

# Capítulo 7

## Dinámica Analítica

La dinámica analítica comprende una serie de métodos cuya característica principal es el tratamiento puramente abstracto, analítico, de los sistemas mecánicos. De esta forma, se separan al máximo las consideraciones físicas y geométricas necesarias para definir el movimiento, de las puramente matemáticas para plantear y solucionar las ecuaciones. Las primeras son necesarias para formular las coordenadas, enlaces y magnitudes cinéticas de un sistema dado; una vez realizada definición de un sistema mediante la adecuada selección de las magnitudes anteriores, los métodos de la mecánica analítica permiten obtener las ecuaciones de la dinámica (o las condiciones de la estática en su caso) de forma casi automática.

El iniciador de estas técnicas fue Joseph Louis Lagrange, a partir de la publicación de su obra *Mécanique Analytique*<sup>1</sup> en 1788. Lagrange introdujo numerosos conceptos empleados hoy día en la mecánica y en las matemáticas: formuló las ecuaciones que llevan su nombre para la dinámica; colocó sobre bases sólidas el cálculo de variaciones; fue el inventor de las palabras derivada y potencial; etc.

Otra figura clave en la mecánica analítica fue William Rowan Hamilton, ya en el siglo XIX (1805-1865). En su obra buscó una gran generalidad, desarrollando una teoría por la que el movimiento se puede reducir a la «búsqueda y diferenciación de una sola función» (la integral de la acción  $S$ ). El punto de vista de Hamilton resultó muy fértil, resultando básico para otros campos como la mecánica cuántica, desarrollada posteriormente en el siglo XX.

### 7.1. Coordenadas Generalizadas

Un planteamiento básico de la mecánica analítica es la descripción de los sistemas mediante «coordenadas generalizadas».

---

<sup>1</sup>En ella, Lagrange se vanagloriaba de que no había ninguna figura, como botón de muestra de que los métodos propuestos estaban libres de casuística geométrica o topológica.

DEFINICIÓN.- Se denominan *coordenadas generalizadas* a un conjunto cualquiera de parámetros  $\{q_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ , que sirven para determinar de manera unívoca la configuración del sistema.

Estos parámetros en principio pueden ser cualesquiera, sin necesitar ser homogéneos en cuanto a dimensiones. Por ejemplo, se pueden mezclar longitudes, ángulos, etc. Una idea clave, subyacente en la elección de coordenadas generalizadas, es que éstas pueden englobar en su propia elección los enlaces del sistema (todos o al menos una parte de ellos). De esta forma se consigue una doble ventaja: por una parte, el número de parámetros es menor que el correspondiente directamente a las coordenadas de todas las partículas. Por otra, el número de ecuaciones de enlace se ve igualmente reducido.

Un conjunto de coordenadas  $\{q_i\}$  se denomina «libre» cuando se pueden variar de forma independiente entre sí; es decir, si las variaciones de las mismas,  $\{\delta q_i\}$ , se pueden escoger de forma arbitraria. Caso de que no sea así, será porque existe alguna ligadura que relacione dichas coordenadas, bien de tipo holónomo o no holónomo.

Cuando las coordenadas generalizadas no sean libres, se deberá a que subsisten condiciones de enlace formuladas de manera explícita. Estas se traducirán en relaciones entre las  $q_i$  (y también sus derivadas  $\dot{q}_i$  para enlaces no holónomos). Debido a estas ligaduras el número de grados de libertad es en realidad menor que  $n$ . Por el contrario, si las coordenadas son libres, su número es precisamente el número de grados de libertad del sistema.

Por ejemplo, en el sistema plano rígido de la figura 7.1, al tener una articulación, basta con una única coordenada angular ( $n = 1$ ;  $q_1 \equiv \theta$ ). En esta elección ya quedan englobados implícitamente los enlaces, tanto los internos (ligaduras de sólido rígido) como los externos (articulación). El sistema tiene un grado de libertad.

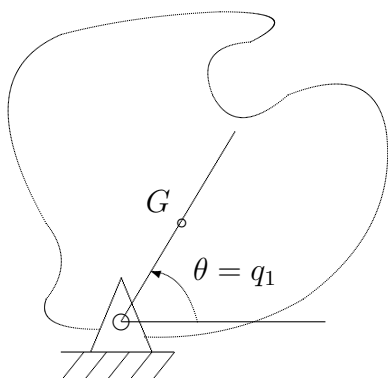


Figura 7.1: El movimiento del sólido articulado de la figura queda descrito por una única coordenada generalizada, el ángulo  $\theta$ . De esta forma se engloban todos los enlaces, tanto internos (ligaduras de sólido rígido) como externos (rótula cilíndrica en  $O$ ).

Supongamos ahora el caso general de un sistema con un número finito de partículas ( $N$ ), sujeto a  $m$  ligaduras holónomas y  $k$  anholónomas. Será posible su descripción mediante un conjunto más reducido de  $n = 3N - m$

parámetros o coordenadas generalizadas. Esquemáticamente:

$$\begin{array}{c}
 \boxed{\begin{array}{c} \{m_i, \mathbf{r}_i, i = 1, \dots, N\} \\ + \\ m \text{ Enlaces holónomos} \\ + \\ k \text{ Enlaces anholónomos} \end{array}} \\
 \Updownarrow \\
 \boxed{\begin{array}{c} \{m_i, i = 1, \dots, N\}, \{q_j, j = 1, \dots, n\}. \\ + \\ k \text{ Enlaces anholónomos} \end{array}}
 \end{array}$$

Esta reducción en el número de coordenadas se efectúa gracias a la eliminación de los  $m$  enlaces holónomos, que quedarán implícitos en la elección de las coordenadas generalizadas. Por el contrario, los  $k$  enlaces anholónomos no es posible eliminarlos, debiendo quedar planteados de forma expresa.

Un caso extremo de reducción en el número de coordenadas es el del sólido rígido. Considerado como un medio continuo, es infinitamente subdivisible, teniendo por tanto un número infinito de partículas y por tanto de coordenadas. Sin embargo, recordemos (apartado 6.1) que los enlaces internos del sólido (distancia constante entre dos partículas cualesquiera) permiten reducir el número de coordenadas generalizadas del sólido a 6.

En general, existirán unas relaciones entre los vectores de posición de cada partícula y las coordenadas generalizadas del tipo:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_j, t) \quad (i = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, n) \quad (7.1)$$

A los vectores de posición de cada partícula  $\{\mathbf{r}_i\}$  los denominaremos, por extensión, «coordenadas vectoriales». Está claro que éstas son equivalentes a definir las  $3N$  coordenadas cartesianas correspondientes. Por otra parte, éstas sólo serán libres para un sistema sin ligadura ninguna; en cualquier otro caso, no formarán un conjunto libre.

Podrá existir dependencia del tiempo en la definición de las coordenadas generalizadas (7.1) cuando se hayan tomado sistemas de coordenadas móviles, o bien cuando haya enlaces móviles.

A partir de las relaciones (7.1), las velocidades se obtienen derivando:

$$\mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}, \quad (7.2)$$

llamándose por extensión «velocidades generalizadas» a los términos  $\frac{dq_j}{dt} = \dot{q}_j$ .

EJEMPLO 7.1: Un sistema está formado por dos partículas  $A$  y  $B$  unidas por una varilla rígida sin masa, de longitud  $l$ . Las partículas se mueven sobre un plano horizontal liso, existiendo en  $A$  un cuchillo que obliga a que ese punto se mueva según la dirección de la varilla (figura 7.2).

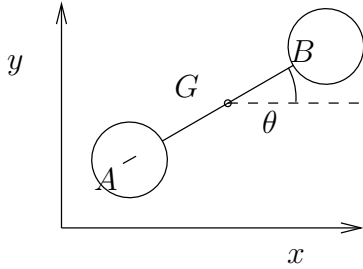


Figura 7.2: Sistema de dos partículas  $A$  y  $B$ , unidas rígidamente, con cuchillo en el apoyo de  $A$  que materializa un enlace anholónimo.

SOLUCIÓN: Al estar en un plano, se precisan 4 coordenadas cartesianas para definir la configuración,  $\{x_A, y_A, x_B, y_B\}$ . Estas se hallan sujetas a 2 condiciones de enlace. Primeramente, el enlace holónimo correspondiente a la varilla rígida entre  $A$  y  $B$

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2.$$

Por otra parte, la condición de apoyo mediante el cuchillo de cargas en  $A$  resulta en imponer que la velocidad de este punto lleve la dirección de la varilla, lo que constituye un enlace anholónimo:

$$-\dot{x}_A(y_B - y_A) + \dot{y}_A(x_B - x_A) = 0.$$

El sistema posee por tanto 2 grados de libertad. Podrían escogerse coordenadas generalizadas que eliminen el enlace holónimo (aunque no el anholónimo). Tomaremos para ello las coordenadas del centro de masas  $(x, y)$  y el ángulo  $\theta$  formado con el eje  $x$ , un total de tres coordenadas. En función de éstas, la velocidad de  $A$  se expresa como  $\mathbf{v}_A = (\dot{x} + \frac{l}{2}\dot{\theta} \sin \theta)\mathbf{i} + (\dot{y} - \frac{l}{2}\dot{\theta} \cos \theta)\mathbf{j}$ , y la normal a la varilla es  $\mathbf{n} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$ . La condición del enlace es  $\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n} = 0$ , resultando

$$-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta - \frac{l}{2}\dot{\theta} = 0. \quad (7.3)$$

De esta forma, el sistema queda definido por tres coordenadas generalizadas sujetas a una ecuación de enlace anholónimo.

