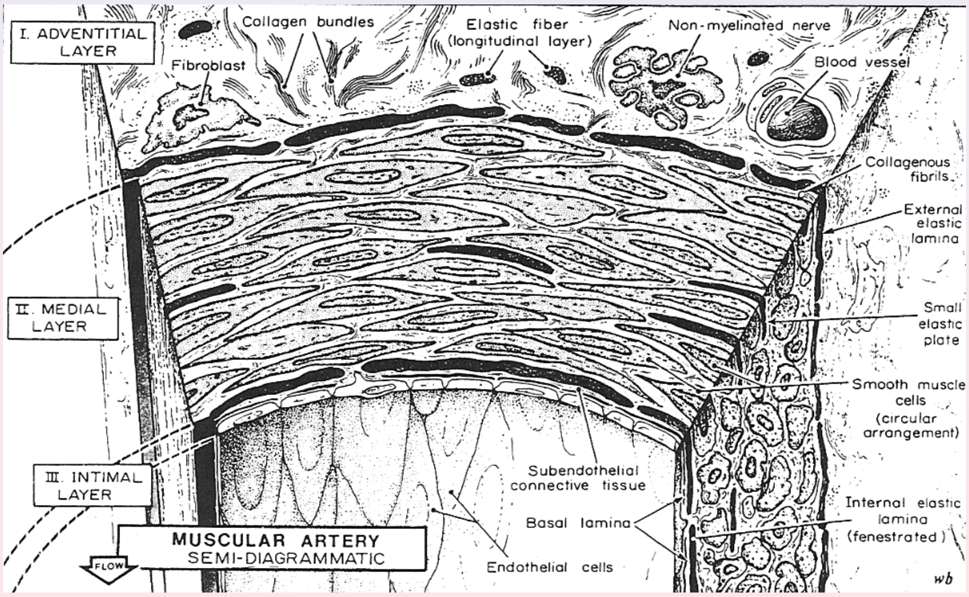
Estructura de arteria elástica



Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

José M.ª Goicolea

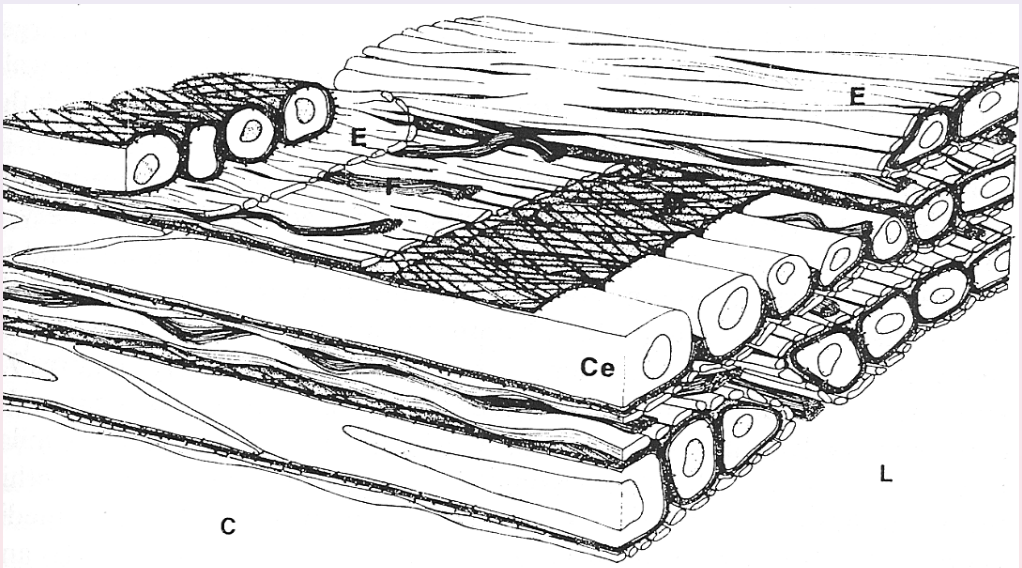
Estructura de arteria muscular



Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

José M.ª Goicolea

«Fascículo músculo-elástico» de pared arterial



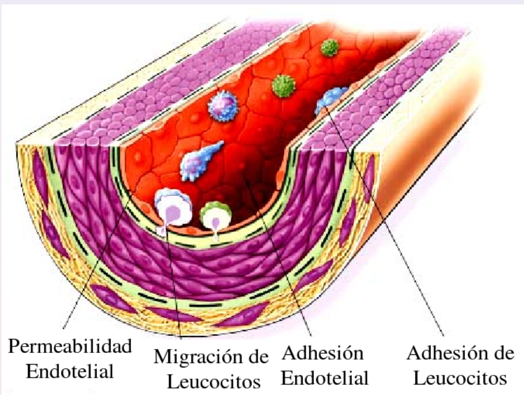
E = Láminas de Elastina;
Ce = Células musculares lisas;
F = Haces de fibras de colágeno

Aterosclerosis

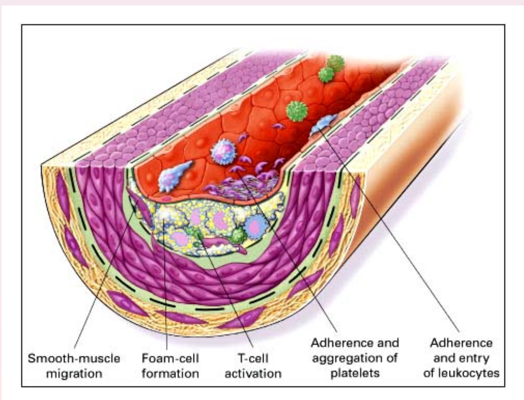
Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

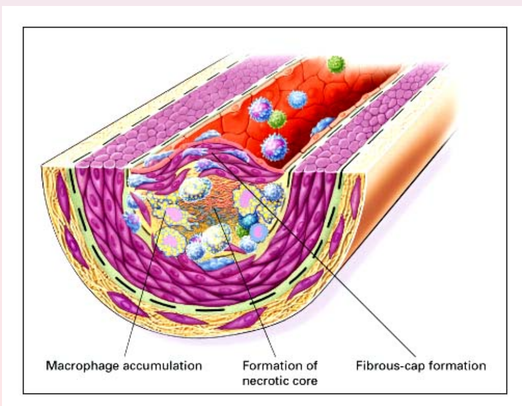
José M.ª Goicolea

Tejidos blandos humanos
- Algunos tipos de tejidos
- Respuesta mecánica
- Estructura del tejido arterial
- Patologías y tratamientos intervencionistas



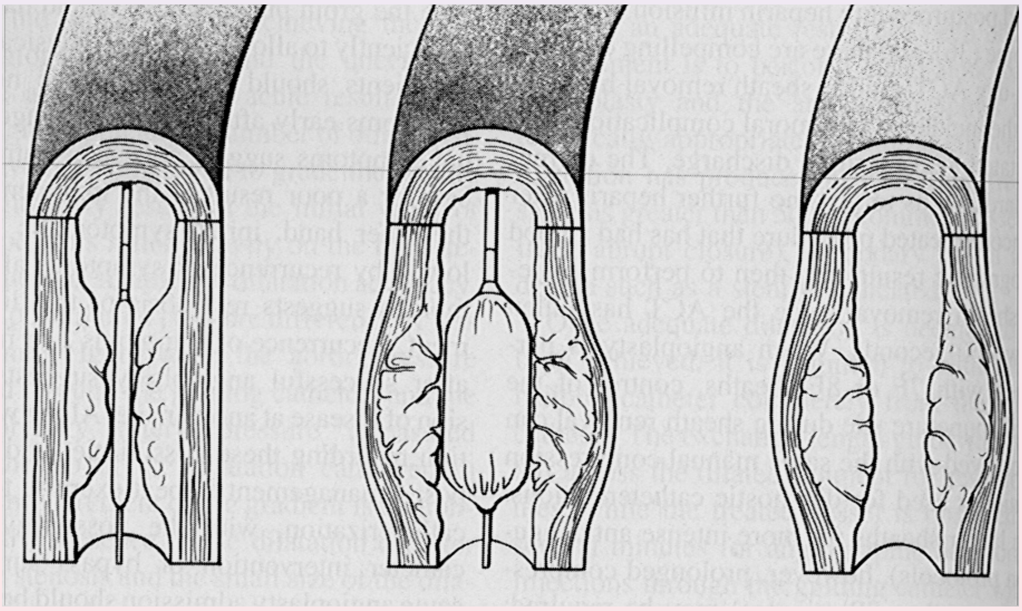
Proceso de formación de placa por alteración del endotelio





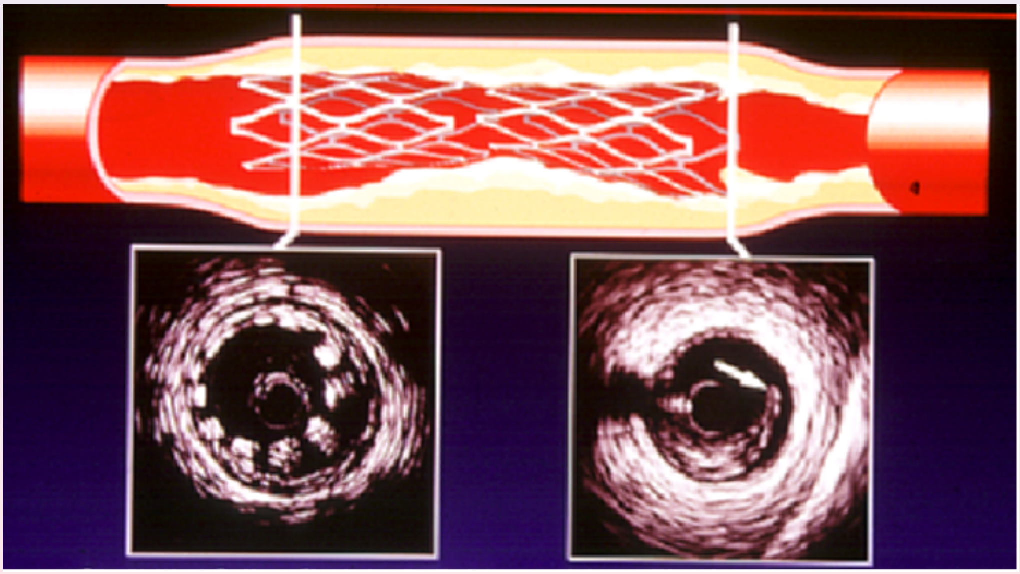
Cardiología intervencionista

Angioplastia con balón:



Cardiología intervencionista

Colocación de stent:



Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

José M.ª Goicolea

Tejidos blandos humanos

Algunos tipos de tejidos

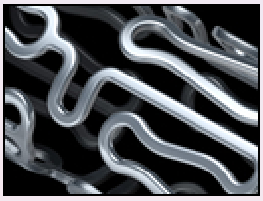
Respuesta mecánica

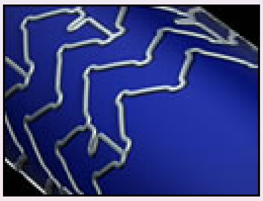
Estructura del tejido arterial

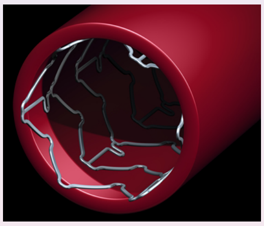
Patologías y tratamientos intervencionistas

Cardiología intervencionista

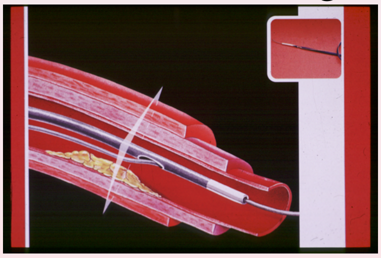
Mecánica del stent







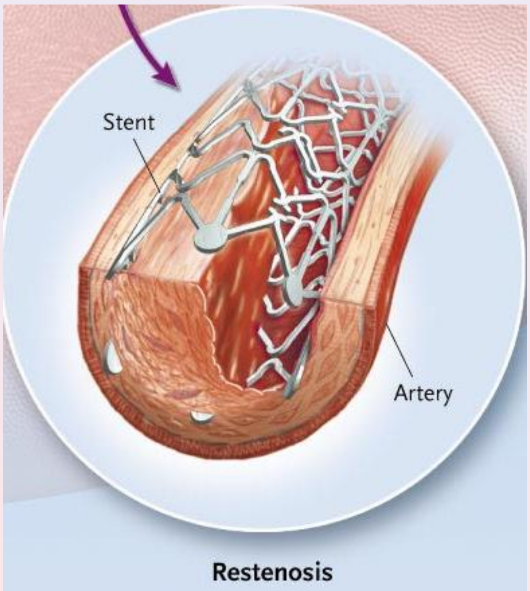
Imágenes del stent en coronarias

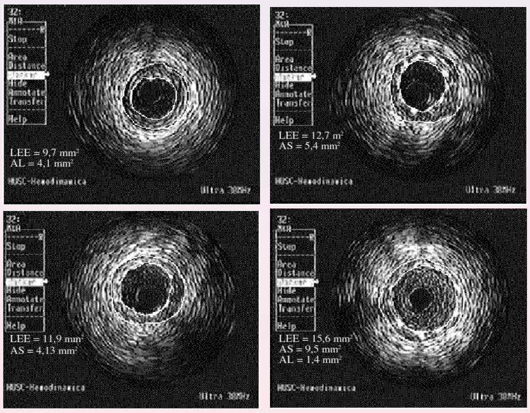


Sonda de ultrasonido intravascular (IVUS) [video]

- Angiografía [video]
- Introducción del stent [video]

Restenosis Post-stent





Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

José M.ª Goicolea

Tejidos blandos humanos

Algunos tipos de tejidos

Respuesta mecánica

Estructura del tejido arterial

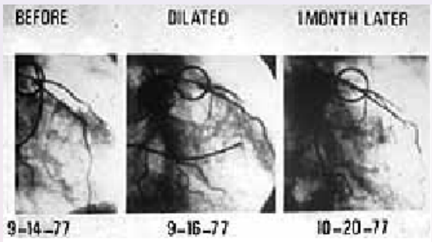
Patologías y tratamientos intervencionistas

Angioplastia compleja en bifurcación

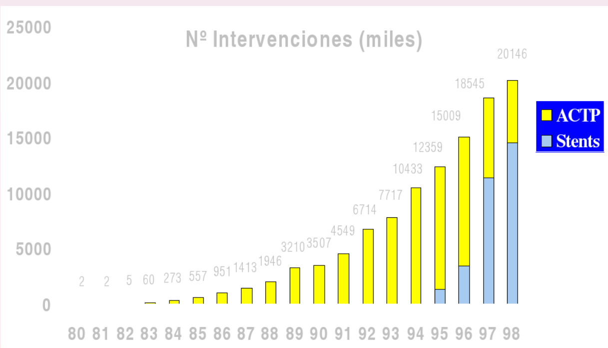
- antes de intervención [video]
- después de intervención [video]

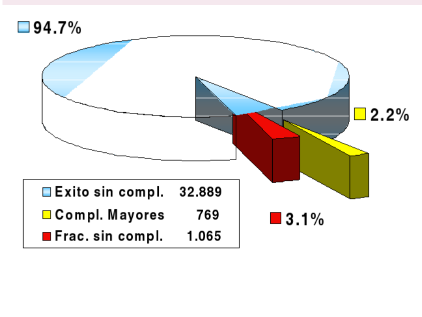
Pasado y presente de la angioplastia

Forssman 1929



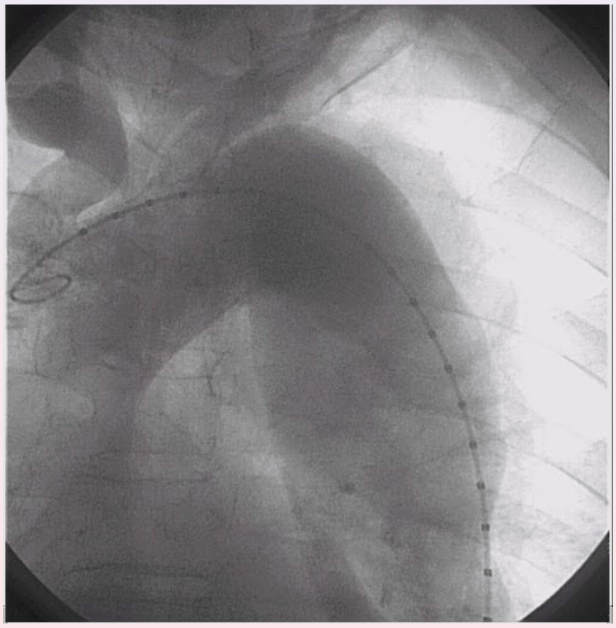
1ª Angioplastia; 14/9/77





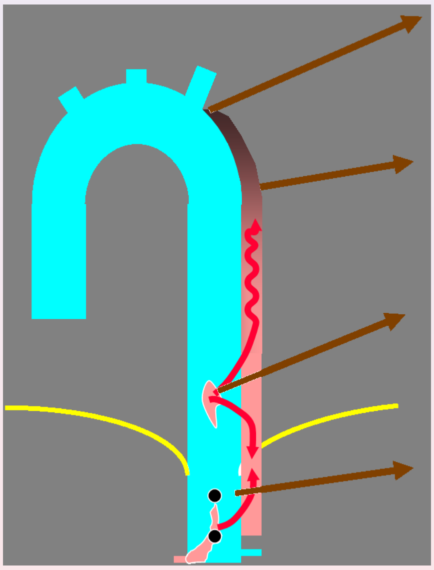
2002: 34723 intervenciones

Aneurisma de Aorta



- Aneurisma 1 [video]
- Aneurisma 2 [video]
- Tratamiento: implante [video]

Disección de Aorta



Angiografía [video]

- hematoma en subclavia [video IVUS]
- hematoma trombosado [video IVUS]
- puerta de entrada [video IVUS]
- origen en tronco celiaco [video IVUS]

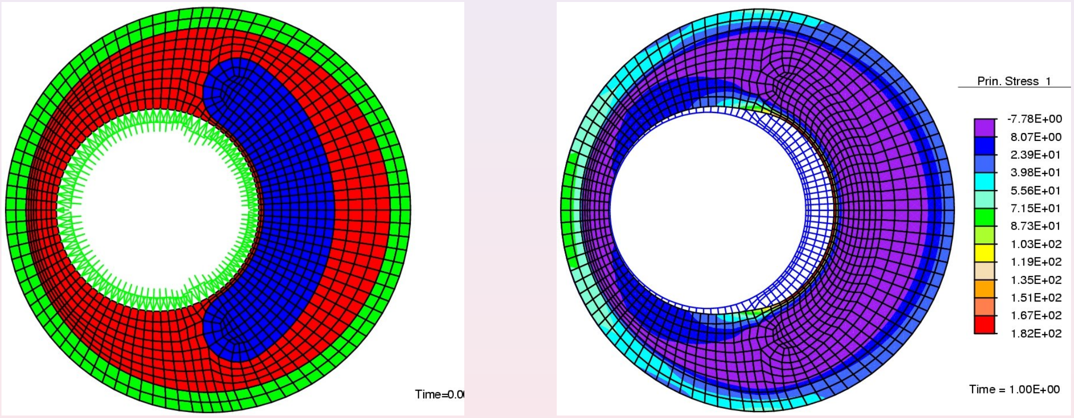
Parte II

Modelos

Motivación

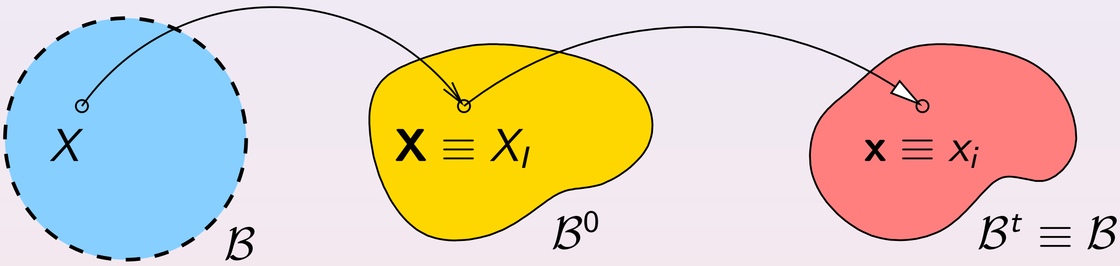
- Ciertas patologías cardiovasculares están relacionadas con las *condiciones mecánicas*, producidas por el flujo sanguíneo.
- Correlación entre el riesgo de aterosclerosis y las *tensiones tangenciales* («shear stress») del flujo sanguíneo en la capa íntima de las arterias.
- Correlación entre la *tensión en la pared arterial* y la remodelación, eventualmente estenosis o restenosis.
- Interesa *modelar de manera detallada* el flujo sanguíneo en las arterias coronarias, así como la deformación de la pared arterial.
- Modelo de cálculo mediante código de Elementos Finitos *no lineal* y propio, con capacidad para sólidos, fluidos, y acoplamiento *(FEAP, Taylor 2004)*.