## 7.2. Ecuaciones de Lagrange

### 7.2.1. El Principio de D'Alembert en Coordenadas Generalizadas

Sea un sistema sometido a enlaces lisos. El principio de D'Alembert (6.31) expresa:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{f}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad \forall \{\delta \mathbf{r}_i\} \text{ compatibles.} \quad (7.4)$$

En esta expresión  $\mathbf{f}_i$  incluyen sólo las fuerzas activas, excluyendo las reacciones de los enlaces lisos.

Considerando una variación « $\delta$ » (es decir, infinitesimal y a tiempo constante) de las coordenadas en (7.1), se obtienen los desplazamientos virtuales:

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad i = 1, \dots, N. \quad (7.5)$$

Nótese que en esta expresión no existe término  $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \delta t$ , ya que  $\delta t = 0$  para un desplazamiento virtual. La variación  $\delta$  se realiza en un instante fijo de tiempo, no a lo largo del movimiento. En esto difiere de los desplazamientos infinitesimales reales a lo largo del movimiento, que serían

$$d\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} dt.$$

Sustituyendo (7.5) en (7.4) y reorganizando el orden de las sumas  $i, j$ :

$$\sum_{j=1}^n \left[ \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0, \quad \forall \{\delta q_j\} \text{ compatibles.} \quad (7.6)$$

Analícemos con mayor detalle cada uno de los dos términos dentro del corchete en esta expresión. El primero define unos coeficientes escalares que llamaremos «Fuerzas generalizadas»:

$$Q_j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad j = 1, \dots, n. \quad (7.7)$$

Es inmediato comprobar que  $Q_j$  son precisamente los coeficientes de  $\delta q_j$  en la expresión del trabajo virtual  $\delta W$ :

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \quad (7.8)$$

El segundo término de (7.6) se puede expresar como:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \quad (7.9)$$

Para lo que sigue, debemos precisar que consideraremos la dependencia funcional de todas las magnitudes cinéticas sobre el conjunto de variables independientes  $(q_j, \dot{q}_j, t)$ . Esta aclaración precisa el significado de las derivadas parciales. Así,  $\partial/\partial q_j(\cdot)$  indicará la derivada parcial respecto de la coordenada  $q_j$ , manteniéndose constantes el resto de coordenadas  $q_k$  ( $k \neq j$ ) así como las velocidades  $\dot{q}_j$  y el tiempo  $t$ .

Para continuar el desarrollo de la expresión (7.9), establezcamos antes dos igualdades que será necesario emplear:

1.  $\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$ . En efecto, desarrollando el primer término,

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[ \overbrace{\sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k}^{\dot{\mathbf{r}}_i} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta_{kj} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$

□

2.  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}$ . En efecto, desarrollando ambos términos por separado:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t}; \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_j}, \end{aligned}$$

siendo ambas expresiones iguales, por la igualdad de las derivadas cruzadas. □

Empleando estos dos resultados y la definición de energía cinética,  $T \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$ , la ecuación (7.9) resulta:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}, \end{aligned} \quad (7.10)$$

Finalmente, empleando (7.7) y (7.10), el principio de D'Alembert (7.4) queda expresado en coordenadas generalizadas como:

$$\sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0, \quad \forall \{\delta q_j\} \text{ compatibles} \quad (7.11)$$

Esta expresión, al tratarse del principio de D'Alembert, puede ser considerada por tanto como *ecuación fundamental de la dinámica*.

Conviene notar que en (7.11) no se emplean fuerzas físicas en ningún término. Tan sólo entran los coeficientes  $Q_j$ , *fuerzas generalizadas*, calculadas directamente a partir de la expresión (7.7) o como coeficientes del trabajo virtual  $\delta W$  (7.8) según se ha dicho. Al igual que en el principio de D'Alembert, en la definición de  $Q_j$  tampoco intervienen las fuerzas de reacción de los enlaces lisos, que no realizan trabajo virtual.

### 7.2.2. Forma básica de las Ecuaciones de Lagrange

La expresión (7.11) es completamente general por lo que se puede aplicar a cualquier sistema, tanto con enlaces holónomos como no holónomos. En el caso en que *todos los enlaces sean holónomos*, será posible siempre establecer un conjunto de coordenadas libres  $\{q_j\}$ , en el que las variaciones  $\{\delta q_j\}$  se puedan escoger de manera arbitraria, manteniendo la compatibilidad con los enlaces. En este caso, (7.11) equivale a enunciar que cada uno de los coeficientes de las  $\{\delta q_j\}$  en ha de anularse:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.12)$$

Estas expresiones son las llamadas *ecuaciones de Lagrange*, en su forma básica.

#### OBSERVACIONES.-

- En (7.12) existe una ecuación por cada grado de libertad, por lo que la elección de coordenadas generalizadas libres conduce directamente al mínimo número de ecuaciones dinámicas.
- Se trata de ecuaciones diferenciales de segundo orden (al existir derivadas temporales de los términos  $\partial T / \partial \dot{q}_j$ , que dependen, a su vez, de  $\dot{q}_j$ ).
- De las ecuaciones (7.12) han quedado eliminadas todas las reacciones de enlace que no realizan trabajo virtual, correspondientes a los enlaces lisos. Esto contrasta con las ecuaciones procedentes de los teoremas Newtonianos en las que, en principio, deben considerarse también estas reacciones.

- Una vez evaluadas las expresiones de  $T$  y de  $Q_j$ , las ecuaciones de Lagrange se pueden obtener de forma automática sin más que aplicar las reglas analíticas de derivación correspondientes a (7.12). Es posible incluso automatizar su obtención mediante una programación adecuada de sistemas de matemática simbólica, como MAPLE, MATHEMATICA, MACSYMA, etc.
- El significado físico del término  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right)$  en (7.12) es el de las fuerzas de inercia. Para comprobarlo, tomemos como coordenadas las propias coordenadas vectoriales  $\mathbf{r}_j$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j} \right) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j} \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) \right] = \frac{d}{dt} (m_j \dot{\mathbf{r}}_j) = m_j \ddot{\mathbf{r}}_j.$$

- Por último, los términos  $\partial T / \partial q_j$  pueden interpretarse como fuerzas ficticias procedentes de la elección de coordenadas generalizadas  $\{q_j\}$ . En caso de que éstas sean simplemente las componentes cartesianas de los vectores  $\{\mathbf{r}_i\}$ , desaparecerían. Estas fuerzas se añaden a las fuerzas generalizadas  $Q_j$  en la dirección de  $q_j$ .

### 7.2.3. Caso en que las fuerzas provienen de un potencial. Función Lagrangiana

Si las fuerzas aplicadas proceden de un potencial  $V$ ,

$$\mathbf{f}_i = -\mathbf{grad}_i V = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i},$$

las fuerzas generalizadas tendrán entonces la expresión:

$$Q_j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}. \quad (7.13)$$

En lo que sigue, admitimos la hipótesis de que el potencial  $V$  depende de las coordenadas y posiblemente del tiempo<sup>2</sup>, pero no de las velocidades<sup>3</sup>:

$$V = V(q_j, t) = V(\mathbf{r}_i, t).$$

<sup>2</sup>Ya se ha comentado (apartado 2.1.3) que si el potencial no es constante (es decir,  $\partial V(\mathbf{r}_i, t) / \partial t \neq 0$ ), las fuerzas no son conservativas a pesar de provenir de un potencial.

<sup>3</sup>En caso de existir fuerzas de tipo electromagnético, esta suposición no es válida, ya que las fuerzas dependen de la velocidad con la que se mueven las partículas con carga. Es posible definir un potencial generalizado dependiente de la velocidad para este caso, y establecer las ecuaciones de Lagrange correspondientes, aunque que no trataremos aquí este aspecto para no complicar el desarrollo.



Sustituyendo (7.13) y agrupando términos, las ecuaciones de Lagrange (7.12) se pueden escribir como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

Se define la *función Lagrangiana* como:

$$L(q_j, \dot{q}_j, t) \stackrel{\text{def}}{=} T(q_j, \dot{q}_j, t) - V(q_j, t);$$

al no depender  $V$  de las velocidades, se verifica  $\partial T / \partial \dot{q}_j = \partial L / \partial \dot{q}_j$ . De esta forma, las ecuaciones quedan finalmente:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, \dots, n).} \quad (7.14)$$

Estas expresiones constituyen las *ecuaciones de Lagrange* en su forma estándar, aplicables para sistemas en que las fuerzas provienen de un potencial.

Es necesario comprender la importancia de la función Lagrangiana  $L$  en la caracterización dinámica de un sistema: basta con conocer su expresión,  $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ , para poder determinar a partir de ella las ecuaciones dinámicas (7.14); toda la información dinámica del sistema está por tanto contenida en la estructura de  $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ .

### Unicidad de la función Lagrangiana

La elección de una función Lagrangiana para representar un sistema no es única. Para comprender esto basta considerar un potencial distinto, que difiera en una constante aditiva ( $V' = V + \text{cte.}$ ), lo que, como sabemos, es equivalente por completo. Por tanto, dos Lagrangianas que difieran en una constante también son equivalentes. Este resultado se puede generalizar, ya que es posible comprobar que dos Lagrangianas que difieran entre sí en una derivada total de alguna función que dependa exclusivamente de coordenadas y tiempo, son equivalentes<sup>4</sup>.