Ejemplo: estabilidad de placa vulnerable



Grandes desplazamientos y deformaciones, anisotropía, ...
(Lorée, Circ.Res. 1992)

Cinemática: cuerpo, configuraciones y movimiento



$\boxed{\mathcal{B} \text{ cuerpo}} \rightarrow \boxed{\mathcal{B}_0 \textit{ inicial } (t=0)} \rightarrow \boxed{\mathcal{B}_t \textit{ actual } (t)}$

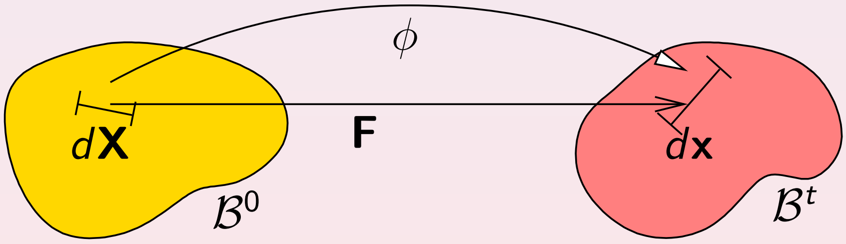
- Movimiento: $\phi_t : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}_t$;
  $\mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{X})$; $\quad \mathbf{X} = \phi_t^{-1}(\mathbf{x})$.
- $\mathbf{X} \equiv X_I$: coordenadas Lagrangianas o materiales (definen partícula o punto material)
- $\mathbf{x} \equiv x_i$: coordenadas Eulerianas o espaciales (definen posición o punto espacial)
- Desplazamientos: $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{1}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{X}$; $\qquad u_i = x_i - \delta_{Pi} X_P$

Cinemática: Gradiente de deformación

- *Definición:*

$$\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{x}; \qquad F_{iJ} = x_{i,J} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J}$$

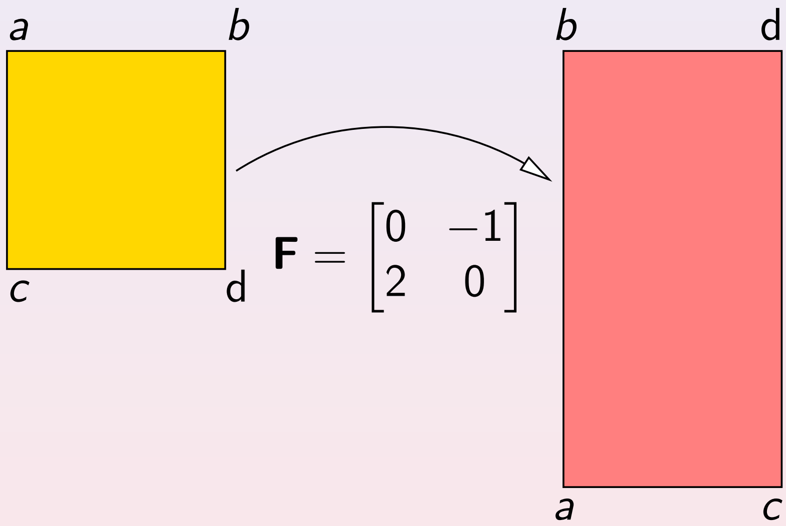
- *Interpretación:* transformación (lineal) de vector tangente (elemento de arco) $d\mathbf{X} \mapsto d\mathbf{x}$



$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{X} \qquad\qquad \mathrm{d}\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1}\cdot \mathrm{d}\mathbf{x}$$

- Tensor «bipunto»: una pata en cada configuración

Ejemplo Gradiente de deformación



$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d\mathbf{X}_{ab} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad d\mathbf{X}_{ca} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}; \quad d\mathbf{x}_{ab} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix}; \quad d\mathbf{x}_{ca} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos
José M.ª Goicolea
Modelos basados en elasticidad no lineal
Motivación
Cinemática y tensiones
Modelos hiperelásticos isótropos
Modelos exponenciales
Modelos hiperelásticos anisótropos
Viscoelasticidad
Modelos de elementos finitos

Descomposición polar de $\mathbf{F}$

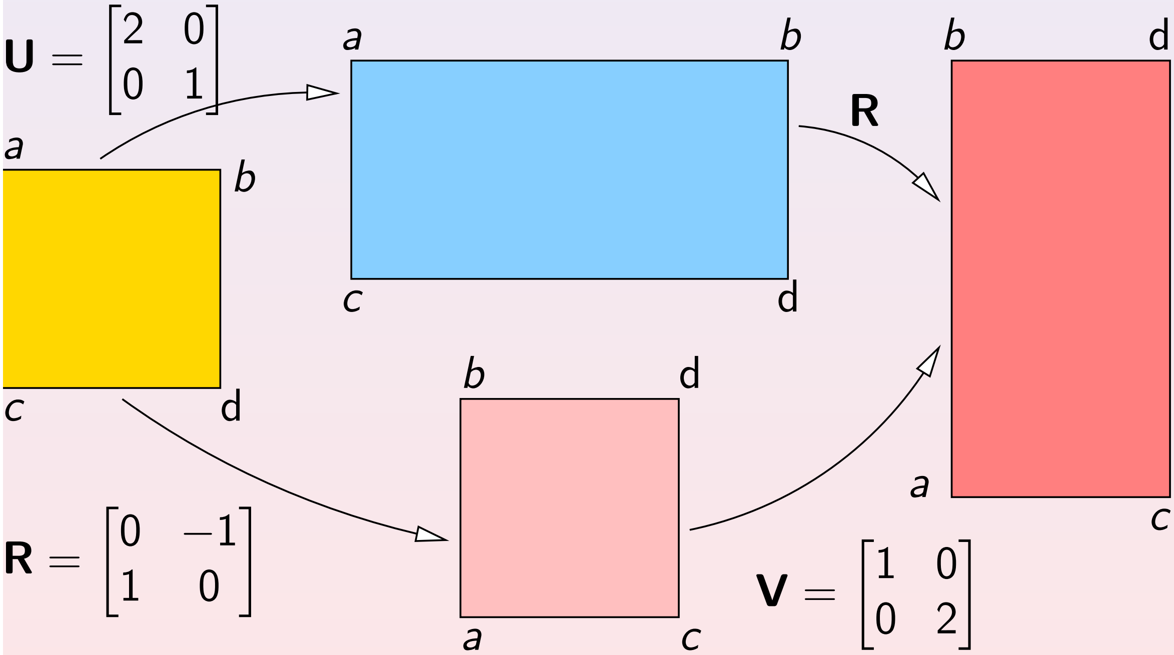
- Para cualquier tensor $\mathbf{F}$ con $\det \mathbf{F} > 0$, existen descomposiciones únicas:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}{\cdot}\mathbf{U} \qquad (1)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}{\cdot}\mathbf{R} \qquad (2)$$

  (1): *estiramiento* ("stretch") $\mathbf{U}$ seguido de rotación $\mathbf{R}$;
  (2): rotación $\mathbf{R}$ seguida de estiramiento $\mathbf{V}$
- $\mathbf{R}$: rotación, $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{\mathsf{T}}$ (ortogonal)
- $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$: tensores de *estiramiento* por la derecha y por la izquierda respectivamente, simétricos, definidos positivos y únicos

Ejemplo: Descomposición polar



Tensor de Cauchy-Green

- Cauchy-Green (por la derecha):

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathsf{T}}\cdot\mathbf{F} = \mathbf{U}^2; \qquad C_{IJ} = F_{pI}F_{pJ}$$

- *Interpretación:* transformación de longitud de un elemento

$$dl^2 = d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x} = (d\mathbf{X}\cdot\mathbf{F}^{\mathsf{T}})\cdot(\mathbf{F}\cdot d\mathbf{X}) = d\mathbf{X}\cdot(\mathbf{C}\cdot d\mathbf{X})$$

Tensor de Green-Lagrange

Se define como:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{\mathsf{T}}\cdot\mathbf{F} - \mathbf{1}) \qquad (3)$$

Las dos «patas» de $\mathbf{E}$ están en la configuración original. En función de los desplazamientos,

$$E_{IJ} = \frac{1}{2}(u_{I,J} + u_{J,I} + \underbrace{u_{p,I}u_{p,J}}_{\text{cuadrático}})$$

Interpretación: transformación de longitud $d\mathbf{X} \mapsto d\mathbf{x}$

$$d\mathbf{X}\cdot(\mathbf{E}\cdot d\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(dl^2 - dL^2)$$

Ejemplo anterior:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Lineal:} \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos
José M.ª Goicolea
Modelos basados en elasticidad no lineal
Motivación
Cinemática y tensiones
Modelos hiperelásticos isótropos
Modelos exponenciales
Modelos hiperelásticos anisótropos
Viscoelasticidad
Modelos de elementos finitos

Tensor de tensiones 2.º de Piola-Kirchhoff (PK2)

♠ Se puede definir a partir del tensor de tensiones de Cauchy *(verdadero)* como:

$$\boxed{\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{F}^{-\mathrm{T}});}$$

$$S_{IJ} = JX_{I,p}\sigma_{pq}X_{J,q}$$

Observaciones:

- S_{IJ} tiene los dos índices en la configuración original
- Es simétrico, $S_{IJ} = S_{JI}$.
- Conjugado de la deformación de Green-Lagrange:

$$\dot{W}^0 = \mathbf{S}:\dot{\mathbf{E}}; \quad \delta W^0 = \mathbf{S}:\delta\mathbf{E} = S_{PQ}\delta E_{PQ}$$

- Se trata de una entelequia sin significado físico directo, aunque resulta útil para describir el movimiento sobre la configuración original.

Modelos hiperelásticos isótropos

- Densidad de energía de deformación:

$$W = W(\mathbf{F}) = \hat{W}(\mathbf{C})\,,$$

- Tensores de tensiones:
  - PK2: $\mathbf{S} = 2\,\dfrac{\partial W}{\partial \mathbf{C}}$
  - Cauchy: $\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$
- Tensor de elasticidad tangente (4.º orden):

$$\mathbb{C} = 4\frac{\partial^2 W}{\partial\mathbf{C}\partial\mathbf{C}}$$

- Dos maneras principales de definir modelos:
  a) a través de invariantes de $\mathbf{C}$: (I_1, I_2, I_3),
  b) a través de alargamientos principales de $\mathbf{U}$: $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

José M.ª Goicolea

Modelos basados en elasticidad no lineal
Motivación
Cinemática y tensiones
Modelos hiperelásticos isótropos
Modelos exponenciales
Modelos hiperelásticos anisótropos
Viscoelasticidad

Modelos de elementos finitos

Modelos hiperelásticos descritos por invariantes

- Función de energía descrita como

$$W = W(\mathbf{C}) = W(I_1, I_2, I_3),$$

$$I_1 = \mathrm{tr}(\mathbf{C}), \quad I_2 = \frac{1}{2}\left((\mathrm{tr}\,\mathbf{C})^2 - \mathrm{tr}\,\mathbf{C}^2\right), \quad I_3 = \det \mathbf{C} = J^2.$$

- Las derivadas se hacen a través de los invariantes:

$$\mathbf{S} = 2\left(\frac{\partial W}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}}\right)$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{1}\,; \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} = I_1\mathbf{1} - \mathbf{C}\,; \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = I_3\mathbf{C}^{-1}\,.$$

Modelos hiperelásticos descritos por invariantes (II)

Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

José M.ª Goicolea

Modelos basados en elasticidad no lineal
Motivación
Cinemática y tensiones
Modelos hiperelásticos isótropos
Modelos exponenciales
Modelos hiperelásticos anisótropos
Viscoelasticidad
Modelos de elementos finitos

- Ejemplo (Neo-Hookeano compresible):

$$W = \frac{\lambda}{2}\ln^2 J + \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) - \mu \ln J$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}\cdot\left(\lambda \ln(J)\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{E}\right),$$

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\left(\lambda \ln(J)\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}\right),$$

siendo

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{b}^{-1})\,.$$

Modelos hiperelásticos descritos por invariantes (III)

- Descomposición volumétrica+desviadora, para materiales casi-incompresibles:

$$\tilde{\mathbf{F}} = J^{-1/3}\mathbf{F} \quad \longrightarrow \quad J,\, \tilde{I}_1,\, \tilde{I}_2,\, (\tilde{I}_3 = 1)$$

- Ejemplo (Neo-Hookeano modificado):

$$W = \frac{K}{2}(J-1)^2 + \frac{\mu}{2}(\tilde{I}_1 - 3)$$

Modelo exponencial de Fung (1979)

- Modelos exponenciales: El módulo elástico tangente crece linealmente con la tensión:

$$E(S) = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\lambda} = \alpha + \beta S \quad \Rightarrow \quad S(\lambda) = \frac{\alpha}{\beta}\left[\mathrm{e}^{\beta(\lambda-1)} - 1\right]$$

- Fung: Densidad de energía exponencial de una forma cuadrática $Q(\mathbf{E})$:

$$W = c\left(\mathrm{e}^{Q(\mathbf{E})} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} = c\mathrm{e}^{Q}\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{E}},$$

1+9 parámetros en general para material ortótropo,

$$Q = \frac{1}{2}c_{IJKL}E_{IJ}E_{KL} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial E_{IJ}} = c_{IJKL}E_{KL}$$

Modelo de Chuong-Fung (1983)

Simplificación despreciando deformación radial,

$$W = \frac{c}{2}\left[\exp(Q) - 1\right]$$

$$Q(\mathbf{E}) = b_1 E_{\theta\theta}^2 + b_2 E_{zz}^2 + 2 b_4 E_{\theta\theta} E_{zz} \,,$$

(4 parámetros del material: $\{c, b_1, b_2, b_4\}$)

Modelo de Delfino (1997)

- Generalización exponencial del modelo básico Neohookeano:

$$W = \frac{a}{b}\left[\exp\left(\frac{b}{2}(I_1 - 3)\right) - 1\right]$$

- 2 parámetros del material $\{a, b\}$
- Propuesto en el contexto de modelos tridimensionales de elementos finitos para bifurcaciones en carótidas

Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

José M.ª Goicolea

Modelos basados en elasticidad no lineal

Motivación

Cinemática y tensiones

Modelos hiperelásticos isótropos

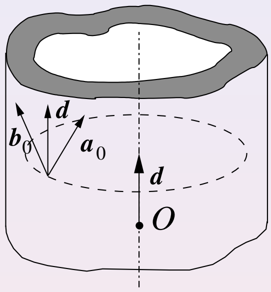
Modelos exponenciales

Modelos hiperelásticos anisótropos

Viscoelasticidad

Modelos de elementos finitos

Modelos hiperelásticos anisótropos



- Collagen fibers with preferential directions. Defined in reference configuration by unit vectors $\mathbf{a}_0$ and $\mathbf{b}_0$, at angles $\pm\alpha$ with arterial axis. Strain energy expressed by $W(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0)$.
- *Pseudo-invariants* (Spencer [CISM 1984]): $W = W(\{I_a\}),\ a = 1, \dots, 9,$

$$I_4 = \mathbf{a}_0{\cdot}\mathbf{C}{\cdot}\mathbf{a}_0, \quad I_5 = \mathbf{a}_0{\cdot}\mathbf{C}^2{\cdot}\mathbf{a}_0, \quad I_6 = \mathbf{b}_0{\cdot}\mathbf{C}{\cdot}\mathbf{b}_0,$$
$$I_7 = \mathbf{b}_0{\cdot}\mathbf{C}^2{\cdot}\mathbf{b}_0, \quad I_8 = (\mathbf{a}_0{\cdot}\mathbf{b}_0)\mathbf{a}_0{\cdot}\mathbf{C}{\cdot}\mathbf{b}_0, \quad I_9 = (\mathbf{a}_0{\cdot}\mathbf{b}_0)^2.$$

- For arterial tissue [Holzapfel, Gasser & Ogden, 2000]:

$$\boxed{W = \underbrace{\frac{K}{2}\log^2 J}_{volum.} + \underbrace{\frac{c}{2}(\tilde{I}_1 - 3)}_{neo\text{-}hooke} + \underbrace{\frac{k_1}{2k_2}\sum_{a=4,6}\left(\exp\left(k_2(\tilde{I}_a - 1)^2\right) - 1\right)}_{fibras}}$$

Otros modelos de material

- Modelo St. Venant–Kirchhoff

$$W = \frac{\lambda}{2}\operatorname{tr}^2\mathbf{E} + \mu\mathbf{E}{:}\mathbf{E}$$
$$= \frac{\lambda}{8}(I_1 - 3)^2 + \frac{\mu}{4}(I_1^2 - 2I_2 - 2I_1 + 3)$$
$$\mathbf{S} = \lambda\operatorname{tr}(\mathbf{E})\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{E}$$

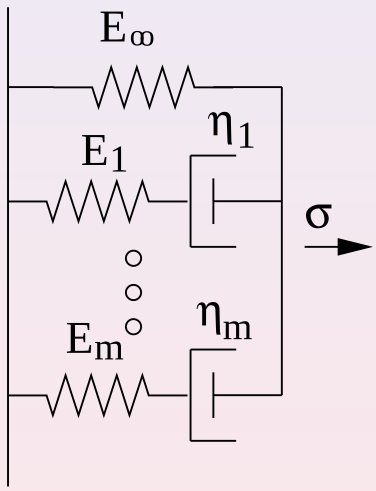
(Problemas de estabilidad)

- Modelos de distribución

Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos
José M.ª Goicolea
Modelos basados en elasticidad no lineal
Motivación
Cinemática y tensiones
Modelos hiperelásticos isótropos
Modelos exponenciales
Modelos hiperelásticos anisótropos
Viscoelasticidad
Modelos de elementos finitos

Viscoelasticidad

Modelo de Maxwell generalizado (Taylor 1970, Holzapfel 2000)



$$W^\infty(\mathbf{C}) = W^\infty_{\text{vol}}(J) + W^\infty_{\text{iso}}(\overline{\mathbf{C}}).$$

Tensiones PK2:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^\infty_{\text{vol}} + \mathbf{S}_{\text{iso}}, \quad \text{con } \mathbf{S}_{\text{iso}} = \mathbf{S}^\infty_{\text{iso}} + \sum_{a=1}^{m} \mathbf{Q}_a.$$

Ecuaciones de *evolución* de $\mathbf{Q}_a$:

$$\dot{\mathbf{Q}}_a + \frac{\mathbf{Q}_a}{\tau_a} = \dot{\mathbf{S}}_{\text{iso},a}, \quad \text{con } \tau_a = \frac{\eta_a}{E_a}.$$

$$\mathbf{S}^\infty_{\text{vol}} = 2\frac{\partial W^\infty_{\text{vol}}}{\partial \mathbf{C}}; \quad \mathbf{S}^\infty_{\text{iso}} = 2\frac{\partial W^\infty_{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}}; \quad \mathbf{S}_{\text{iso},a} = \beta^\infty_a \mathbf{S}^\infty_{\text{iso}}(\overline{\mathbf{C}})$$

$$\mathbf{Q}_a = \exp\left(-\frac{t}{\tau_a}\right)\mathbf{Q}_{a,0} + \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau_a}\right)\dot{\mathbf{S}}_{\text{iso},a}\,\mathrm{d}\xi$$

Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

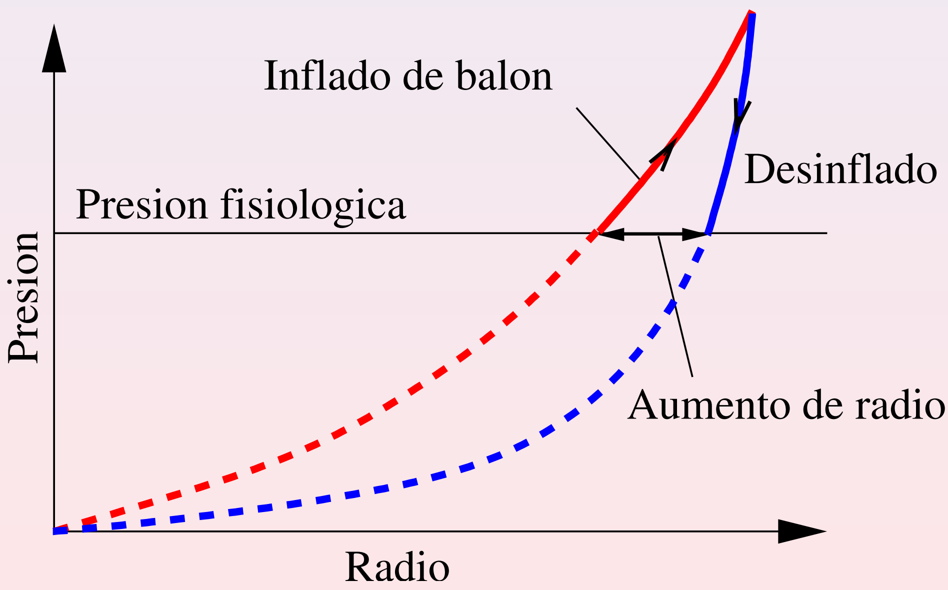
José M.ª Goicolea

Modelos basados en elasticidad no lineal
Motivación
Cinemática y tensiones
Modelos hiperelásticos isótropos
Modelos exponenciales
Modelos hiperelásticos anisótropos
Viscoelasticidad

Modelos de elementos finitos

Pseudoelasticidad y daño continuo

Angioplastia y efecto «Mullins»



Técnicas de elementos finitos no lineales

- FEAP 7.5 Nonlinear Finite Element Code [Taylor, 2004]
- Mixed Finite elements $(\mathbf{u}, p, \Theta)$ for quasi-incompressible finite elasticity [Simó & Taylor, 1991]
- Material model subroutines for isotropic and anisotropic finite elasticity and viscoelasticity formulated through invariants and principal stretches, with consistent linearisation [Rodríguez y Goicolea, 2003]
- GiD for visualisation and meshing. FEAP–GiD macros [Gabaldón, Calvo, Goicolea & Luna, 2004]

Elementos Finitos mixtos $\mathbf{u}$-p-θ

- Elasticidad casi incompresible, no lineal *(Simó & Taylor, CMAME 1991)*.
- $\mathbf{u}$ (desplazamientos); p (presión); θ (volumen).

$$\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{X}, t) - \varphi(\mathbf{X}, 0); \quad \theta = J = \det(\mathbf{F}); \quad p = \frac{1}{3}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}).$$

- Formulación fuerte:

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{b};$$
$$p = \frac{J}{\theta}\frac{1}{3}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma});$$
$$\theta = J.$$

Elementos Finitos mixtos $\mathbf{u}$-p-θ (cont.)

- Variables modificadas:

$$\widetilde{\mathbf{F}} = \left(\frac{\theta}{J}\right)^{1/3} \mathbf{F}; \quad \widetilde{\mathbf{C}} = \widetilde{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}} \cdot \widetilde{\mathbf{F}};$$

$$\widetilde{\mathbf{S}} = 2\frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}}(\widetilde{\mathbf{C}}); \quad \widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = J^{-1}\widetilde{\mathbf{F}} \cdot \widetilde{\mathbf{S}} \cdot \widetilde{\mathbf{F}}^{-\mathrm{T}}; \quad \widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = p\mathbf{1} + \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{dev}}$$

- Formulación débil:

$$0 = \int_\Omega \boldsymbol{\nabla}\delta\mathbf{u}:(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{dev}} + p\mathbf{1})\, \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta\mathbf{u} \cdot \rho\mathbf{b}\, \mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega} \delta\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}}\, \mathrm{d}\Gamma$$

$$0 = \int_\Omega \delta\theta \left(\frac{\mathrm{tr}\,\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}}{3\theta} - \frac{p}{J}\right) \mathrm{d}\Omega$$

$$0 = \int_\Omega \delta p \left(1 - \frac{\theta}{J}\right) \mathrm{d}\Omega$$

Ecuaciones de la dinámica de fluidos (CFD)

Ecuaciones de Navier-Stokes

$$\boldsymbol{\nabla} p - \underbrace{2\mu\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}^s\mathbf{u}}_{\text{difusion}} + \underbrace{\rho\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}}_{\text{conveccion}} = \rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} \qquad \text{en } \Omega$$

Formulación débil $\longrightarrow$ Elementos Finitos

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} :\boldsymbol{\nabla}\mathbf{w}\, \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \rho(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u})\cdot\mathbf{w}\, \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} + \frac{p}{\lambda})q\, \mathrm{d}\Omega + ST$$
$$- \int_{\Gamma_n} \mathbf{t}_n\cdot\mathbf{w}\, \mathrm{d}\Gamma_n = \int_\Omega \rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\cdot\mathbf{w}\mathrm{d}\Omega\,, \quad \forall(q, \mathbf{w})$$

donde los términos $\frac{p}{\lambda}$ y ST se introducen respectivamente para resolver los problemas de incompresibilidad y estabilización por la convección.

Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos
José M.ª Goicolea
Modelos basados en elasticidad no lineal
Modelos de elementos finitos
Técnicas de elementos finitos no lineales
Dinámica de fluidos
Interacción fluido-estructura

Estabilización SUPG

SUPG = «Streamline Upwind Petrov-Galerkin»

$$ST = \sum_{e=1}^{numel} \int_{\Omega_e} \tau_{\mathrm{supg}} (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \mathbf{w}) \cdot \mathbf{R} \, \mathrm{d}\Omega_e \, ,$$

siendo

- $\mathbf{R}$ el residuo en la formulación fuerte:

$$\mathbf{R} = -\boldsymbol{\nabla} p + 2\mu \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}^s \mathbf{u} - \rho \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u} + \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$$

- τ_{supg} un coeficiente que controla la importancia del término ST,

$$\tau_{\mathrm{supg}} = \frac{h}{2\|\mathbf{u}\|} \zeta(Re),$$

  donde h es el tamaño del elemento en la dirección del flujo, $\|\mathbf{u}\|$ el módulo de la velocidad en el centro del elemento, y $\zeta = \dfrac{Re}{1+Re}$ produce un mayor peso del término de estabilización para números de Reynolds mayores.

Ejemplos de dinámica de fluidos (con FEAP)

- Torbellinos de Von Karman
  [video, veloc. horizontal]
- Flujo en escalón inverso
  [veloc. horizontal, N.º de Reynolds = 400]
  [veloc. horizontal, N.º de Reynolds = 5000]
- Flujo confinado en una cavidad
  [video veloc. horizontal]
- Más ejemplos:
  `http://w3.mecanica.upm.es/~fran/tesis/animaciones/anima.html`

Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

José M.ª Goicolea

Modelos basados en elasticidad no lineal

Modelos de elementos finitos

Técnicas de elementos finitos no lineales

Dinámica de fluidos

Interacción fluido-estructura

Formulación ALE para contornos móviles

- Malla *Lagrangiana:* se mueve con las partículas del medio continuo (fluido o sólido). No hay términos convectivos. Inaceptable en un fluido, por la deformación de la malla
- Malla *Euleriana:* fija en el espacio. Términos convectivos típicos de las ecuaciones de Navier-Stokes (NS).
- Malla con movimiento impuesto: ALE = «Arbitrary Lagrangian-Eulerian». El movimiento $\hat{\mathbf{u}}$ se determina de forma que ocupe el nuevo contorno. Ecuaciones de NS modificadas:

$$\nabla p - \underbrace{2\mu \nabla \cdot \nabla^s \mathbf{u}}_{\text{difusion}} + \underbrace{\rho(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla \mathbf{u}}_{\text{conveccion}} = \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \qquad \text{en } \Omega$$

- Ejemplo: movimiento senoidal impuesto en pared [video]

Algoritmo para interacción fluido-estructura

Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

José M.ª Goicolea

Modelos basados en elasticidad no lineal

Modelos de elementos finitos

Técnicas de elementos finitos no lineales

Dinámica de fluidos

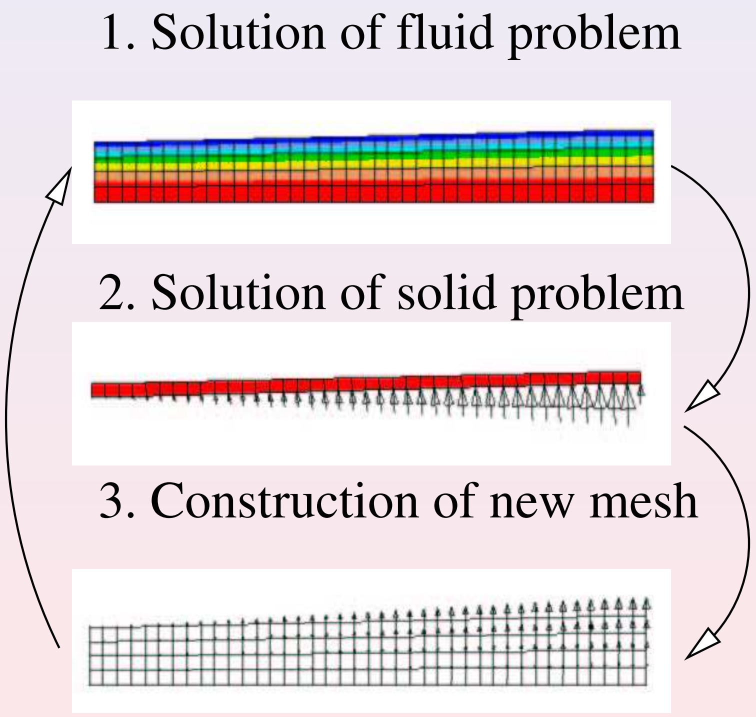
Interacción fluido-estructura

- En dirección axial la malla no se mueve (Euleriana).
- En dirección radial la malla se mueve adaptándose a la pared arterial (Lagrangiana)

Primera iteración: se toma $\delta_f^1 \;\longrightarrow$ malla del fluido;

1. $\delta_f^i \;\longrightarrow$ Resolución ecuaciones del fluido con ALE $\longrightarrow$ Reacciones en pared arterial
2. Resolución ecuaciones sólido $\longrightarrow\; \delta_s^i$
3. Comprobación convergencia
   - Si $\|\delta_f^i - \delta_s^i\| > \epsilon$: nueva iteración, $\longrightarrow\; \delta_f^{i+1}$
   - Si $\|\delta_f^i - \delta_s^i\| \leq \epsilon \quad \longrightarrow \quad$ Fin

Esquema de interacción fluido-estructura



(Iteración de punto fijo, convergente)

Modelo del flujo sanguíneo

- Integración en el tiempo: esquema de *Euler implícito.*
- Velocidad de la malla $\hat{\mathbf{u}}$: aproximación de primer orden:

$$\hat{\mathbf{u}} \approx \frac{\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n}{\Delta t}$$

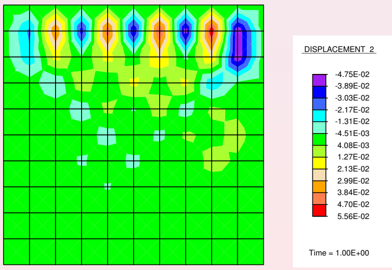
  siendo $\mathbf{x}^n$ la posición de la malla en el paso n
- El dominio fluido Ω_t se actualiza en cada paso de tiempo. Conocida la solución en $t = n$, en $t = n + 1$ la posición de la malla $\mathbf{x}^{n+1}$ es desconocida, y por tanto $\hat{\mathbf{u}}$ también. Esta incógnita da lugar al acoplamiento del fluido con el sólido.
- Método *particionado* e iterativo de cálculo, control de convergencia

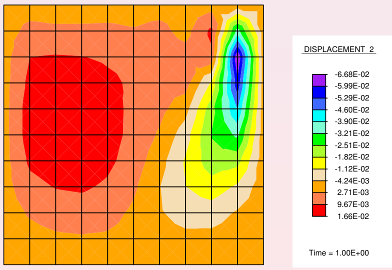
Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos
José M.ª Goicolea
Modelos basados en elasticidad no lineal
Modelos de elementos finitos
Técnicas de elementos finitos no lineales
Dinámica de fluidos
Interacción fluido-estructura

Estabilización

- Los problemas numéricos asociados a la *incompresibilidad* se resuelven mediante una formulación mixta $\mathbf{u}$-p, con elementos Q1/P0.
- Las *inestabilidades* asociadas a valores altos del número de Reynolds se resuelven mediante el método SUPG.

Flujo confinado en una cavidad ($Re = 5000$)





Interacción fluido-estructura

Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

José M.ª Goicolea

Modelos basados en elasticidad no lineal

Modelos de elementos finitos

Técnicas de elementos finitos no lineales

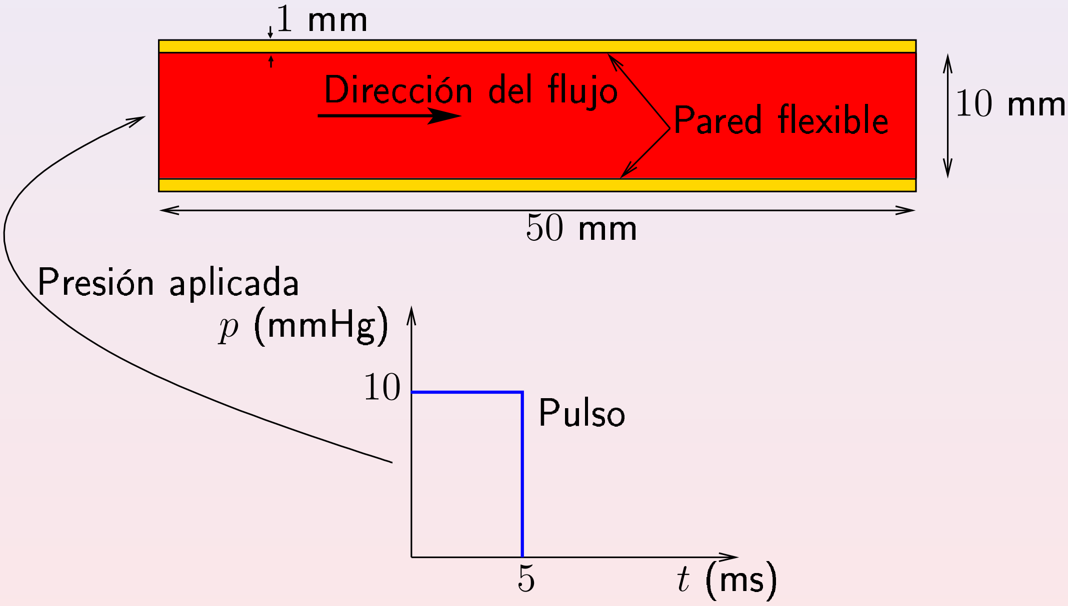
Dinámica de fluidos

Interacción fluido-estructura

Ejemplo: interacción con arteria flexible. Flujo pulsátil en la entrada, libre en la salida.