En efecto, sean  $L$  y  $L'$  tales que

$$L'(q_j, \dot{q}_j, t) \stackrel{\text{def}}{=} L(q_j, \dot{q}_j, t) + \frac{d}{dt} F(q_j, t); \quad (7.15)$$

siendo  $F(q_j, t)$  una función cualquiera de  $q_j$  y  $t$  pero no de las velocidades  $\dot{q}_j$ . Por la definición funcional de  $F$ , desarrollando la derivada temporal:

$$L' - L = \frac{dF}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t},$$

y las contribuciones de este término en las ecuaciones de Lagrange son:

<sup>4</sup>Las transformaciones que ocasionan una variación de  $L$  de este tipo se denominan «transformaciones de gauge», término proveniente del inglés, aunque la traducción directa en castellano «transformaciones de galga» no parece tampoco muy atractiva.

$$\begin{aligned} \blacksquare \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) \right] &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial F}{\partial q_j} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t} \\ \blacksquare \frac{\partial}{\partial q_j} \left[ \frac{dF}{dt} \right] &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} \end{aligned}$$

Como se ve, al restar ambos términos en (7.14) se anulan entre sí, y el resultado neto, de emplear  $L'$ , son las mismas ecuaciones dinámicas que para  $L$ .

### Caso de fuerzas no conservativas

En los casos en que existan algunas fuerzas que procedan de un potencial ( $Q_j^V \stackrel{\text{def}}{=} -\partial V / \partial q_j$ ) y otras que no ( $Q_j^N$ ):

$$Q_j = Q_j^V + Q_j^N = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^N,$$

es posible definir una Lagrangiana parcial  $L = T - V$ , resultando entonces las ecuaciones:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^N, \quad j = 1, \dots, n}$$

donde sólo aparecen expresamente las fuerzas no conservativas  $Q_j^N$ .

### Transformaciones admisibles de coordenadas

Supongamos un cambio de coordenadas definido mediante una función biunívoca  $G : \{q_j\} \mapsto \{\hat{q}_j\}$ , suave<sup>5</sup>. Llamaremos a su inversa  $g = G^{-1}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \hat{q}_i &= G_i(q_j, t); \quad q_i = g_i(\hat{q}_j, t) \quad i, j = 1, \dots, n \\ &\left| \frac{\partial q_i}{\partial \hat{q}_j} \right| \neq 0. \end{aligned}$$

Para simplificar las expresiones en lo que sigue, definimos la *derivada variacional* de  $L$  respecto a  $q_j$  como

$$\frac{\delta L}{\delta q_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right); \quad (7.16)$$

En función de ella, las ecuaciones de Lagrange (7.14) quedan expresadas simplemente como

$$\frac{\delta L}{\delta q_j} = 0 \quad j = 1, \dots, n.$$

<sup>5</sup>es decir, con derivadas continuas hasta el orden que sea preciso

Estas ecuaciones son equivalentes a  $\delta\hat{L}/\delta\hat{q}_k = 0$ , siendo  $\hat{L} = L \circ g$ , es decir  $\hat{L}(\hat{q}_j, \dot{\hat{q}}_j, t) = L((q_j, \dot{q}_j, t)$ , es la Lagrangiana expresada en las nuevas coordenadas.

*Demostración.* Desarrollando los términos de  $\delta\hat{L}/\delta\hat{q}_k$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{L}}{\partial\hat{q}_k} &= \sum_{l=1}^n \left[ \frac{\partial L}{\partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial\hat{q}_k} + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_l} \frac{\partial\dot{q}_l}{\partial\hat{q}_k} \right]; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{\hat{q}}_k} &= \sum_{l=1}^n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_l} \frac{\partial\dot{q}_l}{\partial\dot{\hat{q}}_k} \right) = \sum_{l=1}^n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_l} \frac{\partial q_l}{\partial\dot{\hat{q}}_k} \right) \\ &= \sum_{l=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_l} \right) \frac{\partial q_l}{\partial\dot{\hat{q}}_k} + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_l} \frac{\partial\dot{q}_l}{\partial\dot{\hat{q}}_k} \right].\end{aligned}$$

Restando ambas resulta

$$\frac{\delta\hat{L}}{\delta\hat{q}_k} = \sum_{l=1}^n \left[ \frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_l} \right) \right] \frac{\partial q_l}{\partial\hat{q}_k} = \sum_{l=1}^n \frac{\delta L}{\delta q_l} \frac{\partial q_l}{\partial\hat{q}_k},$$

y al ser  $\left| \frac{\partial q_l}{\partial\hat{q}_k} \right| \neq 0$ , queda demostrada la equivalencia.  $\square$

## 7.2.4. Desarrollo explícito de las ecuaciones del movimiento

### Energía cinética y momentos generalizados

La energía cinética es una función cuadrática de las velocidades. Esta propiedad se conserva al expresarla en coordenadas generalizadas. En efecto, desarrollando la expresión,

$$\begin{aligned}T &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 \\ &= T_2 + T_1 + T_0,\end{aligned}\tag{7.17}$$

siendo  $T_2$ ,  $T_1$  y  $T_0$  términos homogéneos en las  $\dot{q}_j$  de tipo cuadrático, lineal e independiente respectivamente. Sus expresiones son

$$T_2 = \sum_{k,l=1}^n \frac{1}{2} a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l, \quad \text{siendo } a_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l}\tag{7.18}$$

$$T_1 = \sum_{k=1}^n a_k \dot{q}_k, \quad \text{siendo } a_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\tag{7.19}$$

$$T_0 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2\tag{7.20}$$

En el caso en que no exista dependencia explícita del tiempo en la definición de las coordenadas generalizadas ( $\partial \mathbf{r}_i / \partial t = 0$ ), la expresión de la energía cinética será cuadrática homogénea en las  $\dot{q}_j$ :

$$T = T_2 = \sum_{k,l=1}^n \frac{1}{2} a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l. \quad (7.21)$$

Esto sucederá si no se emplean sistemas de coordenadas móviles ni hay enlaces reónomos (es decir, dependientes del tiempo).

Por otra parte, los momentos generalizados se definen como

$$p_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, \dots, n); \quad (7.22)$$

admitiendo que el potencial no depende de las velocidades, a partir de las expresiones (7.17, 7.18, 7.19, 7.20),

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_k + a_j \quad (7.23)$$

### Forma general de las ecuaciones

En función de los momentos generalizados, las ecuaciones de Lagrange (7.14) pueden reescribirse como

$$\dot{p}_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.24)$$

Derivando (7.23) se obtiene

$$\dot{p}_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{l,k=1}^n \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l} \dot{q}_l \dot{q}_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{jk}}{\partial t} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial a_j}{\partial t};$$

por otra parte, teniendo en cuenta las expresiones (7.17), (7.18) y (7.19),

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{l,k=1}^n \frac{1}{2} \frac{\partial a_{kl}}{\partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial T_0}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}.$$

Teniendo en cuenta la igualdad siguiente,

$$\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l} \dot{q}_l \dot{q}_k = \sum_{l,k=1}^n \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l} + \frac{\partial a_{jl}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_l \dot{q}_k,$$

resulta

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{l,k=1}^n \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l} + \frac{\partial a_{jl}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{kl}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial a_j}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \\ + \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{jk}}{\partial t} \dot{q}_k + \frac{\partial a_j}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Esta expresión se puede simplificar introduciendo los coeficientes

$$[kl, j] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l} + \frac{\partial a_{jl}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{kl}}{\partial q_j} \right), \quad (7.26)$$

que denominaremos «símbolos de Christoffel de primera especie»<sup>6</sup>, aplicados a la forma cuadrática que define  $T_2$ . Por otra parte, podemos definir unos coeficientes hemisimétricos

$$\gamma_{jk} = -\gamma_{kj} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial a_j}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \quad (j, k = 1, \dots, n), \quad (7.27)$$

que darán lugar a fuerzas giroscópicas como veremos más adelante. De esta forma, las ecuaciones (7.28) pueden escribirse como

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{l,k=1}^n [kl, j] \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^n \gamma_{jk} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{jk}}{\partial t} \dot{q}_k + \frac{\partial a_j}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0. \quad (7.28)$$

Teniendo en cuenta que la matriz de coeficientes  $[a_{ij}]$  no puede ser singular, al ser la energía cinética definida positiva, podrían eliminarse las aceleraciones de las ecuaciones (7.28), quedando

$$\ddot{q}_j = f_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.29)$$

(Hemos empleado los símbolos  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$  para denotar a los conjuntos de coordenadas o velocidades generalizadas respectivamente).

## 7.2.5. Integrales Primeras

### Coordenadas cíclicas

Partiendo de las ecuaciones de Lagrange expresadas en la forma (7.24), si la función Lagrangiana  $L$  no depende explícitamente de una coordenada  $q_j$  — es decir,  $\partial L / \partial q_j = 0$  —, se verifica la conservación del momento generalizado correspondiente:

$$\boxed{\text{si } \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j = \text{cte.}} \quad (7.30)$$

Se dice entonces que  $q_j$  es una «coordenada cíclica» o ignorable. Las expresiones (7.30) constituyen integrales primeras del movimiento, ya que son ecuaciones en las que intervienen sólo derivadas primeras de las coordenadas.

Se puede interpretar el significado de las coordenadas cíclicas considerando que, si una coordenada  $q_j$  es cíclica, se puede sustituir  $(q_j)$  por  $(q_j + C)$ ,

<sup>6</sup>Esta definición es la misma que se realiza en geometría diferencial de superficies, en la que para una superficie definida mediante coordenadas curvilíneas  $\mathbf{r}(q_i)$  se emplean los términos  $a_{kl} = (\partial \mathbf{r} / \partial q_k) \cdot (\partial \mathbf{r} / \partial q_l)$ , correspondiendo a los coeficientes de la métrica asociada, que es una forma cuadrática.

siendo  $C$  una constante, y las ecuaciones no varían. Esto se debe a que  $L$  no depende de  $q_j$ , y por otra parte  $\dot{q}_j$  es invariante ante ese cambio. Por el contrario, hacemos notar que el hecho de que una coordenada sea cíclica no quiere decir que su valor sea constante, ni tampoco la velocidad generalizada correspondiente.

Sin embargo, para una coordenada cíclica  $q_j$ , será posible eliminar de las ecuaciones la velocidad correspondiente  $\dot{q}_j$ , empleando la integral primera (7.30). Si el sistema tiene  $n$  grados de libertad, de los que  $k$  corresponden a coordenadas cíclicas, se podrán eliminar éstas y quedar descrito el movimiento mediante dos conjuntos desacoplados de ecuaciones:  $k$  ecuaciones (7.30) para las coordenadas cíclicas, y  $(n-k)$  ecuaciones (7.14) para las demás coordenadas. El problema se ve considerablemente simplificado, procediéndose en primer lugar a resolver estas últimas  $(n-k)$  ecuaciones; una vez resueltas, se obtiene el valor de las  $k$  coordenadas cíclicas. Más adelante veremos un método general de proceder a esta reducción, el método de Routh (apartado 12.7).

Es posible extender el concepto de coordenada cíclica para el caso en que las fuerzas no procedan de un potencial. Para ello se define el momento generalizado en dirección  $j$  como

$$p_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}.$$

La condición de coordenada cíclica será entonces:

$$\boxed{\text{si } \frac{\partial T}{\partial q_j} = 0 \text{ y } Q_j = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j = \text{cte.}}$$

### Integral de Jacobi o de la Energía

En ocasiones es posible obtener una integral primera cuyo significado está relacionado con la energía total del sistema a partir de la función Lagrangiana. Para ello, observamos que la derivada total de  $L$  respecto del tiempo es

$$\frac{d}{dt}L(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Sustituyendo a partir de (7.14),  $\partial L / \partial q_j = \frac{d}{dt}(\partial L / \partial \dot{q}_j)$ , y operando:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right] + \frac{\partial L}{\partial t}$$

Agrupando los términos con derivadas totales, se deduce

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right] = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

de donde se obtiene la expresión de la llamada «integral de Jacobi:»

$$\boxed{\text{si } \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad h \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = \text{cte}} \quad (7.31)$$

OBSERVACIONES.-

- En el caso en que  $\partial \mathbf{r}_i / \partial t = 0$ , según vimos, la energía cinética es una expresión cuadrática homogénea en  $\dot{q}_j$ . Entonces, a partir de (7.17, 7.18):

$$T = T_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_k$$

y por tanto

$$h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = 2T_2 - (T_2 - V) = T_2 + V = T + V,$$

por lo que  $h$  (7.31) coincide en este caso con la energía total,  $T + V$ .

- Pudiera darse el caso de que  $\partial \mathbf{r}_i / \partial t = 0$  y, por tanto,  $T + V = h = p_j \dot{q}_j - L$ , pero que esta expresión no se mantenga constante por ser  $\partial L / \partial t \neq 0$ . Esto último ocurrirá si  $\partial V(q_j, t) / \partial t \neq 0$ , siendo en este caso el sistema no conservativo desde el punto de vista físico aunque las fuerzas procedan de un potencial.
- Por otra parte, en los casos en que existan sistemas de coordenadas móviles se verificará, como se ha dicho,  $\partial \mathbf{r}_i / \partial t \neq 0$  y por tanto  $h = p_j \dot{q}_j - L \neq T + V$ . Sin embargo, puede que exista la integral de Jacobi (si  $\partial L / \partial t = 0$ ), aunque su significado físico no será en este caso la conservación de la energía. Un ejemplo típico de esta situación es el de una referencia móvil pero inercial, con velocidad de traslación constante y rectilínea (cf. ejemplo 7.4)

**Conservación de la energía.-** Otra manera —más directa— de obtener una integral de la energía es observando que, si las fuerzas son todas conservativas, la energía se mantiene constante (6.16). En este caso, basta con expresar dicha ecuación en función de las coordenadas generalizadas para obtener, en el marco de la dinámica analítica, la integral primera de la energía, equivalente a (7.31). Recordemos que para que las fuerzas sean conservativas, además de provenir de un potencial, éste debe ser constante. En función de las coordenadas generalizadas, esta condición se impone de la siguiente

forma:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{si } \exists V \text{ tal que } Q_j = -\frac{\partial V(q_j, t)}{\partial q_j}, \text{ siendo } \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \text{ y } \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}_i(q_j, t) = \mathbf{0} \\ \Downarrow \\ E = T + V = \text{cte.} \end{array}}$$

Hacemos notar que, en la expresión anterior, para establecer la constancia del potencial  $V$ , ha sido necesario añadir la condición  $(\partial \mathbf{r}_i / \partial t)(q_j, t) = \mathbf{0}$ , es decir, que no existan sistemas de coordenadas móviles. Otra manera más compacta de expresar la constancia de  $V$  sería en función de las coordenadas vectoriales, mediante la condición  $\partial V(\mathbf{r}_i, t) / \partial t = \mathbf{0}$ .

Por el contrario, en el caso en que el potencial  $V$  no sea constante, aplicando el principio de la energía cinética (6.15),

$$dT = - \sum_{k=1}^N \frac{\partial V(\mathbf{r}_i, t)}{\partial \mathbf{r}_k} \cdot d\mathbf{r}_k = -dV + \frac{\partial V(\mathbf{r}_i, t)}{\partial t} dt$$

por lo que

$$d(T + V) = \frac{\partial V(\mathbf{r}_i, t)}{\partial t} dt \neq 0,$$

es decir, no se conserva la energía  $T + V$ . Hacemos la observación de que en la expresión anterior se emplea la derivada parcial respecto del tiempo en relación con las coordenadas vectoriales (absolutas), que es en general distinta de la derivada cuando se consideran coordenadas generalizadas (posiblemente relativas o móviles):

$$\frac{\partial V(\mathbf{r}_i, t)}{\partial t} \neq \frac{\partial V(q_j, t)}{\partial t}.$$

### 7.2.6. Teorema de Noether

Sea un sistema autónomo<sup>7</sup>, con Lagrangiana  $L(q_j, \dot{q}_j)$ . Suponemos que existe una familia de transformaciones  $q_j \mapsto h^s(q_j)$ , función de un parámetro continuo  $s \in \mathbb{R}$ , de forma que  $L$  es invariante frente a ellas, y provienen de forma continua de la identidad  $h^{s=0}(q_j) = q_j$ . Existe entonces una integral del movimiento,

$$I(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{ds} h^s(q_k) \Big|_{s=0}. \quad (7.32)$$

*Demostración.* Sea  $q_j(t)$  la solución del movimiento. Por la hipótesis hecha,  $q_j(s, t) = h^s(q_j(t))$ . Derivando:

$$0 = \frac{d}{ds} L(q_j(s, t), \dot{q}_j(s, t)) = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{d}{ds} q_k(s, t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{ds} \dot{q}_k(s, t) \right].$$

<sup>7</sup>es decir, aislado, lo que implica  $\partial L / \partial t = 0$



Por las ecuaciones de Lagrange,  $\partial L/\partial q_k = (d/dt)(\partial L/\partial \dot{q}_k)$ ;

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds}L = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{ds} q_k(s, t) + \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{d}{ds} \dot{q}_k(s, t) \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{ds} q_k(s, t) \right] = \frac{d}{dt} I(q_j, \dot{q}_j), \end{aligned}$$

luego  $I(q_j, \dot{q}_j)$  es una constante del movimiento.  $\square$

**EJEMPLO 7.2:** Sea un sistema invariante frente a movimientos de traslación según una dirección determinada  $\mathbf{e}$ . La componente de la cantidad de movimiento según esa dirección es una constante del movimiento.

**SOLUCIÓN:** En efecto, elijamos —sin pérdida de generalidad— el eje  $x$  según la dirección dada (es decir, tomamos  $\mathbf{i} \equiv \mathbf{e}$ ). Podemos definir una transformación que cumple los requisitos del teorema de Noether mediante

$$\begin{aligned} h^s : \mathbf{r}_i &\mapsto \mathbf{r}'_i + s \mathbf{i}, \quad i = 1, \dots, N \\ \left. \frac{d}{ds} h^s(\mathbf{r}_i) \right|_{s=0} &= \mathbf{i}; I = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{i} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i = P_x. \quad \square \end{aligned}$$

**EJEMPLO 7.3:** Sea un sistema invariante frente a rotaciones alrededor de un determinado eje ( $O, \mathbf{e}$ ). La componente del momento cinético según ese eje es una constante del movimiento.