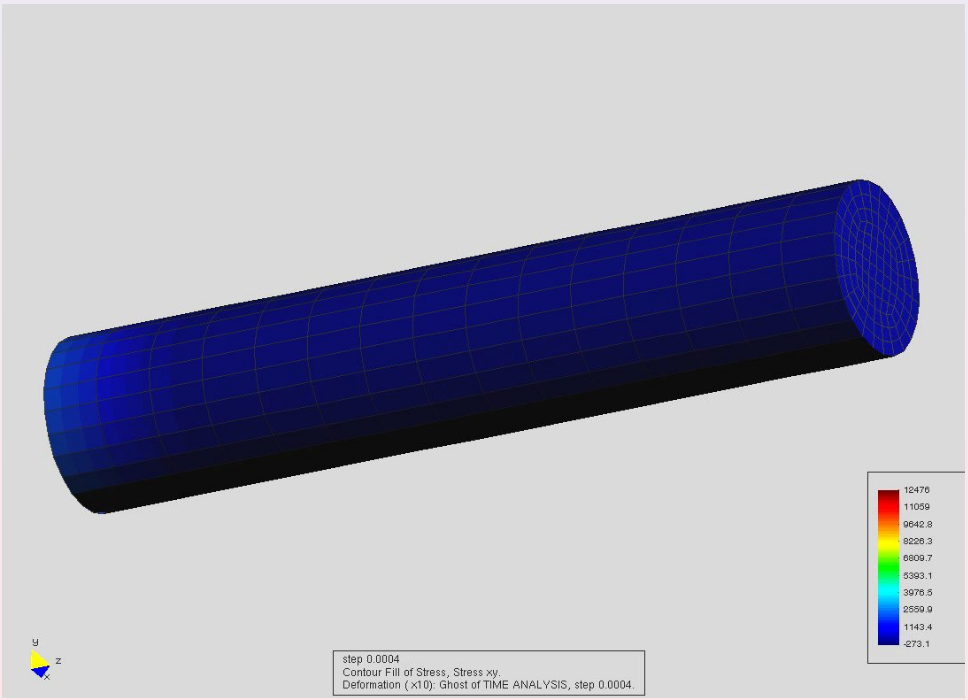
- [video vectores velocidad]
- [video velocidad horizontal]
- [video presión]
- [video sólido]

Transmisión de un pulso de presión



(Formaggia et al, CMAME 2001)

Transmisión de un pulso de presión



Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

José M.ª Goicolea

Modelos basados en elasticidad no lineal

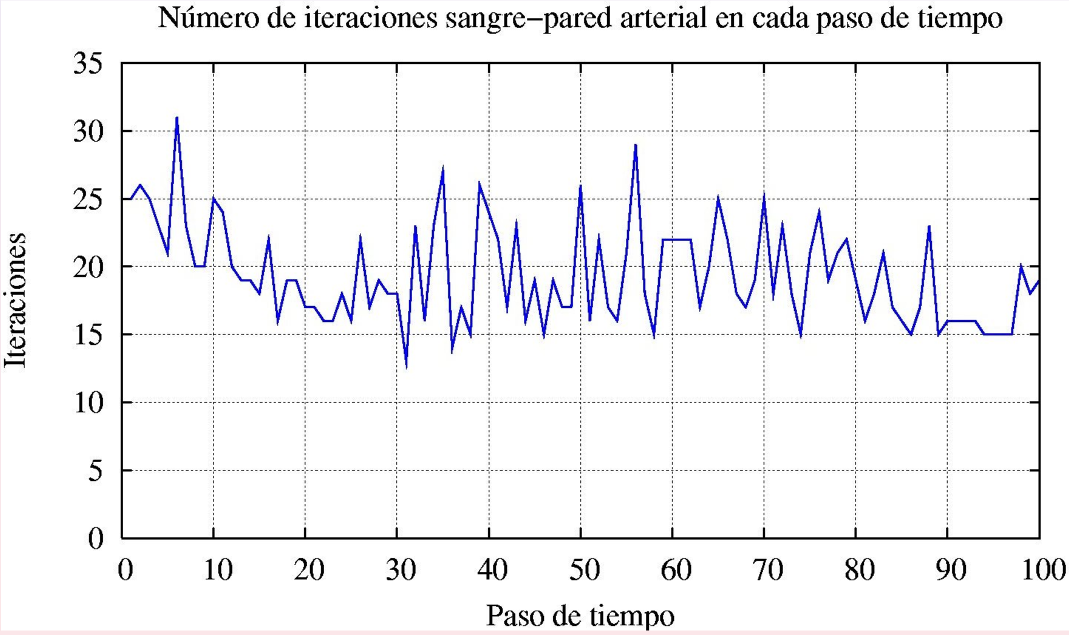
Modelos de elementos finitos

Técnicas de elementos finitos no lineales

Dinámica de fluidos

Interacción fluido-estructura

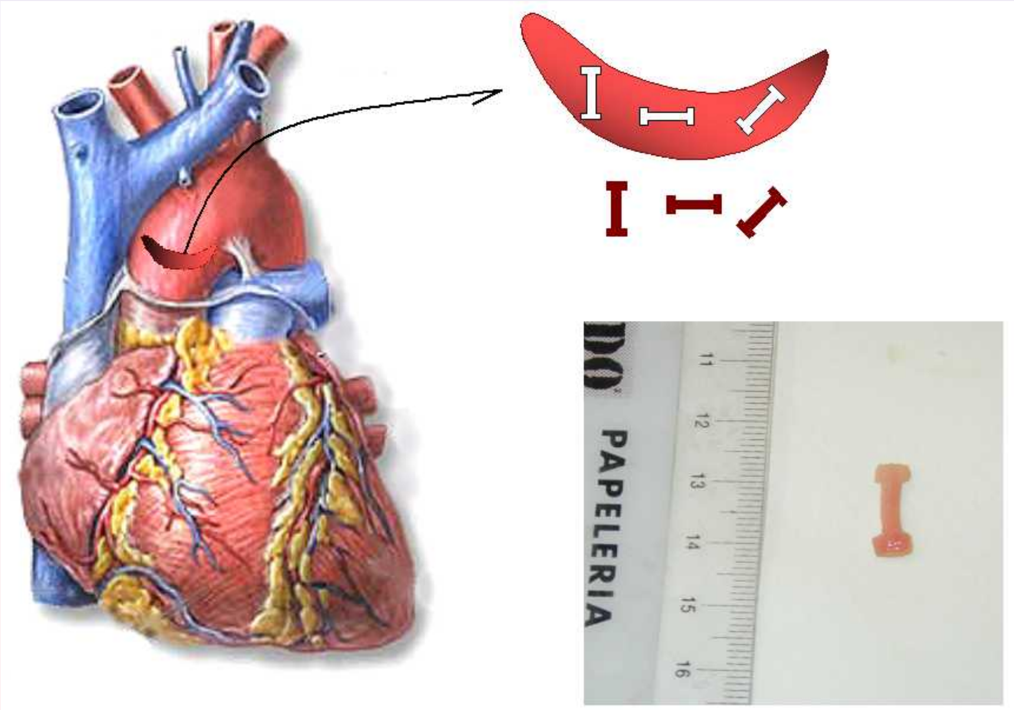
Iteraciones



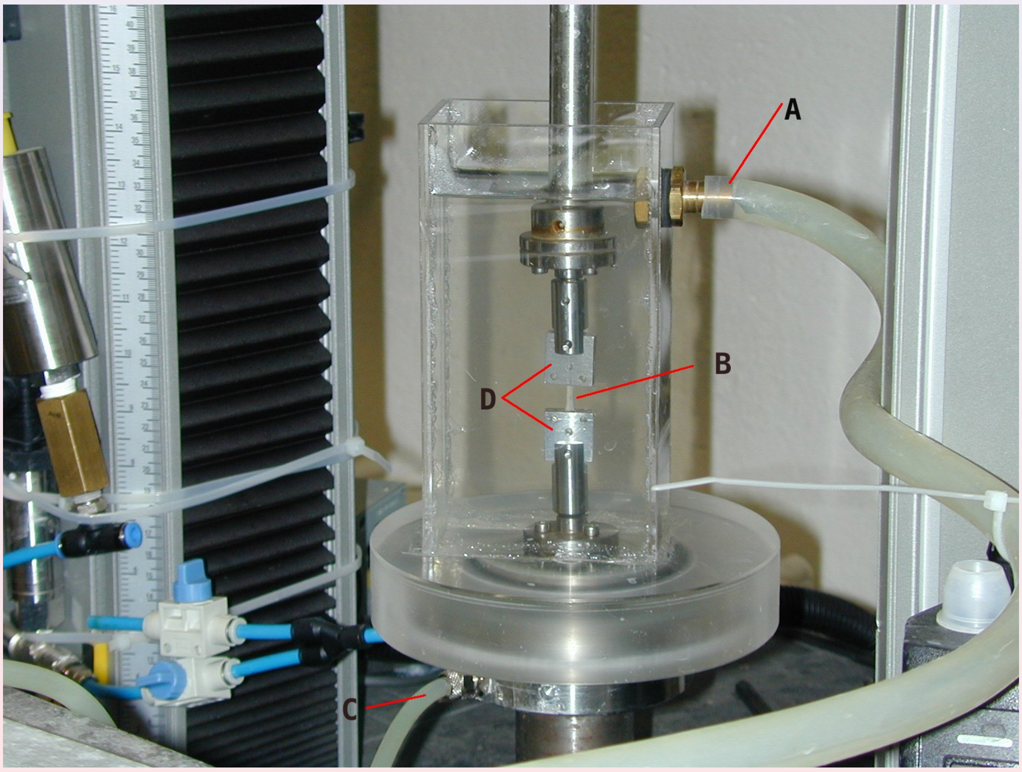
Parte III

Aplicaciones

Aorta humana: muestras



Aorta humana: dispositivo de ensayos de tracción



Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

José M.ª Goicolea

Aplicaciones cardiovasculares

Experimentos in-vitro

Crecimiento y remodelación

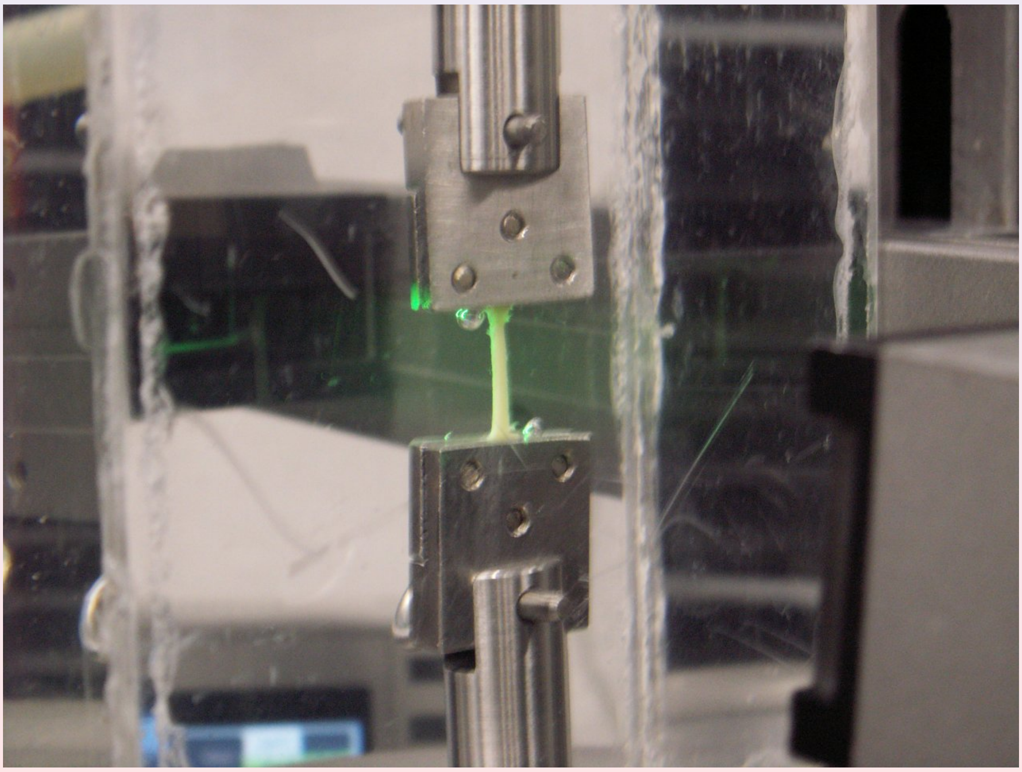
Influencia de tensiones iniciales

Geometría in-vivo

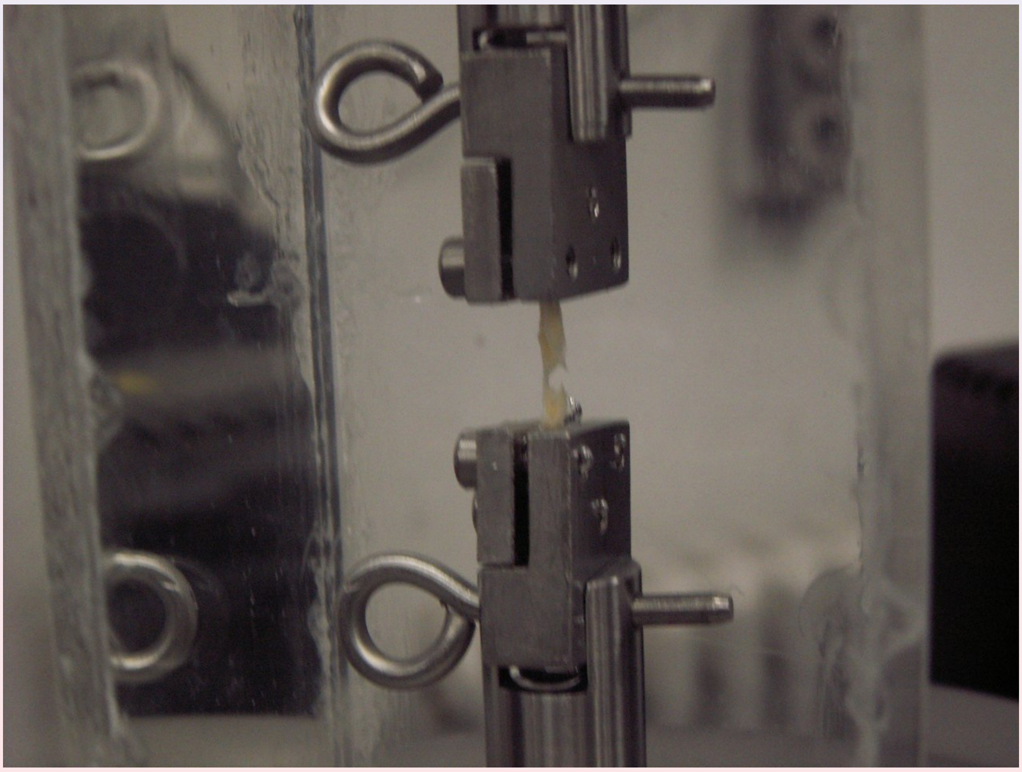
Interacción flujo sanguíneo – pared arterial

Conclusión

Aorta humana: ensayos de tracción



Aorta humana: ensayos de tracción



Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

José M.ª Goicolea

Aplicaciones cardiovasculares

Experimentos in-vitro

Crecimiento y remodelación

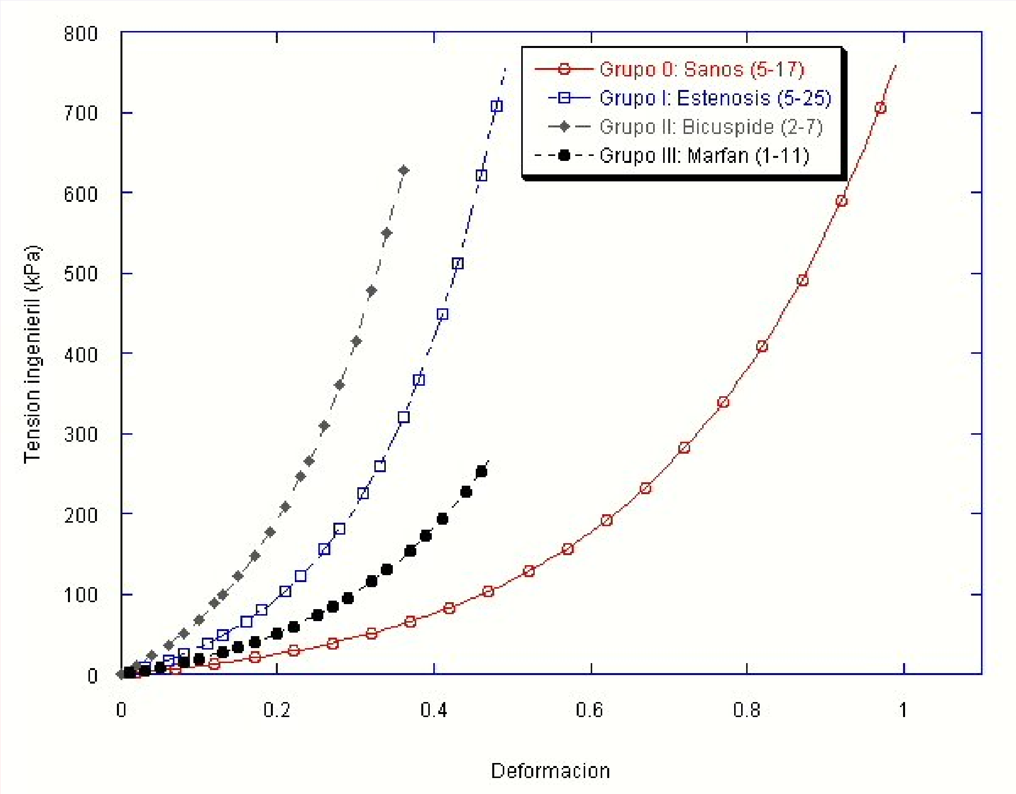
Influencia de tensiones iniciales

Geometría in-vivo

Interacción flujo sanguíneo – pared arterial

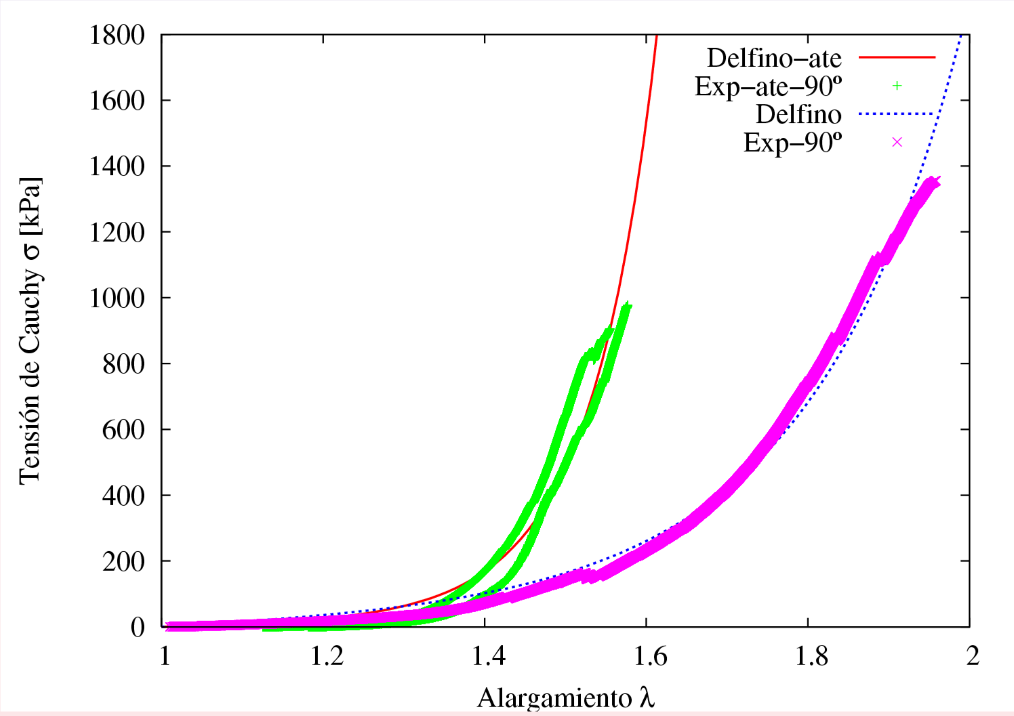
Conclusión

Aorta humana: ensayos de tracción



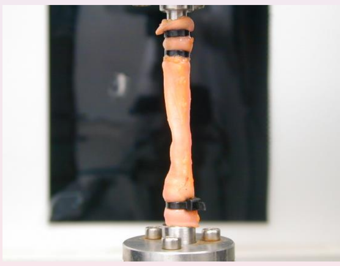
Sección de aorta ascendente con ateroma

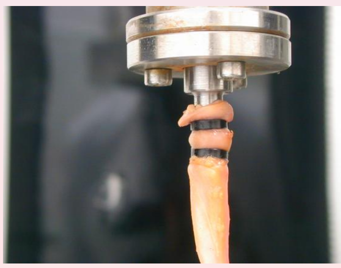
Respuesta tejido aorta sana / con ateroma