**SOLUCIÓN:** En efecto, elijamos —sin pérdida de generalidad— el eje  $Oz$  según la dirección indicada (es decir, tomamos  $\mathbf{k} \equiv \mathbf{e}$ ). La transformación es

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i &= (x_i, y_i, z_i) \mapsto \mathbf{r}'_i = (x'_i, y'_i, z'_i) \\ &\begin{cases} x'_i = x_i \cos s + y_i \operatorname{sen} s \\ y'_i = -x_i \operatorname{sen} s + y_i \cos s \\ z'_i = z_i \end{cases} \\ \left. \frac{d}{ds} h^s(\mathbf{r}_i) \right|_{s=0} &= \left. \frac{d}{ds} \mathbf{r}'_i \right|_{s=0} = (y_i, -x_i, 0) = \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{k} \\ I &= \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot (\mathbf{r}_i \wedge \mathbf{k}) = \sum_{i=1}^N (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \wedge \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{k} = -H_z \quad \square \end{aligned}$$

### 7.2.7. Sistemas naturales

Llamaremos *sistema natural* a un sistema descrito por las ecuaciones de Lagrange en su forma estándar (7.14), en el que exista la integral de Jacobi como constante del movimiento ( $\partial L/\partial t = 0$ ) y la energía cinética sea función cuadrática homogénea de las velocidades generalizadas ( $T = T_2$ ).

Como se ha comentado antes (apartado 7.2.5), en este caso la integral de Jacobi resulta tener un significado físico claro, la energía total del sistema,

$$h = T + V.$$

Al conservarse  $h$  se mantiene igualmente constante la energía, resultando conservativo desde el punto de vista físico.

Teniendo en cuenta que en un sistema natural los coeficientes en las ecuaciones (7.19, 7.18) cumplen  $a_j = 0$  y  $\partial a_{ij}/\partial t = 0$ , las ecuaciones del movimiento tienen una expresión considerablemente más sencilla que en el caso general (7.28), resultando

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{k,l=1}^n [kl, j] \dot{q}_k \dot{q}_l + \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (j = 1 \dots, n). \quad (7.33)$$

En esta expresión se observa que las velocidades generalizadas  $\dot{q}_j$  intervienen únicamente en términos cuadráticos.

Podemos observar que un sistema holónomo con integral de Jacobi, en el que fuese  $T_1 = 0$  pero  $T_0 \neq 0$ , tiene ecuaciones del movimiento muy similares a (7.33), ya que  $T_0$  puede considerarse agrupado con la energía potencial  $V$ ,

$$V' = V - T_0,$$

de forma que la energía cinética restante es una expresión cuadrática homogénea en las  $\dot{q}_j$ , al igual que en un sistema natural.

**EJEMPLO 7.4:** Sea un sistema masa/muelle, capaz de moverse en una dirección, unido en su base a un punto que se tiene un movimiento impuesto con velocidad uniforme  $v_0$ . Sea  $l_0$  la longitud natural del muelle,  $k$  su constante, y  $x$  la elongación respecto de la natural. Discutir la existencia de una integral primera de la energía.

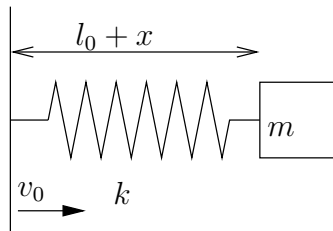


Figura 7.3: Sistema formado por una masa  $m$  y un muelle de constante  $k$  y longitud natural  $l_0$ , capaz de moverse en dirección  $x$ , cuya base tiene un movimiento impuesto de velocidad constante  $v_0$ .

**SOLUCIÓN:** La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m(v_0 + \dot{x})^2$$

por lo que sus componentes homogéneas son

$$T_2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2; \quad T_1 = mv_0\dot{x}; \quad T_0 = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

La energía potencial es

$$V = \frac{1}{2}kx^2.$$

Se comprueba inmediatamente que  $\partial L/\partial t = 0$ , por lo que existe la integral de Jacobi, que vale

$$h = T_2 - T_0 + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

En este ejemplo,  $T_0$  es constante, por lo que la conservación de  $h$  conduce también a la conservación de  $T_2 + V$ , aunque ambas constantes tengan distinto valor.

Otro procedimiento para analizar este ejemplo sería, considerando que el sistema de referencia móvil con la base es inercial, realizar los cálculos relativos a él:

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2; \\ V' &= \frac{1}{2}kx^2. \end{aligned}$$

En este caso obtendríamos un sistema natural, en el que se conserva la energía total  $T' + V'$ . Observamos que ésta coincide con  $T_2 + V$  relativa al sistema fijo inicial, que ya habíamos visto se conservaba.

### 7.2.8. Sistemas Giroscópicos

En el desarrollo explícito de las ecuaciones de Lagrange para un sistema holónomo dado anteriormente (7.28),

$$\sum_{k=1}^n a_{jk}\ddot{q}_k + \sum_{k,l=1}^n [kl, j]\dot{q}_k\dot{q}_l + \sum_{k=1}^n \gamma_{jk}\dot{q}_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{jk}}{\partial t}\dot{q}_k + \frac{\partial a_j}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0, \quad (7.34)$$

los términos  $\gamma_{jk}\dot{q}_k$  se denominan *términos giroscópicos*, dando lugar si aparecen a un *sistema giroscópico*. Se trata de coeficientes hemisimétricos, dados por (7.27),

$$\gamma_{jk} = -\gamma_{kj} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial a_j}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \quad (j, k = 1, \dots, n),$$

donde  $a_j$  son los coeficientes definidos en (7.19),

$$a_k = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}.$$

Por tanto, para que los  $a_j$  no sean nulos, al menos una de las ecuaciones de la relación de coordenadas  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_j, t)$  debe ser función explícita tanto de

$q_j$  como de  $t$ . Además, para que existan términos giroscópicos  $\gamma_{ij}$ , algunos de los coeficientes  $a_j$  deben ser funciones explícitas de las coordenadas  $q_j$ , como ocurre cuando hay un enlace móvil.

Una característica importante de los sistemas giroscópicos es el acoplamiento del movimiento entre dos o más coordenadas. En efecto, la *fuerza giroscópica* asociada en la ecuación (7.34) es

$$Q_j^{\text{gir}} = - \sum_{k=1}^n \gamma_{jk} \dot{q}_k. \quad (7.35)$$

Al ser  $\gamma_{jj} = 0$  ( $j$  no sumado), la fuerza  $Q_j^{\text{gir}}$  puede deberse a todos los componentes de las velocidades generalizadas excepto a  $\dot{q}_j$ , lo que produce necesariamente un acoplamiento.

Por otra parte, el trabajo realizado por estas fuerzas es

$$\frac{dW^{\text{gir}}}{dt} = \sum_{j,k=1}^n Q_j^{\text{gir}} \dot{q}_j = - \sum_{j=1}^n \gamma_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = 0, \quad (7.36)$$

al ser  $\gamma_{jk}$  hemisimétricos. Es decir, cualquiera que sea el movimiento, las fuerzas giroscópicas no realizan trabajo. En esto difieren de las fuerzas disipativas viscosas que pueden aparecer también en las ecuaciones del movimiento, que serían también términos proporcionales a  $\dot{q}_j$ , pero que por su propia naturaleza desarrollan un trabajo neto necesariamente negativo.

Las fuerzas giroscópicas aparecen en sistemas físicos que contengan alguna referencia móvil de tipo rotatoria para la definición de coordenadas. Estas fuerzas pueden servir para estabilizar el movimiento de ciertos sistemas alrededor de trayectorias dinámicas estacionarias, como es el caso de la peonza simétrica para su movimiento de precesión uniforme o la brújula giroscópica (capítulo 9).

**EJEMPLO 7.5:** Un disco circular de radio  $a$ , situado en un plano horizontal, tiene un movimiento de rotación impuesto alrededor de su centro con velocidad constante  $\omega$ . En su perímetro está anclado un muelle, de longitud natural  $r_0$ , que en su otro extremo tiene una masa  $m$ . Obtener las ecuaciones del movimiento e identificar los términos giroscópicos.

**SOLUCIÓN:** Para calcular la energía cinética debemos expresar antes la velocidad del punto  $P$ , lo que puede hacerse a través del movimiento relativo al disco,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_P &= \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{P|A} \\ &= [-a\omega \text{sen}(\omega t) - r(\omega + \dot{\varphi}) \text{sen}(\omega t + \varphi) + \dot{r} \cos(\omega t + \varphi)] \mathbf{i} \\ &\quad + [a\omega \cos(\omega t) + r(\omega + \dot{\varphi}) \cos(\omega t + \varphi) + \dot{r} \text{sen}(\omega t + \varphi)] \mathbf{j} \end{aligned}$$

La expresión de la Lagrangiana es

$$L = \frac{m}{2} [a^2\omega^2 + r^2(\omega + \dot{\varphi})^2 + \dot{r}^2 + 2ar\omega(\omega + \dot{\varphi}) \cos \varphi + 2aw\dot{r} \text{sen} \varphi] - \frac{k}{2}(r-r_0)^2.$$

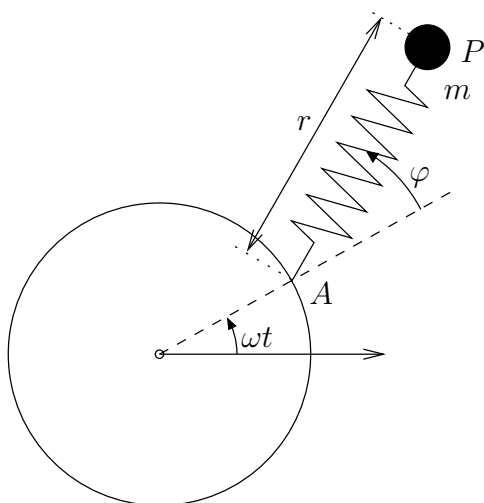


Figura 7.4: Disco que gira con velocidad constante  $\omega$ , con un resorte fijado en su perímetro, al cual está sujeta a su vez una partícula de masa  $m$ .

Las ecuaciones de Lagrange resultan

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 - 2mr\omega\dot{\varphi} - mr\omega^2 - ma\omega^2 \cos \varphi + k(r - r_0) &= 0 \\ mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{\varphi} + 2mr\omega\dot{r} + mar\omega^2 \sin \varphi &= 0 \end{aligned}$$

En la primera ecuación —respecto a  $r$ — el término giroscópico es  $-2mr\omega\dot{\varphi}$ , y en la segunda ecuación —respecto a  $\varphi$ — el término correspondiente es  $+2mr\omega\dot{r}$ . La matriz de coeficientes hemisimétricos es por tanto

$$[\gamma_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & -2mr\omega \\ 2mr\omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Estos términos son los que corresponden al desarrollo de la energía cinética,

$$\begin{aligned} T &= T_2 + T_1 + T_0; \\ T_2 &= \frac{1}{2}m(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2), \\ T_1 &= m(r^2\omega\dot{\varphi} + ar\omega\dot{\varphi} \cos \varphi + a\omega\dot{r} \sin \varphi), \\ T_0 &= \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 + r^2 + 2ar \cos \varphi), \end{aligned}$$

de donde se deduce

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{\partial T_1}{\partial \dot{r}} = ma\omega r \sin \varphi, & a_\varphi &= \frac{\partial T_1}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\omega + mar\omega \cos \varphi; \\ \gamma_{r\varphi} &= \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial \dot{r}} = -2mr\omega, & \gamma_{\varphi r} &= -\gamma_{r\varphi} = 2mr\omega \quad \square \end{aligned}$$

### 7.3. Potencial dependiente de la velocidad

En las ecuaciones de Lagrange (7.14) y en la discusión posterior se admitió como base de partida que el potencial  $V$  no dependía de las velocidades. Sin

embargo, esta restricción no es siempre necesaria, pudiendo existir casos en que se defina un potencial dependiente de las velocidades y se mantenga la forma estándar de las ecuaciones de Lagrange.

Recordemos la forma básica de las ecuaciones de Lagrange (7.12),

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.37)$$

Supongamos ahora que las fuerzas generalizadas  $Q_j$  provienen de un potencial dependiente de la velocidad  $U(q_j, \dot{q}_j, t)$ , de acuerdo con

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_j}, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.38)$$

Comprobamos inmediatamente que, llamando  $L = T - U$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.39)$$

### Aplicación: fuerzas electromagnéticas

Como ejemplo básico de potencial dependiente de la velocidad consideraremos las fuerzas electromagnéticas actuando sobre una partícula cargada. Si la carga eléctrica es  $e$  y la velocidad  $\mathbf{v}$ , estas fuerzas son

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}), \quad (7.40)$$

donde  $\mathbf{E}$  es la intensidad del campo eléctrico y  $\mathbf{B}$  el vector de inducción magnética. Éstos se obtienen respectivamente de un potencial escalar  $\phi$  y de un potencial vector  $\mathbf{A}$  de acuerdo con

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (7.41)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \nabla \wedge \mathbf{A}, \quad (7.42)$$

donde tanto  $\phi$  como  $\mathbf{A}$  son en general funciones del tiempo. En función de éstos, la fuerza vale

$$\mathbf{F} = e \left( -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) \right). \quad (7.43)$$

Veamos cómo puede obtenerse esta fuerza de un potencial  $U$ , dependiente de la velocidad. Sea  $(x, y, z)$  la posición de la partícula en coordenadas cartesianas. De entrada el término  $-e\nabla\phi$  corresponde a la energía potencial ordinaria  $V$ .

Las componentes cartesianas del término  $\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})$  son

$$[\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})]_i = \sum_{k,l,m=1}^n \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} v_j \frac{\partial A_m}{\partial x_l}; \quad (7.44)$$

consideremos —por ejemplo— la componente  $x$  (índice de coordenada 1):

$$\begin{aligned} [\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})]_x &= v_y \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - v_z \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ &= v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z}, \end{aligned}$$

donde se ha añadido y restado  $v_x(\partial A_x/\partial x)$  en el último término. A su vez,  $\mathbf{A}$  es función de coordenadas y tiempo, por lo que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A_x &= \frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{x}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right]. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Resulta por tanto

$$[\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})]_x = \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t}. \quad (7.46)$$

Generalizando para una componente genérica  $x_i$ , la fuerza electromagnética es por tanto

$$F_i = e \left[ -\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{dA_i}{dt} \right], \quad (7.47)$$

y considerando asimismo (7.45) generalizada según una dirección  $x_i$ , se obtiene

$$F_i = e \left[ -\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right) \right]. \quad (7.48)$$

Tomando ahora

$$U = e(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \quad (7.49)$$

se obtiene finalmente

$$F_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad (7.50)$$

de acuerdo con (7.38). Resulta por tanto una función Lagrangiana de la forma

$$L = T - U = \frac{1}{2}mv^2 - e(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}). \quad (7.51)$$

Esta forma de la Lagrangiana permite observar que el momento de una partícula cargada en un campo electromagnético es

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + e\mathbf{A}. \quad (7.52)$$

Este resultado llama la atención, ya que indica que una parte del momento está asociado al propio campo electromagnético. En el caso en que una

coordenada  $x_i$  sea cíclica (es decir,  $\partial L/\partial x_i = 0$ ), es la componente correspondiente de este momento generalizado, en lugar del momento mecánico —cantidad de movimiento—, la que se conserva.

La representación de las fuerzas electromagnéticas debidas a la inducción magnética,  $e\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})$ , es similar a las fuerzas giroscópicas descritas anteriormente (apartado 7.2.8). En efecto, la expresión (7.44) se puede escribir como

$$[\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})]_i = \sum_{j=1}^n \gamma_{ij}^{\text{em}} \dot{x}_j, \quad (7.53)$$

donde se han empleado los coeficientes

$$\gamma_{ij}^{\text{em}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k,l,m=1}^n e\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} \frac{\partial A_m}{\partial x_l}. \quad (7.54)$$

Se comprueba inmediatamente que  $\gamma_{ij}^{\text{em}} = -\gamma_{ji}^{\text{em}}$ . Por tanto, esta representación es análoga a la de los términos de fuerzas giroscópicas en (7.34). Al igual que entonces, debido a la hemisimetría de los coeficientes, las fuerzas debidas a la inducción magnética no desarrollan trabajo,

$$\frac{dW^{\text{em}}}{dt} = \sum_{i,j=1}^n \gamma_{ij}^{\text{em}} \dot{q}_i \dot{q}_j = 0. \quad (7.55)$$

## 7.4. Sistemas con Ligaduras

Sea un sistema descrito mediante coordenadas generalizadas  $\{q_j\}$  no libres, gobernado por la ecuación fundamental de la dinámica (7.11). Si el sistema admite potencial  $V$  se puede escribir esta última ecuación en función de la Lagrangiana  $L$ :

$$\sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0, \quad \forall \{\delta q_j\} \text{ compatibles.} \quad (7.56)$$

Las variaciones  $\{\delta q_j\}$  no son libres, sino que están sujetas a restricciones o enlaces, por lo que no se pueden eliminar de la ecuación anterior.

No resulta posible elegir un conjunto de coordenadas libres si existen enlaces anholónomos en los que intervienen las velocidades, del tipo:

$$\Phi(q_j, \dot{q}_j, t) = 0$$

Restringiremos nuestra atención a las ligaduras anholónomas denominadas *catástásicas*, caracterizadas por una expresión lineal en  $\dot{q}_j$ :

$$\sum_{j=1}^n A_j \dot{q}_j + C = 0.$$



De forma equivalente, en función de variaciones infinitesimales:

$$\sum_{j=1}^n A_j dq_j + C dt = 0 \quad (7.57)$$

En la expresión anterior tanto  $A_j$  como  $C$  serán a su vez funciones de  $q_j$  y de  $t$ ; en caso de que fuesen constantes, admitiría una integral directa dando lugar a una expresión holónoma, por lo que la ligadura sería anholónoma sólo en apariencia:

$$A_j, C \text{ constantes} \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^n A_j (q_j - (q_j)_0) + C(t - t_0) = 0$$

Además de los sistemas con ligaduras anholónomas, en que forzosamente se han de formular los enlaces de forma explícita, en ocasiones nos interesará formular de esta manera una ligadura, aunque sea holónoma. Como veremos, así será posible calcular la reacción de enlace, que de otra manera no entraría en las ecuaciones. De esta manera, una ligadura holónoma  $\Phi(q_j, t) = 0$  es equivalente a

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

### 7.4.1. Método de los Multiplicadores de Lagrange

Supongamos un sistema mecánico, descrito mediante una función Lagrangiana  $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ , con:

- $n$  coordenadas generalizadas  $\{q_j, j = 1, \dots, n\}$
- $k$  ecuaciones de ligadura  $\Phi_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{q}_j + C_i = 0, (i = 1, \dots, k)$

El sistema posee  $(n - k)$  grados de libertad, por lo que las  $n$  coordenadas  $\{q_j\}$  no forman un conjunto libre. En cualquier caso, se verifica la ecuación fundamental de la dinámica (7.56).