Obtención de propiedades mecánicas de arterias

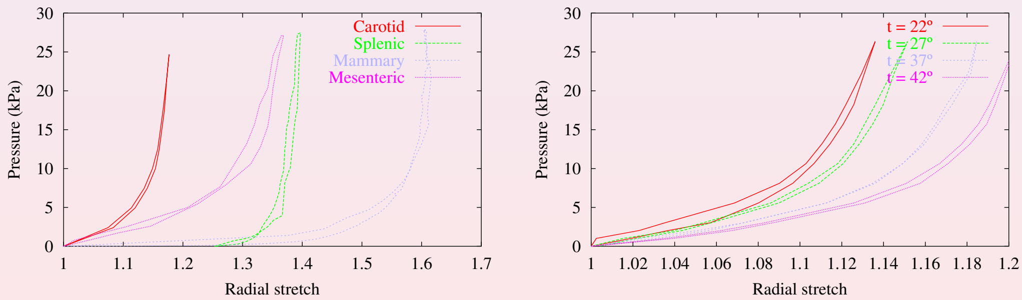
- post-mortem Autopsies (carotid, splenic, mamary and mesenteric, kept frozen).
- Internal pressure cycles, fixed axial stretches. [Guinea, Elices, Atienza, Aragoncillo 2003]





Resultados experimentales representativos

Histological tests of carotid (left) and splenic (right) arteries.



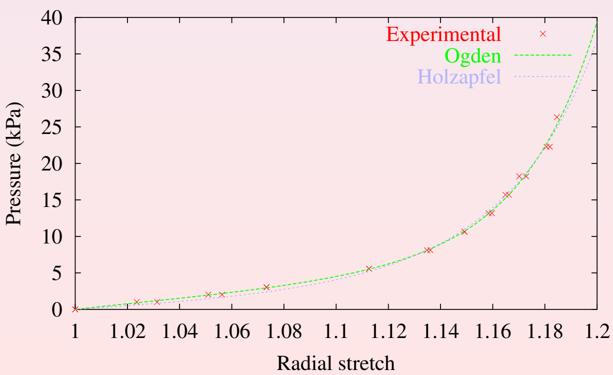
Tests of different arteries at 37°C (left). Carotids at different temperatures (right).

Adjustment of models for carotid artery

Criteria for the adjustment: minimize the error function

$$\epsilon = \sum_{a=1}^{n} \left(P_a - P(\lambda_a; p_1, p_2, \ldots, p_n)\right)^2 .$$

Resulting parameters for Ogden's model are $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 11$ and $\alpha_3 = 48$, $\mu_1 = -113{,}787$ kPa, $\mu_2 = 30{,}451$ kPa and $\mu_3 = 0{,}073$ kPa.
Resulting parameters for Holzapfel's model are $k_1 = 37{,}228$ kPa, $k_2 = 10{,}46$, $\phi = 80^\circ$ and $c = 1{,}151$ kPa.



Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

José M.ª Goicolea

Aplicaciones cardiovasculares

Experimentos in-vitro

Crecimiento y remodelación

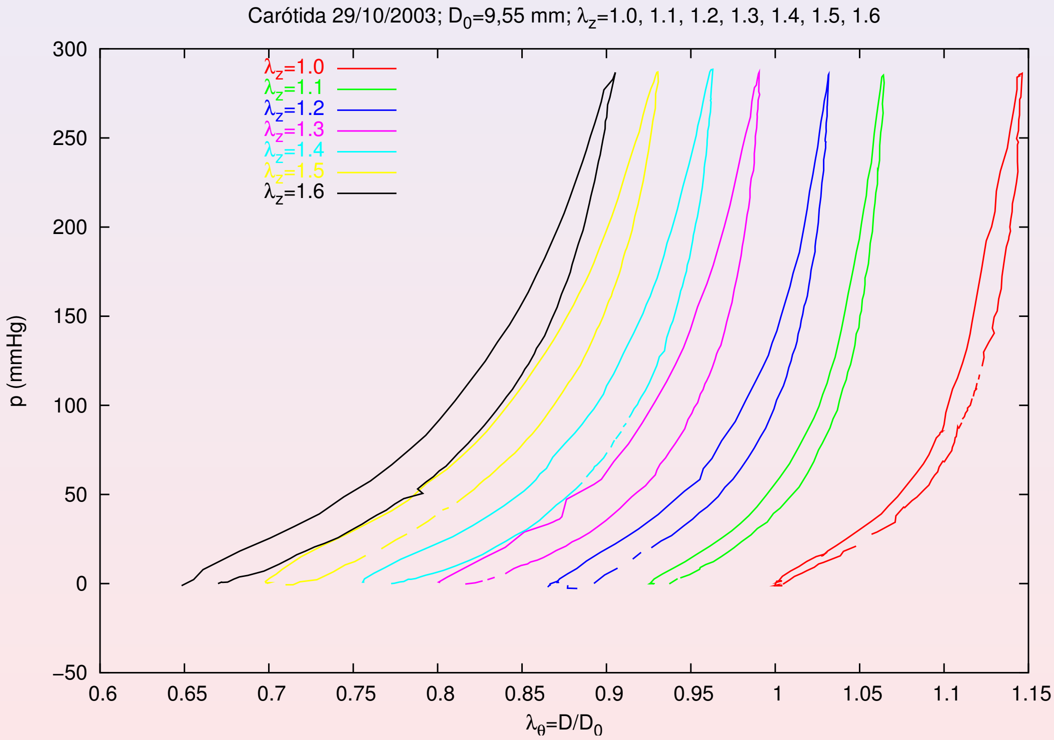
Influencia de tensiones iniciales

Geometría in-vivo

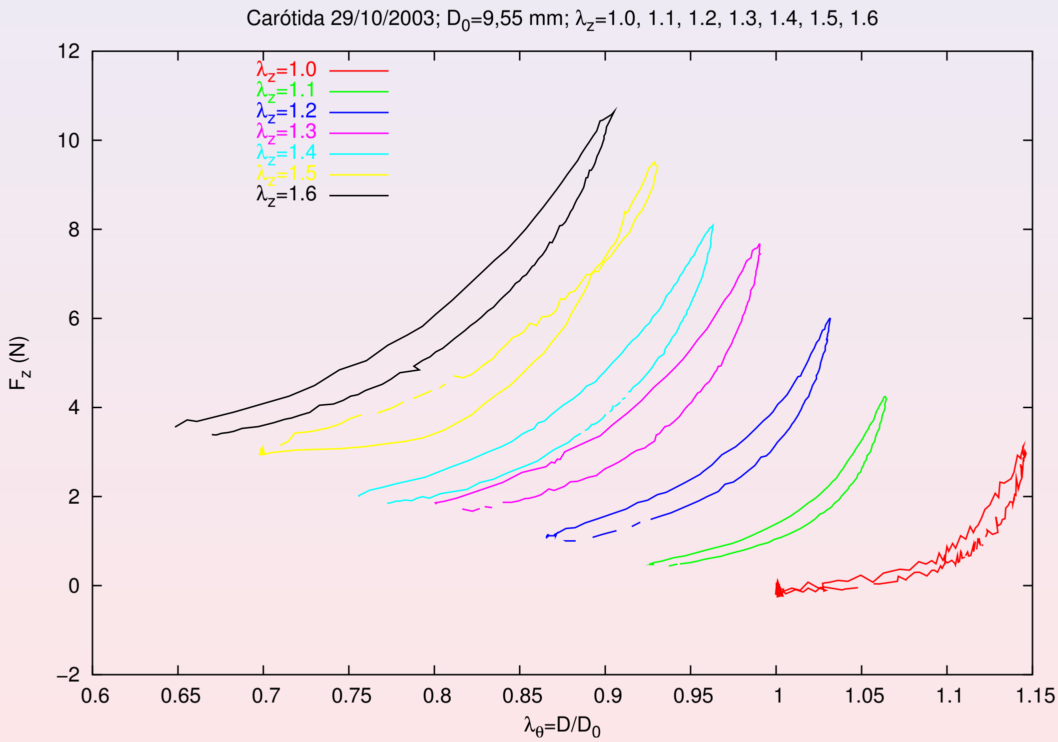
Interacción flujo sanguíneo – pared arterial

Conclusión

Experimentos: Presión – alargamiento radial



Experimentos: Carga axial pasiva



Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

José M.ª Goicolea

Aplicaciones cardiovasculares

Experimentos in-vitro

Crecimiento y remodelación

Influencia de tensiones iniciales

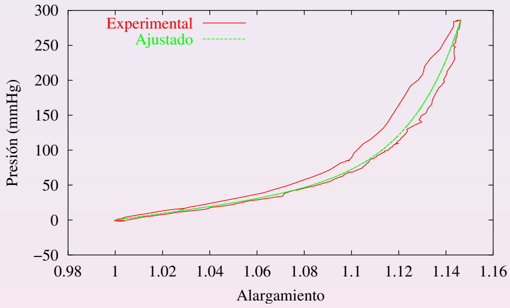
Geometría in-vivo

Interacción flujo sanguíneo – pared arterial

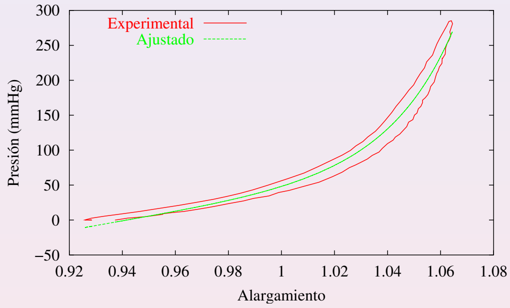
Conclusión

Ajuste de modelo anisótropo

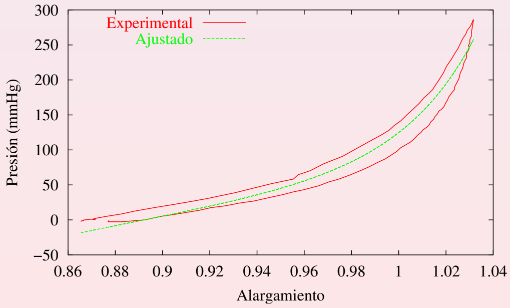
Fit for $\lambda_z = \{1{,}0, 1{,}1, 1{,}2, 1{,}3\}$. *Curves Pressure–radial stretch*



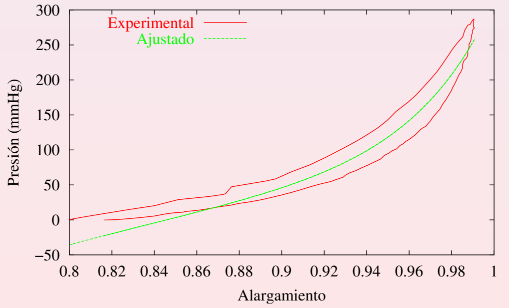
$\lambda_z = 1{,}0$



$\lambda_z = 1{,}1$



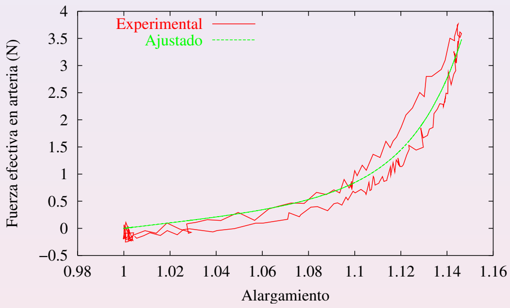
$\lambda_z = 1{,}2$



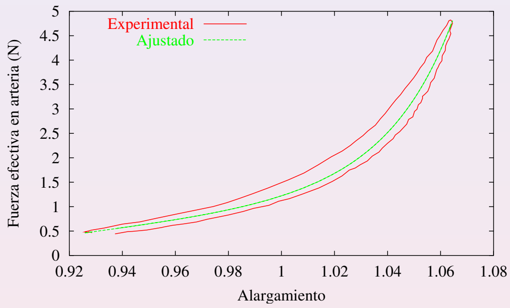
$\lambda_z = 1{,}3$

Ajuste de modelo anisótropo

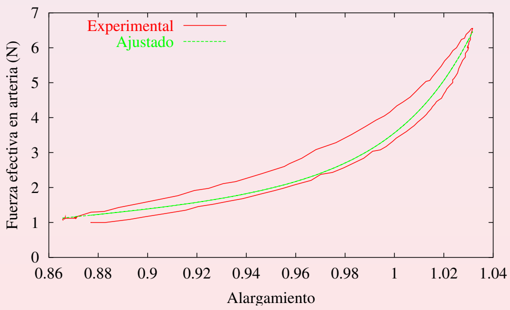
Fit for $\lambda_z = \{1{,}0, 1{,}1, 1{,}2, 1{,}3\}$. *Curves axial load–radial stretch*



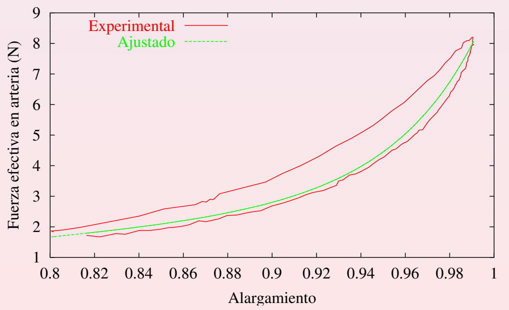
$\lambda_z = 1{,}0$



$\lambda_z = 1{,}1$



$\lambda_z = 1{,}2$



$\lambda_z = 1{,}3$

Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

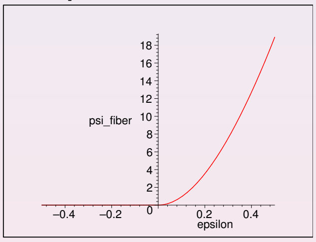
José M.ª Goicolea

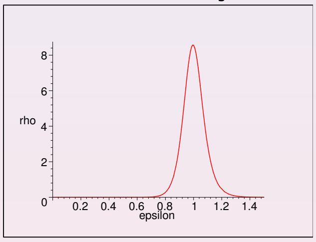
Aplicaciones cardiovasculares
Experimentos in-vitro
Crecimiento y remodelación
Influencia de tensiones iniciales
Geometría in-vivo
Interacción flujo sanguíneo – pared arterial

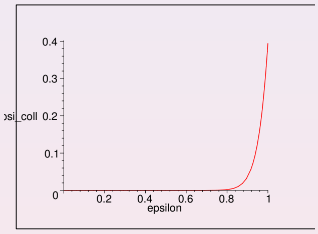
Conclusión

Modelos de distribución

Distribution of engagement stretch of individual fibers
(Zulliger et al [J. Biom. 2004])
Response of an individual fiber by convolution:



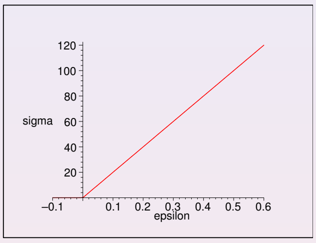
$*$


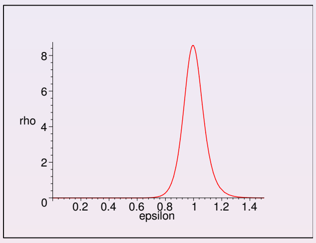
$=$


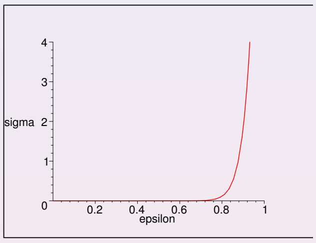
$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_{\text{fiber}}(\varepsilon - x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = W_{\text{collagen}}(\varepsilon); \qquad \varepsilon = \lambda - 1$$

- $W_{\text{fiber}}(\varepsilon)$: simple elastic model for fiber
- $\rho(\varepsilon)$ Normal, log-logistic distributions

Simple models for fiber response yield realistic laws for collagen:

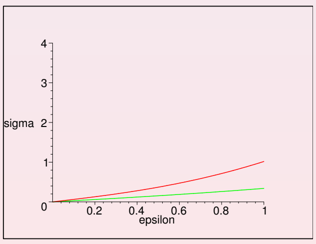


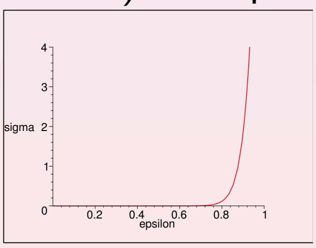
$*$


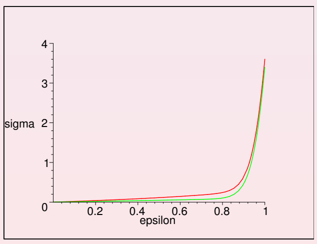
$=$


$\sigma_{\text{fiber}} = E\varepsilon$ $\qquad \rho(\varepsilon) \qquad \sigma_{\text{collagen}}$