Los desplazamientos virtuales se toman en un instante fijo, sin variación del tiempo ( $\delta t = 0$ ). Las condiciones de compatibilidad de éstos con los enlaces se obtienen sustituyendo  $(\delta q_j, \delta t = 0)$  en (7.57):

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \delta q_j = 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (7.58)$$

En sentido estricto no se puede decir sin embargo que los desplazamientos  $\{\delta q_j\}$  que cumplan (7.58) sean compatibles con los enlaces, al estar éstos últimos definidos en función de velocidades que implican necesariamente una

variación del tiempo. Sin embargo, las  $\{\delta q_j\}$  que cumplen (7.58) no producen trabajo virtual con las fuerzas de enlace, que es lo que en realidad nos interesa.

Introducimos ahora unos multiplicadores  $\{\lambda_i\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , de valores en principio arbitrarios. Multiplicaremos por ellos a cada una de las  $k$  expresiones (7.58), que seguirán valiendo cero:

$$\lambda_i \sum_{j=1}^n A_{ij} \delta q_j = 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (\text{no sumado}) \quad (7.59)$$

Sumamos ahora para las  $k$  expresiones anteriores (la suma seguirá valiendo cero) e introducimos esta suma en (7.56), que no se verá alterado:

$$\sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i A_{ij} \right] \delta q_j = 0 \quad (7.60)$$

donde para sacar factor común  $\delta q_j$  se ha intercambiado el orden de los sumatorios en  $i$  y  $j$ . Las expresiones (7.60) obtenidas dependen pues de  $(n+k)$  parámetros:  $k$  multiplicadores  $\{\lambda_i\}$  y  $n$  desplazamientos virtuales,  $\{\delta q_j\}$ .

Puesto que los multiplicadores  $\lambda_i$  son arbitrarios, podemos elegirlos de forma que se anulen  $k$  de los coeficientes del sumatorio en (7.60). Supongamos, sin pérdida de generalidad, que éstos son los  $k$  primeros:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i A_{ij} = 0, \quad j = 1, \dots, k; \quad (7.61)$$

restan pues en el sumatorio (7.60) tan sólo  $(n-k)$  coeficientes no nulos. Puesto que el sistema posee  $(n-k)$  grados de libertad, será posible elegir de forma libre los  $(n-k)$  desplazamientos virtuales correspondientes, de manera que se deberán anular los coeficientes respectivos:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i A_{ij} = 0, \quad j = k+1, \dots, n. \quad (7.62)$$

Así, por un motivo o por otro, han de anularse los  $n$  coeficientes entre corchetes en (7.60). El sistema queda entonces planteado con  $(n+k)$  ecuaciones,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i A_{ij} = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (7.63)$$

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{q}_j + C_i = 0 \quad i = 1, \dots, k \quad (7.64)$$

siendo las  $(n+k)$  incógnitas  $\{q_1, \dots, q_n\}$ ,  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ . Este planteamiento define las ecuaciones del movimiento en un caso general.

Sin embargo, en la práctica no suele ser aconsejable abordar directamente el problema de  $(n + k)$  ecuaciones (7.63), (7.64) con  $(n + k)$  incógnitas. Normalmente es posible eliminar de las ecuaciones los  $k$  multiplicadores  $\lambda_i$ , dejando un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas.

Si las fuerzas no provienen de un potencial, el desarrollo sería enteramente análogo, pero partiendo de (7.11) en lugar de (7.56). Al final, las ecuaciones equivalentes a (7.63) serían:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{i=1}^k \lambda_i A_{ij}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Esta expresión permite interpretar el significado físico del término  $\sum_{i=1}^k \lambda_i A_{ij}$ . Se trata de la reacción en el enlace, en la dirección de la coordenada  $q_j$ . Ésta se suma a las fuerzas generalizadas  $Q_j$ , que recordamos provenía únicamente de las fuerzas activas.

**EJEMPLO 7.6:** Rodadura de un aro por un plano inclinado. Sea un aro de radio  $r$  y masa  $m$  que rueda sin deslizar, dentro de un plano vertical, sobre una recta inclinada un ángulo  $\alpha$ . Buscamos obtener las ecuaciones dinámicas y la reacción tangencial de la recta sobre el disco que asegura la rodadura.

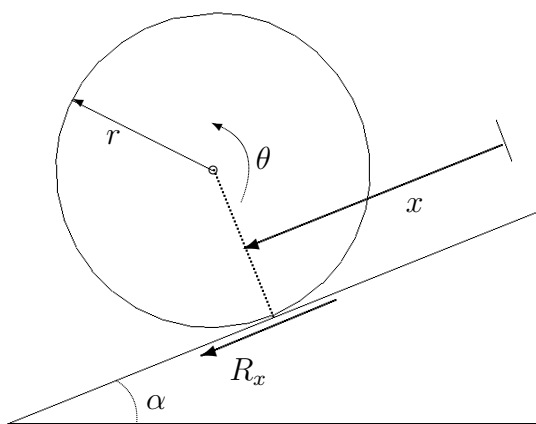


Figura 7.5: Aro rodando sin deslizar por un plano inclinado. (nota: al resolver el problema la reacción  $R_x$  resulta con valor negativo, lo que quiere decir que tiene sentido opuesto al dibujado)

**SOLUCIÓN:** La ligadura impuesta por la rodadura es:

$$r d\theta - dx = 0.$$

En realidad esta ligadura es holónoma, pues se podría integrar, quedando

$$r\theta = x;$$

sin embargo, deseamos mantener la ligadura de forma explícita, lo que nos permitirá obtener después la reacción del enlace.

En función de las coordenadas  $(x, \theta)$  (no libres), la Lagrangiana vale

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (mr^2) \dot{\theta}^2 + mgx \sin \alpha$$

Introducimos un multiplicador  $\lambda$ ; siguiendo la notación de (7.59)

$$\lambda (A_x \dot{x} + A_\theta \dot{\theta}) = 0, \quad \text{siendo } A_x = -1, \quad A_\theta = r$$

Resultan pues de (7.63) y (7.64) tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} - mg \operatorname{sen} \alpha + \lambda &= 0 \\ mr^2\ddot{\theta} - \lambda r &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Lagrange}$$

$$r\dot{\theta} = \dot{x} \quad \text{Ligadura}$$

Es posible eliminar  $\lambda$  de estas ecuaciones, derivando la ecuación de ligadura y entrando en la segunda ecuación de Lagrange:

$$r\ddot{\theta} = \ddot{x} \quad \Rightarrow \quad mr\ddot{x} = \lambda r \quad \Rightarrow \quad \lambda = m\ddot{x}$$

Deduciéndose finalmente:

$$\lambda = \frac{mg \operatorname{sen} \alpha}{2}; \quad \ddot{x} = \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{2}; \quad \ddot{\theta} = \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{2r}.$$

La fuerza tangencial sobre el disco es por tanto:

$$R_x = \lambda A_x = \frac{mg \operatorname{sen} \alpha}{2}(-1) = -\frac{mg \operatorname{sen} \alpha}{2}$$

Hacemos notar que el signo negativo para  $R_x$  indica que tiene el sentido contrario al considerado positivo para  $x$  (descendiente según la recta en la figura), es decir, tiene sentido ascendente.

Podemos obtener también:

$$R_\theta = \lambda A_\theta = \frac{mg \operatorname{sen} \alpha}{2}r,$$

que no es sino el momento debido a  $R_x$ .

Como comprobación, realizamos el mismo cálculo por los métodos de Newton-Euler:

$$\begin{aligned} \text{cantidad de movimiento:} & \quad m\ddot{x} = mg \operatorname{sen} \alpha + R_x \\ \text{momento cinético:} & \quad (mr^2)\frac{\ddot{\theta}}{r} = -R_x r \end{aligned}$$

Es decir,

$$R_x = -m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad R_x = -\frac{1}{2}mg \operatorname{sen} \alpha$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}g \operatorname{sen} \alpha.$$

**EJEMPLO 7.7:** Para el sistema descrito anteriormente en el ejemplo 7.1, Suponiendo que la masa de cada partícula vale  $m$ , obtener las ecuaciones del movimiento, y demostrar que el multiplicador de Lagrange representa la fuerza transversal de restricción en ese punto.

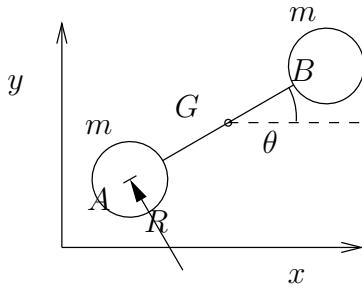


Figura 7.6: Sistema de dos partículas A y B, unidas rígidamente, con cuchillo en el apoyo de A que materializa un enlace anholónomo.