Composition with (modified) isotropic elastin response:



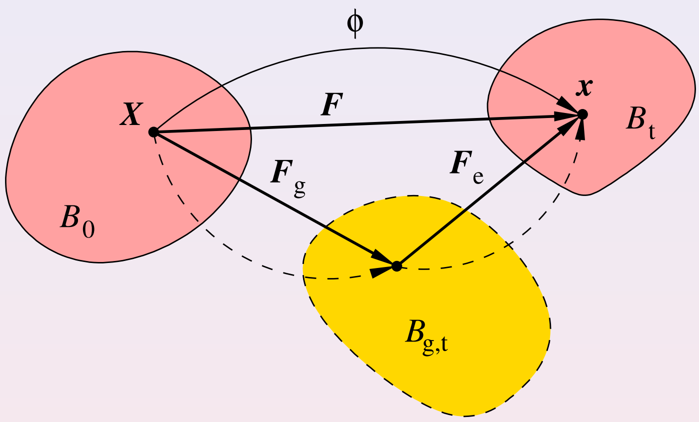
$+$


$=$


$f_{\text{elastin}} \cdot \sigma_{\text{elastin}} \qquad f_{\text{collagen}} \cdot \sigma_{\text{collagen}} \qquad \sigma_{\text{tissue}}$

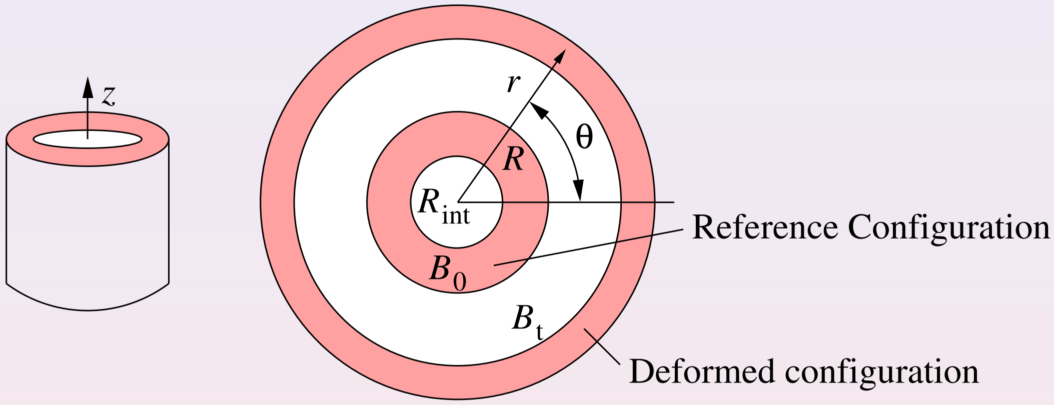
Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos
José M.ª Goicolea
Aplicaciones cardiovasculares
Experimentos in-vitro
Crecimiento y remodelación
Influencia de tensiones iniciales
Geometría in-vivo
Interacción flujo sanguíneo – pared arterial
Conclusión

Marco para modelo de crecimiento



- Decomposition $\mathbf{F} = \mathbf{F}_\mathrm{e}\cdot\mathbf{F}_\mathrm{g}$. (E.K. Rodríguez et al [J. Biom. 1994])
- $\mathcal{B}_{g,t}$ stress-free configuration, *not kinematically compatible*;
- Without loss of generality: $\mathbf{F}_\mathrm{g} = \mathbf{U}_\mathrm{g}$ (symmetric, > 0).
- Cauchy Stress tensor $\boldsymbol{\sigma}$ function of $\mathbf{F}_\mathrm{e}$.
- Growth models: $\dot{\mathbf{U}}_\mathrm{g}(\boldsymbol{\sigma}) = \dot{\mathbf{U}}_\mathrm{g}(\widehat{\boldsymbol{\sigma}})$, with $\widehat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}^\mathrm{T}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{R}$. (co-rotational Cauchy stress)

Modelo de crecimiento de Taber



Taber [J. Biomech. Eng. 1998]
In terms of principal (cylindrical) stretches:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \lambda_{\mathrm{g},r}}{\partial t} = \dfrac{1}{T_r}\dfrac{\sigma_\theta - \sigma_{\theta,0}}{(\sigma_{\theta,0})_\mathrm{m}} \\ \dfrac{\partial \lambda_{\mathrm{g},\theta}}{\partial t} = \dfrac{1}{T_\theta}\dfrac{\sigma_\theta - \sigma_{\theta,0}}{(\sigma_{\theta,0})_\mathrm{m}} + \dfrac{1}{T_\tau}\dfrac{\tau - \tau_0}{(\tau_0)_\mathrm{m}} \exp\left(-\alpha\left(\dfrac{R}{R_\mathrm{int}} - 1\right)\right) \end{cases}$$

(No growth for λ_z)

Modelo de crecimiento propuesto

Hipótesis básicas

- Generalisation of Taber's model for arbitrary geometry
- Growth rate at a point $\mathbf{X}$ depends *linearly* on:
  - Local wall stress difference $(\widehat{\boldsymbol{\sigma}} - \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_0)$ from a given equilibrium state $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_0$;
  - Non-local shear stress difference $(\tau_{\mathrm{npi}} - \tau_0)$ at *nearest point in the intima* $\mathcal{I}$ $(\mathbf{X}_{\mathrm{npi}})$, from a given equilibrium state τ_0;
  - Previously "grown" volume, $\mathbf{U}_{\mathrm{g}}$
- Material directions in reference configuration $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ and $\mathbf{w}$ (for axial symmetry: $\mathbf{u}_\theta$, $\mathbf{u}_z$ and $\mathbf{u}_r$).
- Current configuration geometric parameters: normal $\mathbf{n}_{\mathrm{npi}}$, mean curvature $H_{\mathrm{M,npi}}$

Modelo de crecimiento propuesto

Ley de crecimiento (1)

Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

José M.ª Goicolea

Aplicaciones cardiovasculares

Experimentos in-vitro

Crecimiento y remodelación

Influencia de tensiones iniciales

Geometría in-vivo

Interacción flujo sanguíneo – pared arterial

Conclusión

Rate of right stretch tensor:

$$\boxed{\mathbf{U}_{\mathrm{g}}^{-1}\cdot\dot{\mathbf{U}}_{\mathrm{g}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}:(\widehat{\boldsymbol{\sigma}} - \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_0) + (\tau_{\mathrm{npi}} - \tau_{0,\mathrm{npi}})\mathbf{A}}, \qquad \text{where:}$$

- $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_0$ defines local (hoop) equilibrium stress,
$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_0 = \sigma_0(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})$$
- τ_{npi} defines shear stress in the *intima*,
$$\tau_{\mathrm{npi}} = |\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{npi}}| = |(\mathbf{1} - \mathbf{n}_{\mathrm{npi}}\otimes\mathbf{n}_{\mathrm{npi}})\cdot(\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{npi}}\cdot\mathbf{n}_{\mathrm{npi}})|.$$
- Range for σ_0 between 100–200 kPa, whereas $\tau_0 \approx 2{,}5$ Pa.
- $\boldsymbol{\mathcal{A}}$: 4th order tensor with minor symmetries $\mathcal{A}_{abcd} = \mathcal{A}_{abdc} = \mathcal{A}_{bacd}$,
- $\mathbf{A}$: 2nd order symmetric tensor.
- Growth rate in *grown config.*: $\mathrm{tr}(\mathbf{U}_{\mathrm{g}}^{-1}\cdot\dot{\mathbf{U}}_{\mathrm{g}}) = \dfrac{\mathrm{d}\dot{V}_g}{\mathrm{d}V_g}$.

Modelo de crecimiento propuesto
Ley de crecimiento (2)

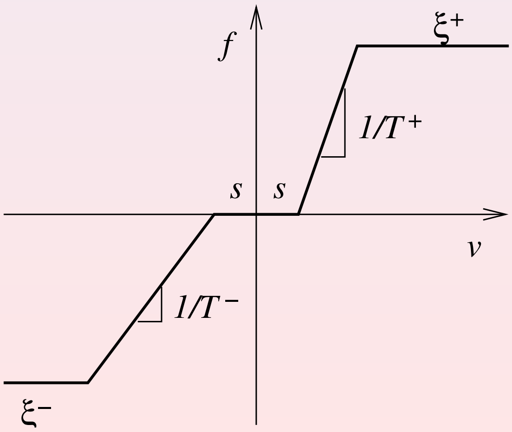
Expressions for tensorial moduli:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \frac{1}{\sigma_0}\left(\frac{1}{T_\theta}\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} + \frac{1}{T_z}\mathbf{v}\otimes\mathbf{v} + \frac{1}{T_r}\mathbf{w}\otimes\mathbf{w}\right)\otimes\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} \quad \text{and}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\tau_{0,\mathrm{npi}}}\frac{1}{T_\tau}\exp\left(-2\alpha H_{\mathrm{M,npi}}|\mathbf{X}_{\mathrm{npi}} - \mathbf{X}|\right)\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}.$$

Growth–Stimulus functions:

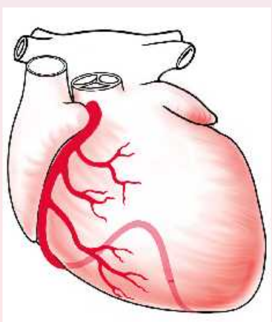
- Growth rates: $1/T^-$, $1/T^+$
- *Lazy zone*: s
- Limits: ξ^-, ξ^+

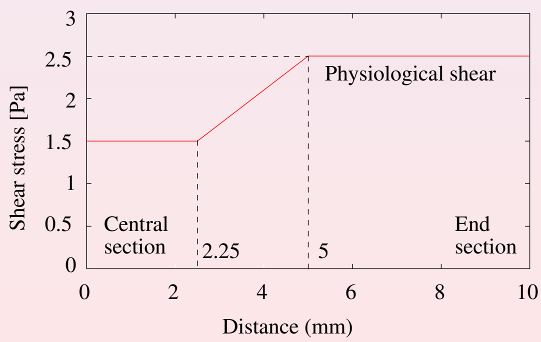


Application: Stenotic Process

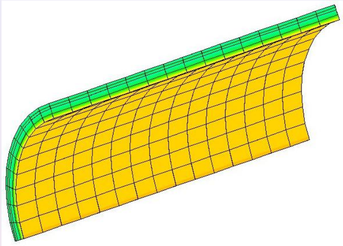
Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos
José M.ª Goicolea
Aplicaciones cardiovasculares
Experimentos in-vitro
Crecimiento y remodelación
Influencia de tensiones iniciales
Geometría in-vivo
Interacción flujo sanguíneo – pared arterial
Conclusión

- Idealised model in right coronary artery
- Cylindrical tube with internal radius 2 mm, thickness 0,55 mm and length 2×10 mm (symmetric).
- Anisotropic nonlinear elastic material
- Actions: reduced shear stress in central section and constant 100 mmHg pressure in deformed configuration.

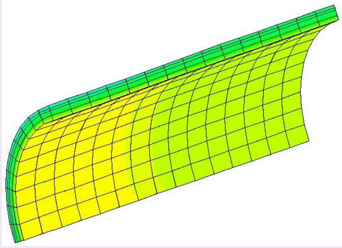




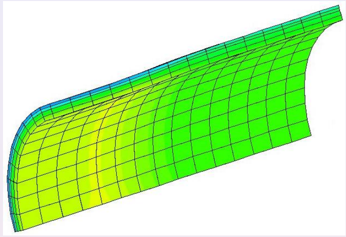
Contour maps of major principal stresses [Pa]



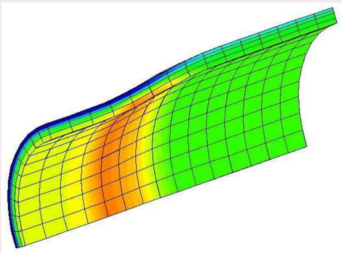
Initial



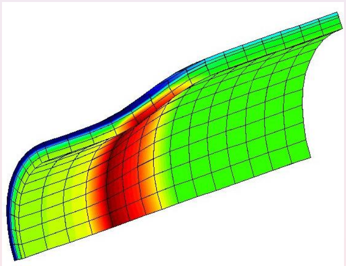
10 days



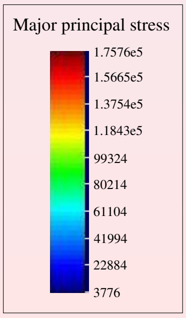
1 month



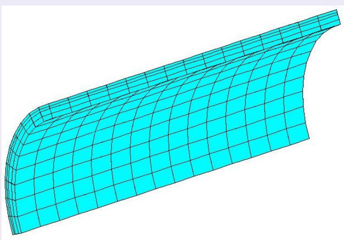
6 months



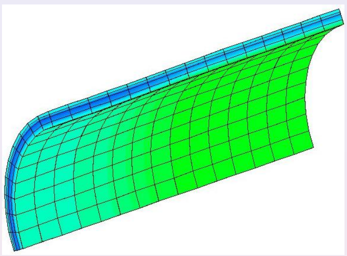
12 months



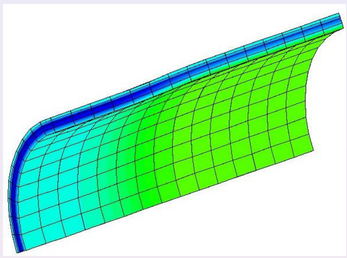
Contour Maps of Volume Ratio (J)



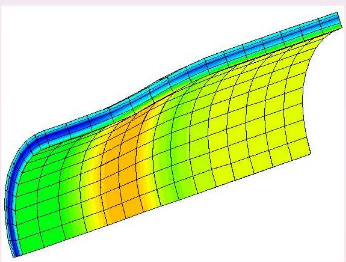
Initial



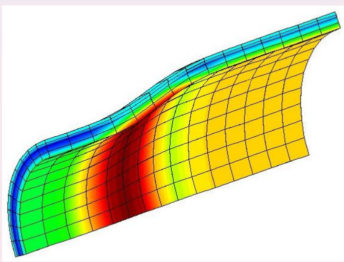
10 days



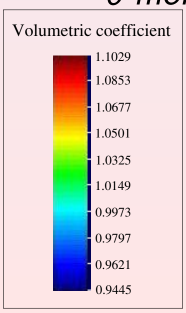
1 month



6 months



12 months



Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

José M.ª Goicolea

Aplicaciones cardiovasculares

Experimentos in-vitro

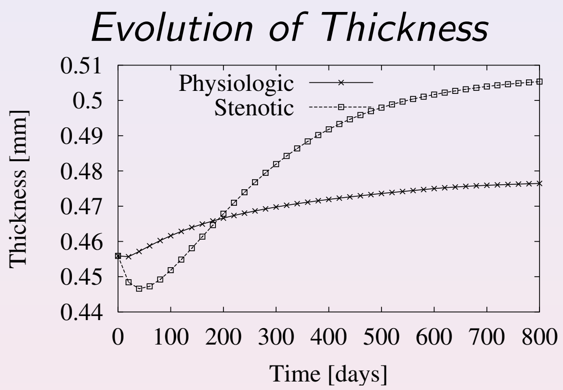
Crecimiento y remodelación

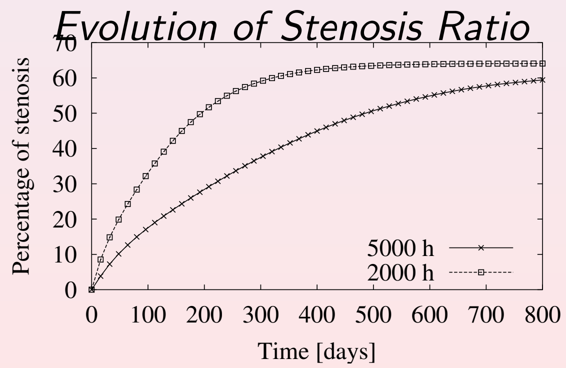
Influencia de tensiones iniciales

Geometría in-vivo

Interacción flujo sanguíneo – pared arterial

Conclusión

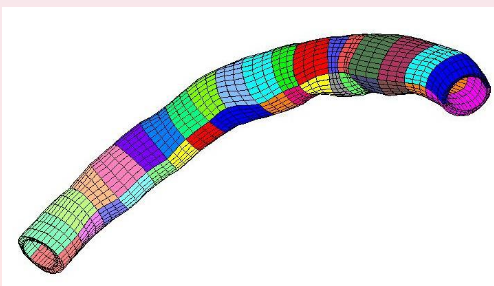




Crecimiento sobre geometría real

Modelo

- Right coronary artery reconstructed from in-vivo images
- geometry defined by NURBS volumes, considering anisotropy
- Boundary conditions: constrained displacements at ends 20352 DOF.
- Actions from blood flow obtained by previous CFD analysys (Crespo et al 2003) with stationary flow (200 ml/min).
- Growth from shear stress at endothelium not included



Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

José M.ª Goicolea

Aplicaciones cardiovasculares

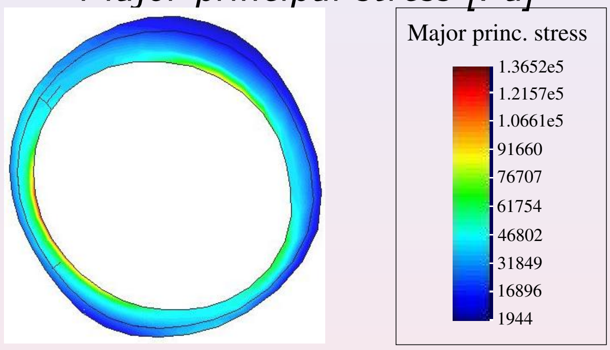
Experimentos in-vitro
Crecimiento y remodelación
Influencia de tensiones iniciales
Geometría in-vivo
Interacción flujo sanguíneo – pared arterial

Conclusión

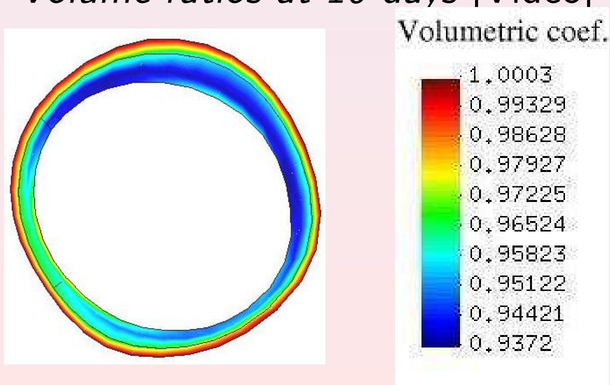
Crecimiento sobre geometría real

Resultados

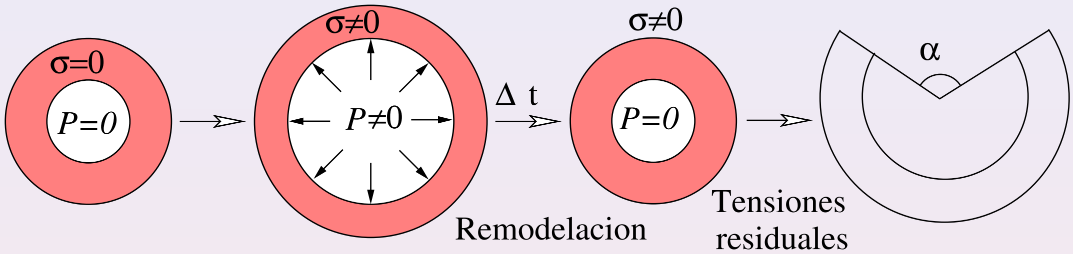
Major principal stress [Pa]

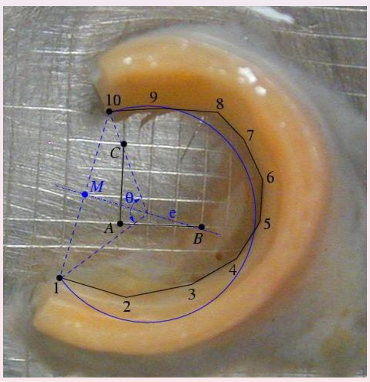


Volume ratios at 10 days [Video]



Tensiones iniciales

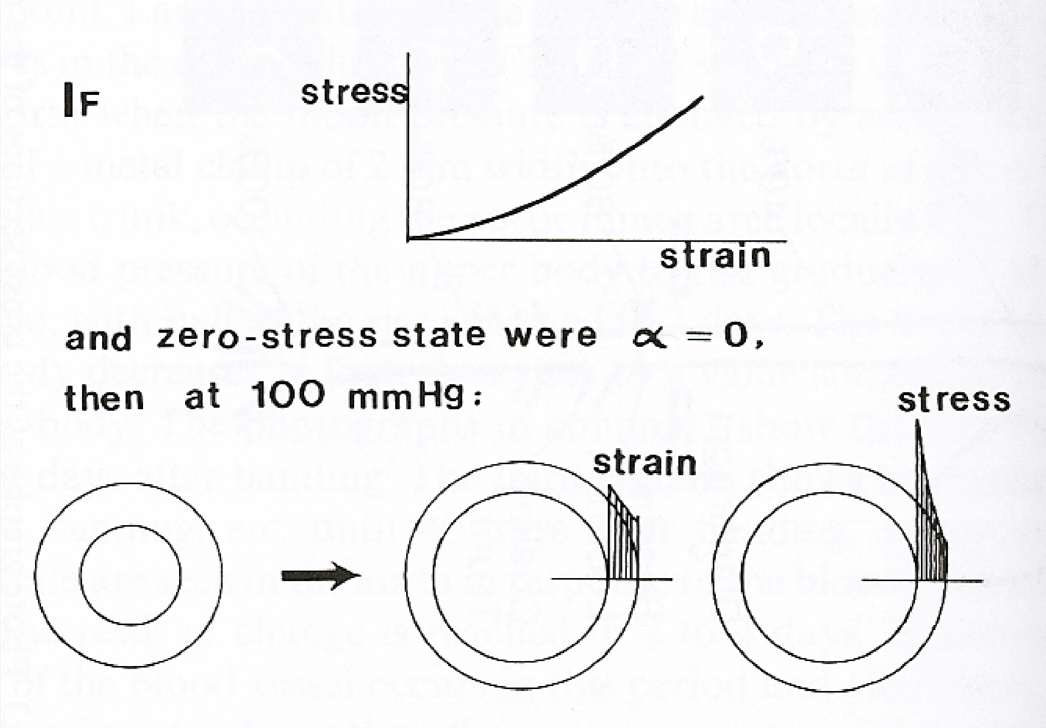




Opening angle method for a human carotid artery. Points A, B and C are defined for reference distances ($\overline{AB} = \overline{AC} = 3$ *mm). The angle obtained is* $\theta = 106^o$, *and the inner arc diameter is* 8,03 *mm (the external diameter of the closed artery was measured* 8,46 *mm by optical methods).*

- Models which rely on a previous stress-free and load-free global configuration.
- Models which rely on modified constitutive equations.

Tensiones iniciales



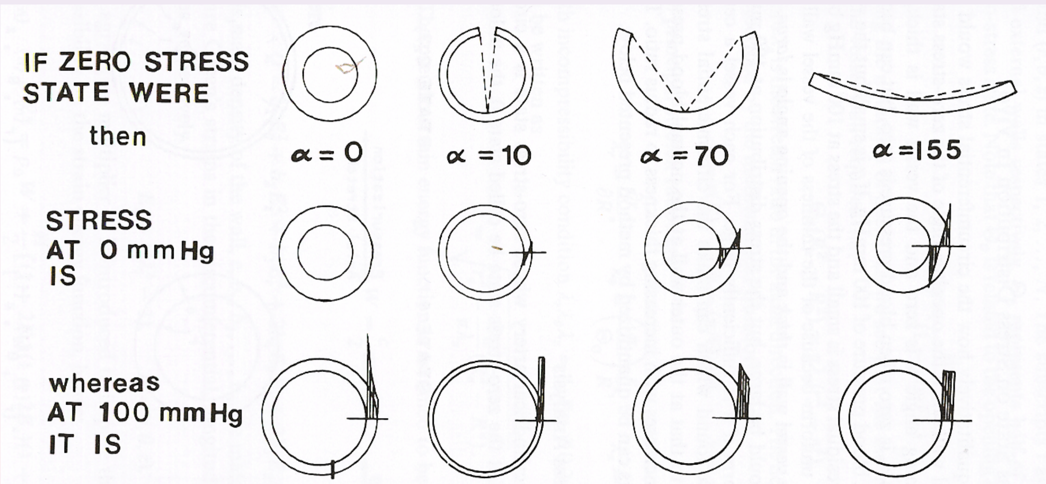
Tensiones iniciales

Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

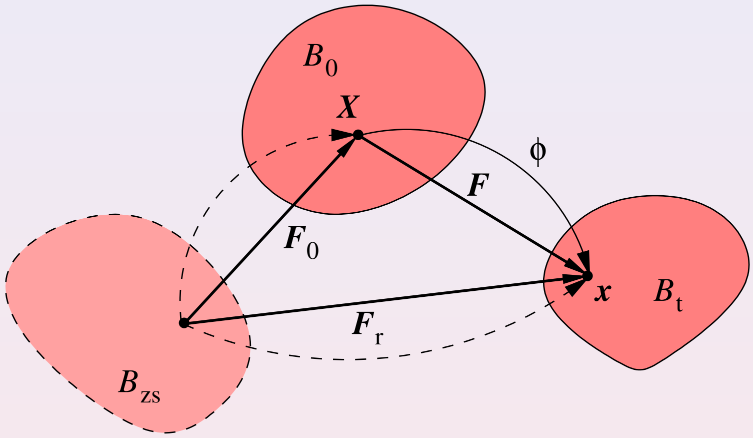
José M.ª Goicolea

Aplicaciones cardiovasculares
Experimentos in-vitro
Crecimiento y remodelación
Influencia de tensiones iniciales
Geometría in-vivo
Interacción flujo sanguíneo – pared arterial

Conclusión

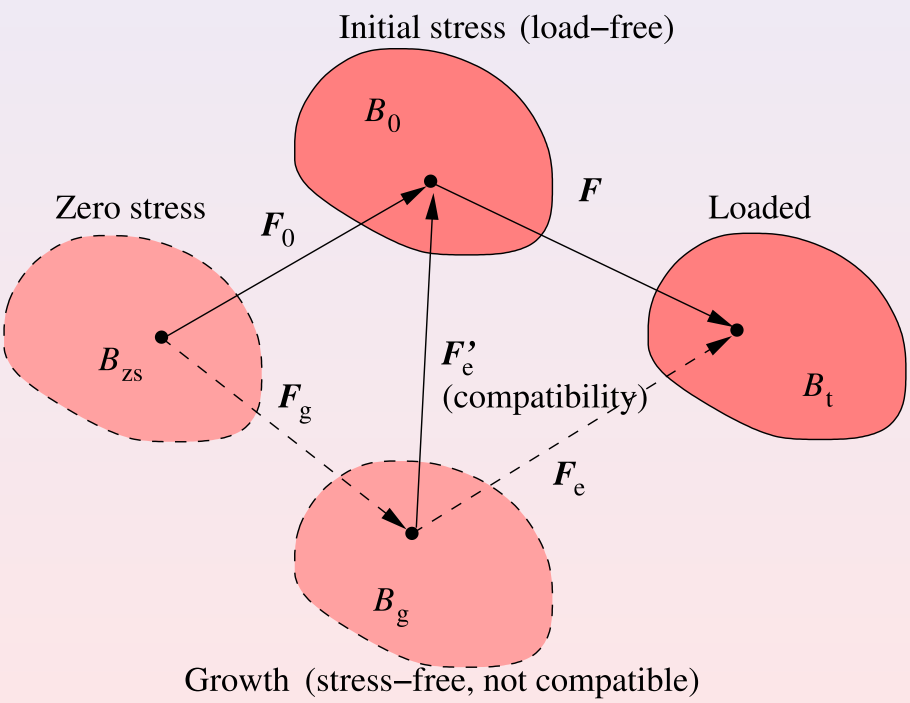


Marco para tensiones iniciales



- Multiplicative decomposition: $\mathbf{F}_\mathrm{r} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{F}_0$.
- A strain energy function W is considered in Zero-Stress configuration, $\mathcal{B}_\mathrm{zs}$ (incompatible).
- Initial stress $\boldsymbol{\sigma}_0$ in the reference configuration $\mathcal{B}_0$ (compatible, unloaded) is obtained as a function of $\mathbf{F}_0$.
- Constitutive equations for problem in $\mathcal{B}_0$: $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{F}) = \boldsymbol{\sigma}_\mathrm{r}(\mathbf{F}_\mathrm{r}) - \boldsymbol{\sigma}_0$.

Conexión entre crecimiento y tensiones iniciales



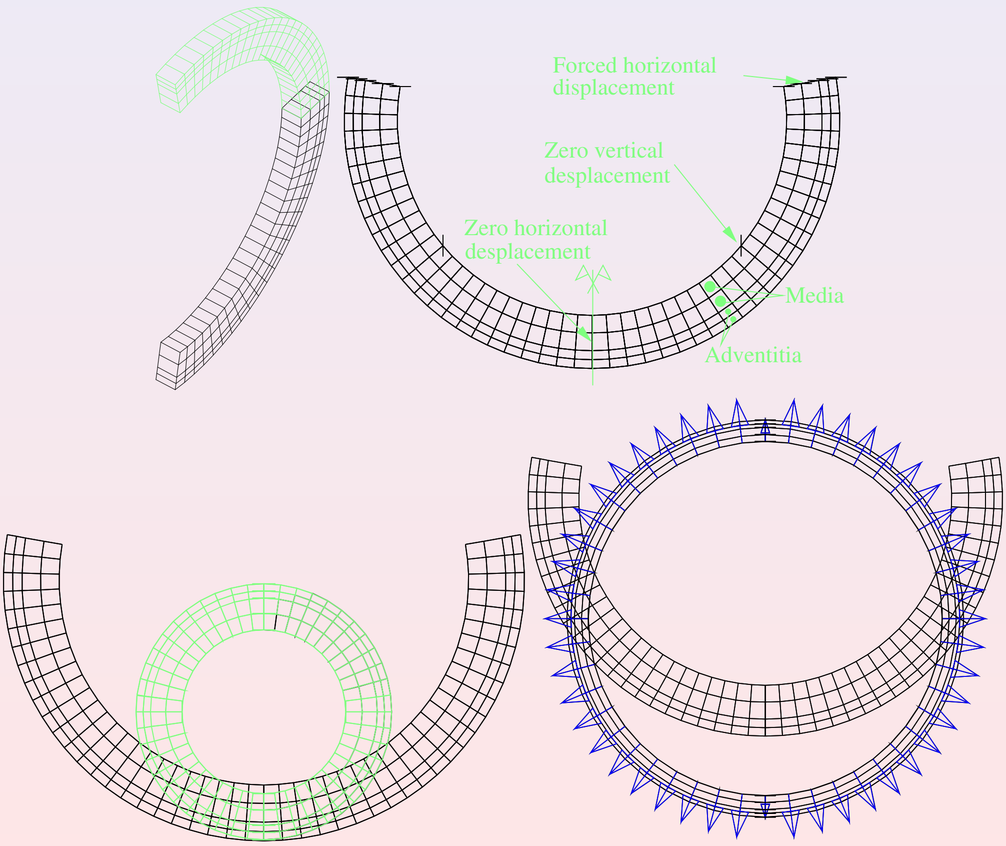
Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

José M.ª Goicolea

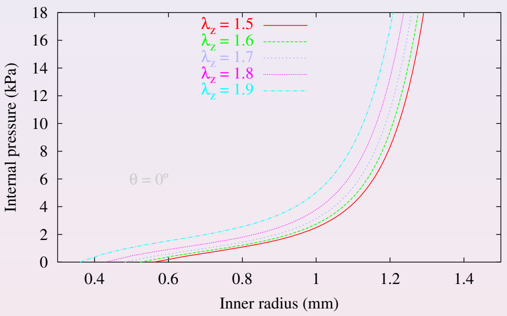
Aplicaciones cardiovasculares
Experimentos in-vitro
Crecimiento y remodelación
Influencia de tensiones iniciales
Geometría in-vivo
Interacción flujo sanguíneo – pared arterial

Conclusión

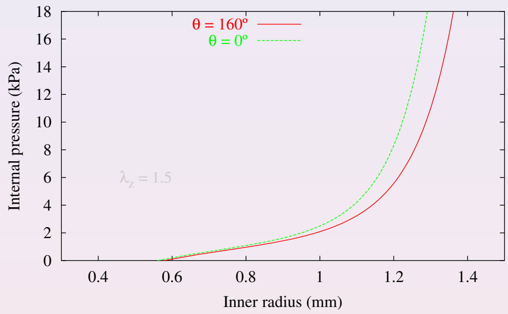
Método de cálculo



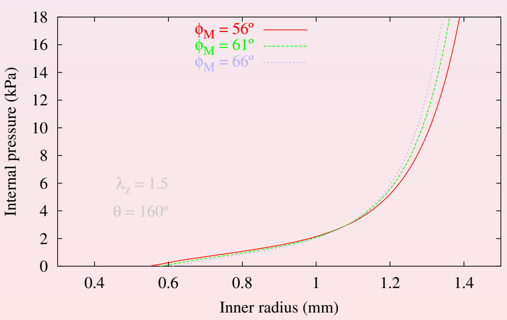
Resultados representativos (presión–radio)



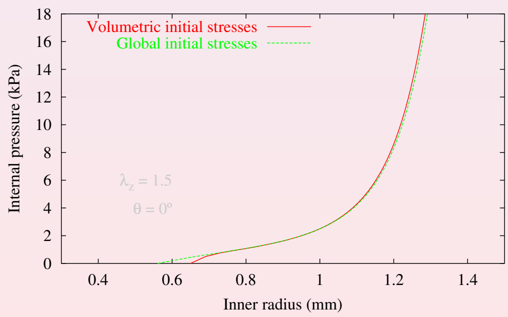
Initial λ_z, no initial θ



Initial $\lambda_z = 1{,}5$, $\theta = 0^\circ$, 160°



Variation of fiber angle in the media



Volumetric and global initial stresses

Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

José M.ª Goicolea

Aplicaciones cardiovasculares

Experimentos in-vitro

Crecimiento y remodelación

Influencia de tensiones iniciales

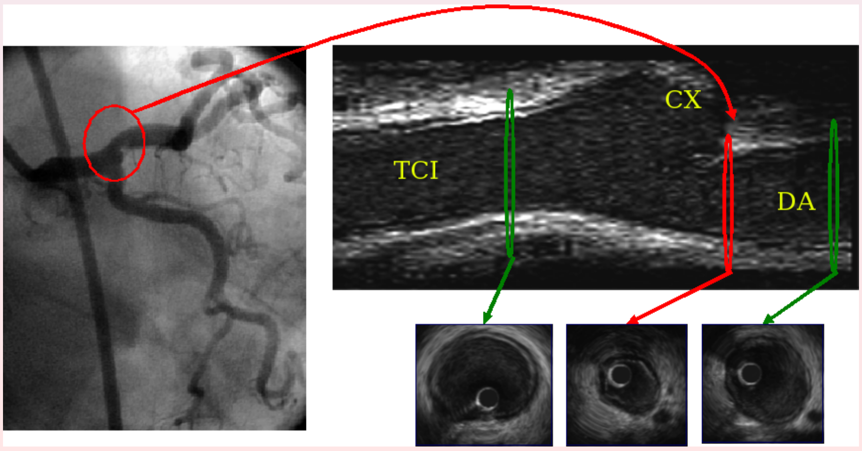
Geometría in-vivo

Interacción flujo sanguíneo – pared arterial

Conclusión

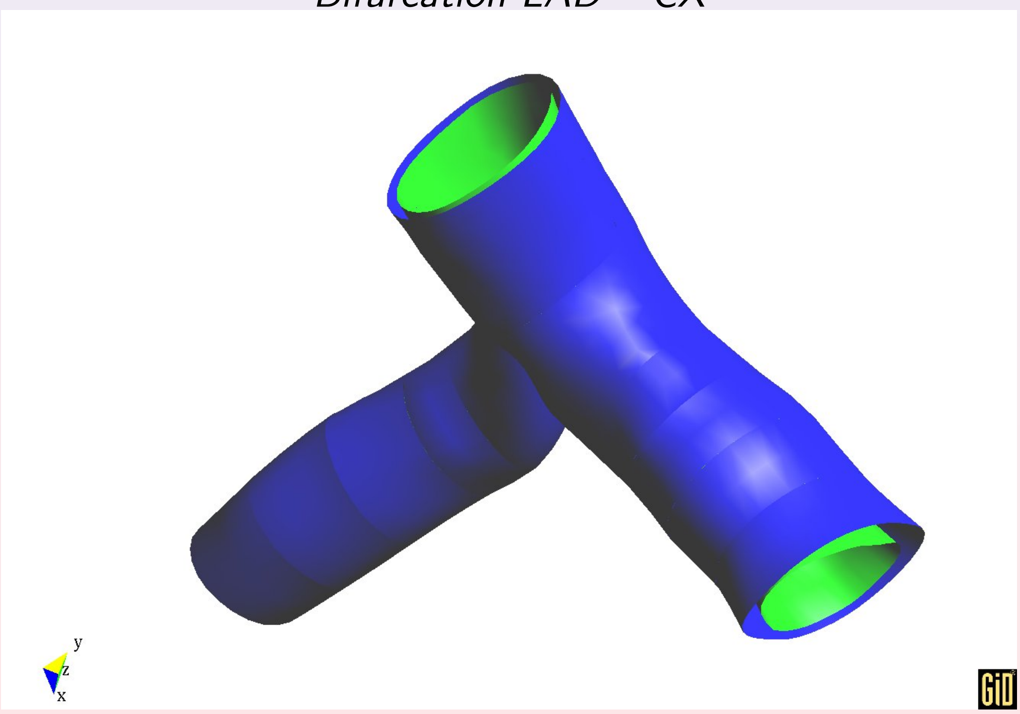
Obtención de geometría in-vivo

- In-vivo biplane [angiography] reconstructs catheter path
- Internal and external wall contours by segmentation of oriented in-vivo [IVUS images]
- Slager et al [Circulation 2000], Wentzel et al [J. Biom. 2003]
- Example: *Negative remodeling affecting flow in bifurcation*
  F.J. Goicolea, Hosp. Pta. de Hierro



3D Reconstruction - Lumen and Wall

Bifurcation LAD – CX



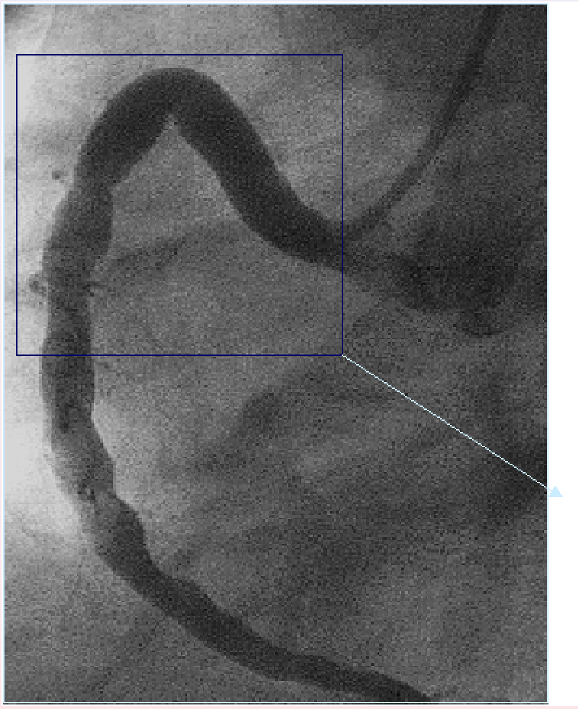
Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

José M.ª Goicolea

Aplicaciones cardiovasculares
Experimentos in-vitro
Crecimiento y remodelación
Influencia de tensiones iniciales
Geometría in-vivo
Interacción flujo sanguíneo – pared arterial

Conclusión

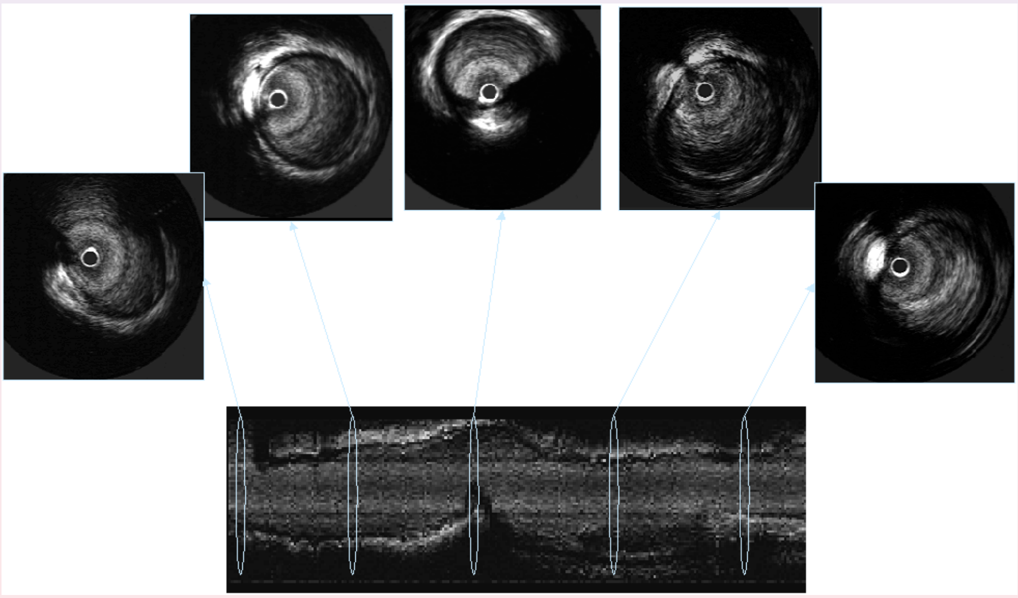
Reconstruction and fluid Mechanics models



- Coronary base situation with thrombus and aneurisms [video]
- Treatment with anti-clotting agents, 1 month [video]

Reconstruction and fluid Mechanics models

Reconstruction with IVUS ECG-gated (TOMTEC)



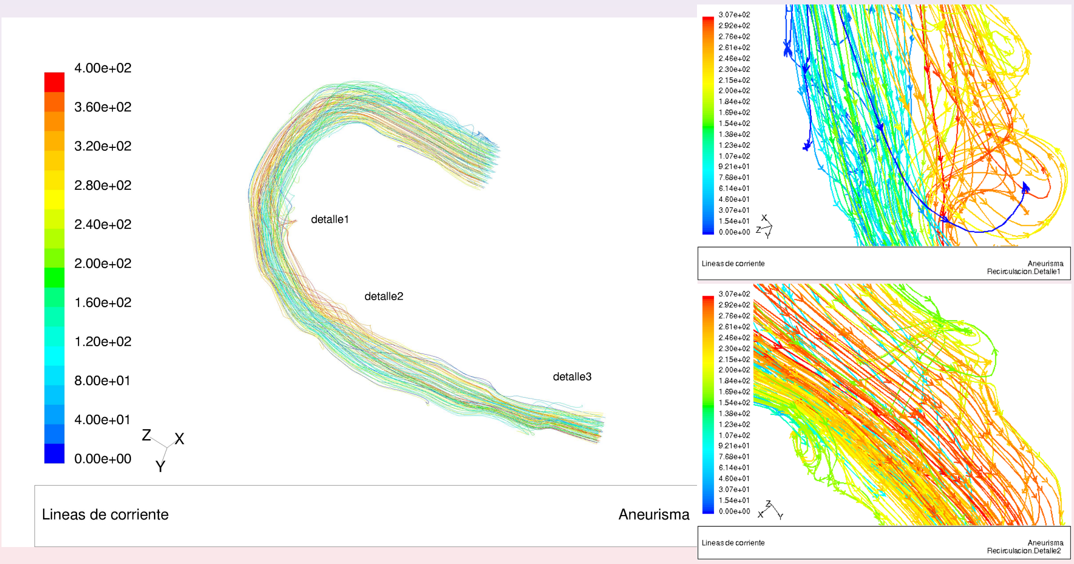
Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

José M.ª Goicolea

Aplicaciones cardiovasculares
Experimentos in-vitro
Crecimiento y remodelación
Influencia de tensiones iniciales
Geometría in-vivo
Interacción flujo sanguíneo – pared arterial

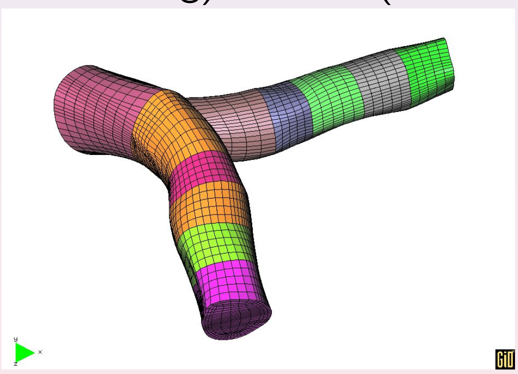
Conclusión

Reconstruction and fluid Mechanics models

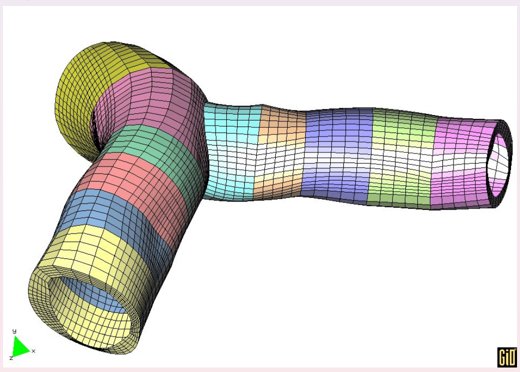


Modelo de bifurcación

Bifurcation LA (left Coronary Artery) to LAD (Left Anterior Descending) and CX (Circumflex).



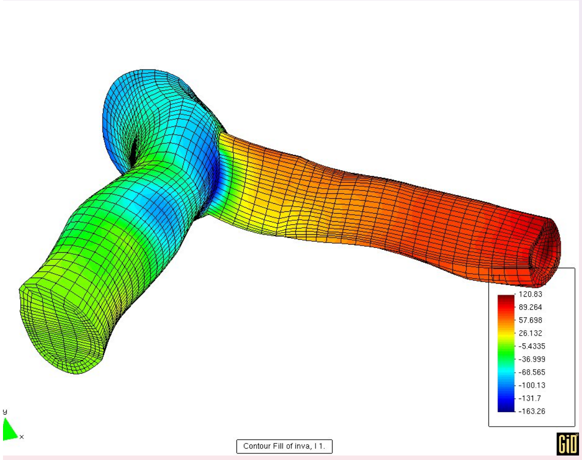
Fluid mesh: 16878 elements, 18936 nodes;



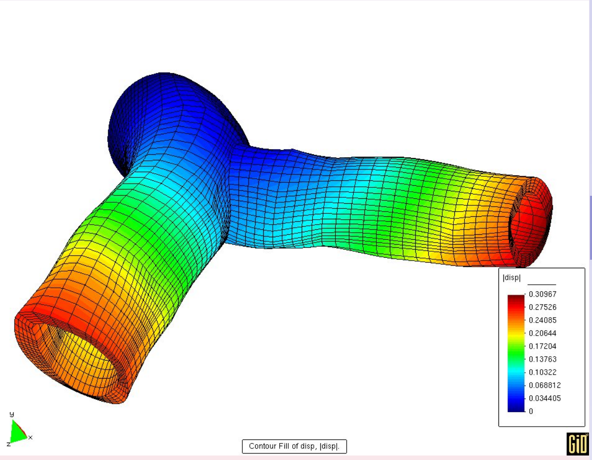
Solid mesh: 16425 elements, 20160 nodes.

[Gabaldón, Calvo, Goicolea & Luna, 2004]

Modelo de bifurcación

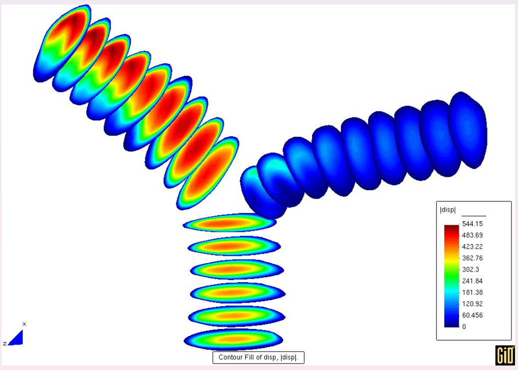


Fluid pressure contours

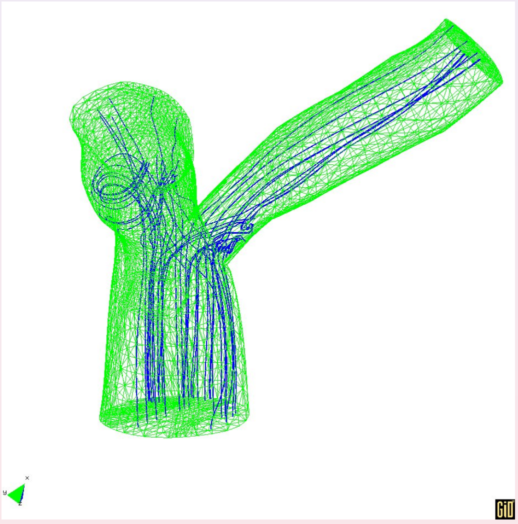


Displacement contours

Modelo de bifurcación



Velocity



Streamlines

Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

José M.ª Goicolea

Aplicaciones cardiovasculares

Experimentos in-vitro

Crecimiento y remodelación

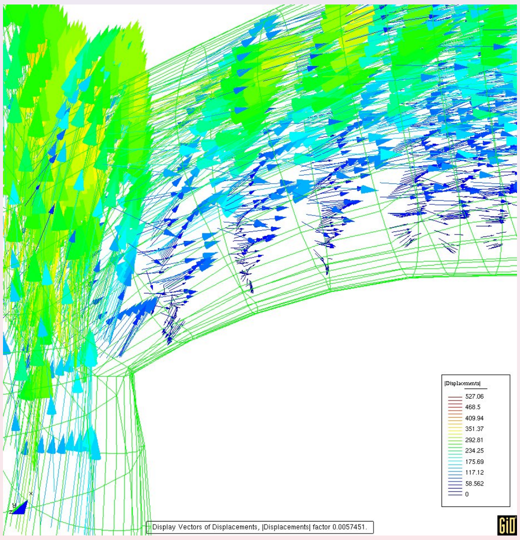
Influencia de tensiones iniciales

Geometría in-vivo

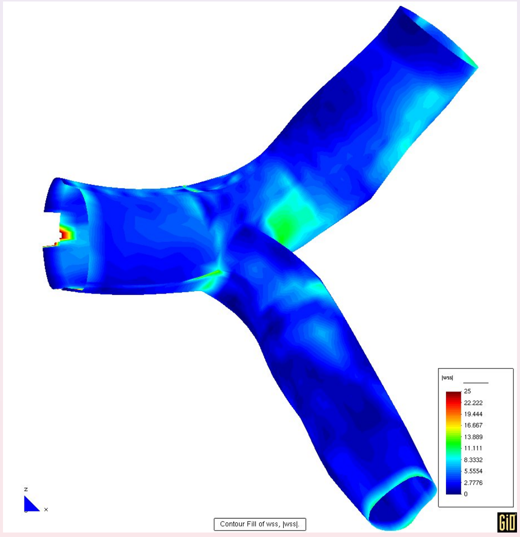
Interacción flujo sanguíneo – pared arterial

Conclusión

Modelo de bifurcación

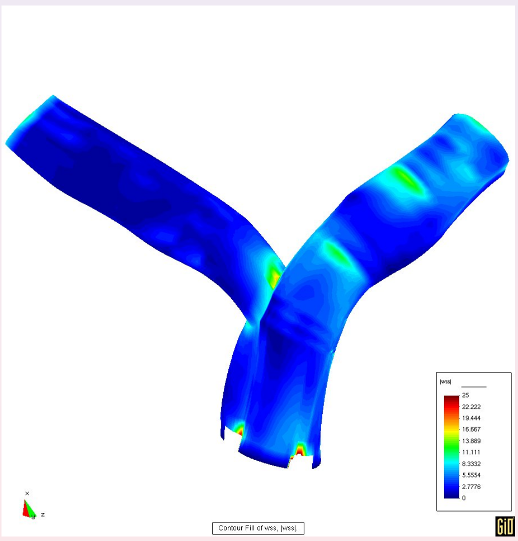


Velocity

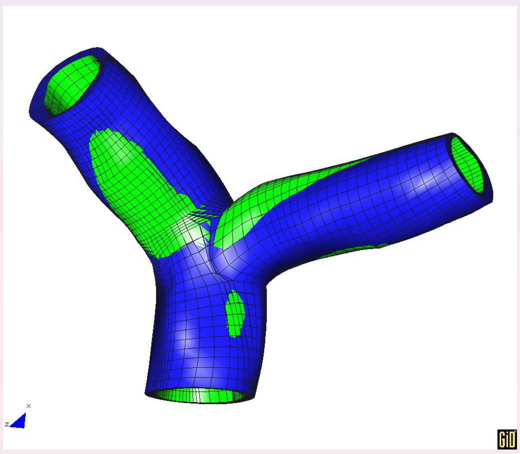


Wall shear stress

Modelo de bifurcación



Wall shear stress



Deformed wall

Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

José M.ª Goicolea

Aplicaciones cardiovasculares

Experimentos in-vitro

Crecimiento y remodelación

Influencia de tensiones iniciales

Geometría in-vivo

Interacción flujo sanguíneo – pared arterial

Conclusión

Conclusión

- Necesidad de interpretación detallada de factores mecánicos en tejidos y órganos
- Aplicación de *Mecánica de Medios Continuos:* Grandes deformaciones, anisotropía, remodelación, efectos reológicos, . . .
- Aplicación de *Elementos Finitos* no lineales
- Remodelación y crecimiento
- Interacción fluido–estructura (sangre–pared arterial)
- Interés social de biomecánica y bioingeniería
- ¡Pongamos algo de vida en la mecánica de medios continuos!

Parte IV

Apéndice

Bibliografía I

Libros

- Y.C. Fung.
  Biomechanics: Motion, Flow, Stress and Growth.
  Springer, 1990.
- Y.C. Fung.
  Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues (2nd ed).
  Springer, 1993.
- J.D. Humphrey.
  Cardiovascular Solid Mechanics: Cells, Tissues and Organs.
  Springer, 2002.

Bibliografía II

- G.A. Holzapfel.
  Nonlinear Solid Mechanics.
  Wiley, 2000.
- L.A. Taber.
  Nonlinear Theory of Elasticity; Applications in Biomechanics.
  World Scientific, 2004.
- J. Rodríguez.
  Modelos numéricos para mecánica cardiovascular de las paredes arteriales y sus procesos de adaptación.
  Tesis Doctoral, Univ. Politécnica Madrid (ETS Ing. Caminos), 2003.

Bibliografía III

R.L. Taylor.
FEAP, Finite Element Analysis Program, ver. 7.5: Theory, User, Examples and Programmer's Manuals.
U.C. Berkeley, 2004.

Artículos

F. Gabaldón, F.J. Calvo, J.M. Goicolea y P. Luna
Simulación computacional de la interacción flujo sanguíneo – pared arterial en la arteria coronaria izquierda.
Congreso anual Soc. Esp. Ing. Biomédica, 2004.

J.C. Simó and R.L. Taylor.
Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches. Continuum basis and numerical algorithms.
Comp. Meth. Appl. Mech. & Eng., 85:273–310, 1991.

Bibliografía IV

G.A. Holzapfel, T. Gasser, R. Ogden.
A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models.
Journal of Elasticity, 61:1–48, 2000.

Modelos de comportamiento de material para tejidos biológicos blandos

José M.ª Goicolea

Bibliografía