SOLUCIÓN: La ecuación de ligadura anholónoma (7.3) era

$$-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta - \frac{l}{2} \dot{\theta} = 0. \quad (7.65)$$

Los coeficientes son

$$A_x = -\sin \theta; \quad A_y = \cos \theta; \quad A_\theta = -\frac{l}{2}.$$

La lagrangiana, correspondiente en este caso únicamente a la energía cinética, vale

$$L = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{4}ml^2\dot{\theta}^2.$$

Las ecuaciones de Lagrange, empleando un multiplicador  $\lambda$  para la restricción, resultan

$$2m\ddot{x} = -\lambda \sin \theta; \quad (7.66)$$

$$2m\ddot{y} = \lambda \cos \theta; \quad (7.67)$$

$$\frac{1}{2}ml^2\ddot{\theta} = -\lambda \frac{l}{2}. \quad (7.68)$$

Estas tres ecuaciones, junto con la de la restricción (7.65), sirven para resolver las cuatro incógnitas  $(x, y, \theta, \lambda)$ . Es posible eliminar el multiplicador  $\lambda$ , cuyo valor a partir de (7.68) vale  $\lambda = -ml\ddot{\theta}$ , en las otras dos ecuaciones:

$$2\ddot{x} = l\ddot{\theta} \sin \theta; \quad 2\ddot{y} = -l\ddot{\theta} \cos \theta; \quad (7.69)$$

de esta forma, el problema queda planteado mediante estas dos ecuaciones, junto con la restricción (7.65), para las incógnitas  $(x, y, \theta)$ .

Las ecuaciones de Newton/Euler correspondientes al balance de cantidad de movimiento y momento cinético en G, función de la reacción R normal a la cuchilla, resultan:

$$2m\ddot{x} = -R \sin \theta; \quad (7.70)$$

$$2m\ddot{y} = R \cos \theta; \quad (7.71)$$

$$\frac{1}{2}ml^2\ddot{\theta} = -R \frac{l}{2}. \quad (7.72)$$

Se aprecia inmediatamente que coinciden exactamente con las ecuaciones (7.66-7.68) con  $\lambda = R$ . □

## 7.5. Introducción al Cálculo de Variaciones

### 7.5.1. Los Principios Variacionales

Los principios de Newton-Euler (apartado 6.2) dan como resultado ecuaciones diferenciales, es decir, relaciones entre funciones del movimiento y sus derivadas en un instante dado. Según vimos, el principio de los trabajos virtuales y el de D'Alembert globalizan el planteamiento de las ecuaciones para sistemas de varias partículas, definiendo una condición que se ha de verificar para todo el sistema (la nulidad del trabajo virtual para conjuntos arbitrarios de desplazamientos virtuales). El principio de D'Alembert permite formular, para sistemas de  $N$  partículas sujetos a enlaces, un conjunto de ecuaciones diferenciales por lo general mucho más reducido que las que se obtendrían de aplicar directamente los principios Newtonianos a cada una de las  $N$  partículas.

En cualquier caso, los procedimientos arriba comentados se basan en el planteamiento y resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales, que se han de cumplir para cada instante de tiempo. Al basarse en relaciones que se han de verificar para cada «punto» de tiempo, a esta formulación cabría llamarla «puntual» o «local».

Una alternativa a la formulación local de la dinámica es la ofrecida por los *principios variacionales*. Éstos se basan en establecer una propiedad global del movimiento a lo largo de todo un periodo de tiempo. En lugar de originar un sistema de ecuaciones diferenciales para cada instante, plantean una característica global del movimiento, es decir, una medida integral que lo caracteriza desde el instante inicial hasta el final.

El empleo de principios variacionales en la física proviene históricamente del campo de la óptica. El llamado principio de Fermat (1608-1665) permitió establecer las leyes básicas de la óptica de manera muy elegante. Establece este principio que la luz va de un punto a otro por el camino por el que tarda menos tiempo, incluso si sufre reflexiones y refracciones. De este principio se obtienen otras propiedades fundamentales como la igualdad de los ángulos de incidencia y reflexión en un espejo, o la ley de Snell de la refracción. Todo se deduce de una condición de extremo (mínimo) para una magnitud dada: el tiempo recorrido por el rayo de luz en su trayectoria.

En la mecánica, se plantea el problema de si es posible definir un funcional, en relación con la trayectoria dinámica de un sistema, que juegue un papel análogo al principio de Fermat. Así, la trayectoria real que seguiría el sistema, para unas condiciones iniciales determinadas, ocasionaría un extremo de este funcional.

Este funcional existe de hecho, como veremos en el apartado 7.6; se trata de la integral a lo largo del tiempo de la función Lagrangiana  $L$ , denominada *acción Hamiltoniana*. En el apartado mencionado desarrollaremos el principio, verificando su equivalencia con las formulaciones dinámicas ya conocidas.

Este principio de extremo o variacional tiene una gran potencia: puede ser generalizado a la mecánica de medios continuos (sistemas con infinitos grados de libertad), a sistemas cuánticos o relativistas. Por lo tanto, merece la pena detenerse, antes de presentar el principio de Hamilton, en la justificación y aplicación general de este planteamiento variacional nuevo.

### 7.5.2. El Problema Fundamental del Cálculo de Variaciones

El planteamiento del problema consiste en encontrar una función  $y(x)$ , de variable real  $x$ , de forma que un funcional determinado  $I[y]$  de esta función sea extremal. Sea el funcional con la estructura general siguiente,

$$I[y] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x) dx, \quad \text{con } y'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dy}{dx}, \quad (7.73)$$

donde  $f$  es una función dada de las variables  $(y, y', x)$ , a la que supondremos los requisitos de continuidad y diferenciabilidad necesarios, y  $(x_1, x_2)$  los dos puntos extremos, dentro de los que interesa el estudio de  $y(x)$ . El problema es determinar las funciones  $y(x)$ , que toman valores dados en los extremos  $y_1 = y(x_1)$  e  $y_2 = y(x_2)$ , y que hacen del valor del funcional  $I[y]$  extremal, es decir, un máximo o un mínimo.

Para ello, estudiaremos la variación del funcional, que llamaremos  $\delta I$ , para variaciones arbitrarias de  $y(x)$  que cumplan las condiciones de borde dadas. Esta variación debe ser nula, como expresión de la condición de extremal. Como primer paso, investigamos la familia uniparamétrica de funciones variadas

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \eta(x),$$

siendo  $\alpha \in \mathbb{R}$  un parámetro continuo y  $\eta(x)$  una función real dada arbitraria, a la que únicamente exigiremos que tenga condiciones de borde homogéneas, es decir  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ . Es decir, «enmarcamos» la solución buscada  $y(x)$  dentro de un conjunto de curvas de comparación  $y(x, \alpha)$  que cumplan todas ellas las mismas condiciones de borde que  $y(x)$ .

De esta manera el valor del funcional depende de  $\alpha$ :

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x) dx.$$

La variación de éste para una variación arbitraria  $\delta\alpha$  es

$$\delta I \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dI}{d\alpha} \delta\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right\} \delta\alpha dx. \quad (7.74)$$

Claramente,

$$\frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right);$$

por lo que integrando por partes el segundo sumando en (7.74),

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \Big|_{x_1}^{x_2}}_{=0}.$$

El segundo sumando en la expresión anterior (términos de contorno) no contribuye, puesto que  $dy/d\alpha = \eta(x)$ , que desaparece en  $x_1$  y  $x_2$ . Así,

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} \delta \alpha dx = 0. \quad (7.75)$$

En esta expresión  $(\partial y/\partial \alpha)\delta \alpha = \eta(x)\delta \alpha$  se pueden interpretar como variaciones de la curva  $y(x)$ . Estas variaciones, que llamaremos  $\delta y(x)$ , son arbitrarias, puesto que  $\eta(x)$  es una función cualquiera con la única salvedad de las condiciones de borde homogéneas. En la ecuación anterior, el término entre corchetes, en consonancia con la denominación establecida en (7.16), constituye la «derivada variacional»:

$$\frac{\delta f}{\delta y} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right). \quad (7.76)$$

Puesto que  $\delta I = 0$  para variaciones arbitrarias  $\delta y$ , el teorema fundamental del cálculo de variaciones establece que la derivada variacional en (7.75) se debe anular en todos los puntos del intervalo:

$$\frac{\delta f}{\delta y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0, \quad \forall x \in ]x_1, x_2[ \quad (7.77)$$

Esta expresión se denomina la *ecuación de Euler del cálculo variacional*.

Es posible observar la similitud de la ecuación de Euler con las ecuaciones de Lagrange de la dinámica (7.14), sin más que sustituir  $f(y, y', x)$  por  $L(q, \dot{q}, t)$ , en un hipotético sistema de un grado de libertad. Este resultado será el punto de partida para el principio variacional de Hamilton (apartado 7.6).

**EJEMPLO 7.8:** Se trata de una aplicación clásica del cálculo variacional, consistente en hallar la curva a lo largo de la cual una partícula, sometida al campo gravitatorio, realiza el descenso entre dos puntos dados en un tiempo mínimo. Esta curva se denomina «braquistócrona».

**SOLUCIÓN:** Tomando como punto de partida el  $1 \equiv (0, 0)$  y de llegada el  $2 \equiv (\alpha, \beta)$ , se plantea obtener la curva  $y(x)$  tal que la duración

$$T = \int_1^2 \frac{ds}{v}$$

sea mínima. En la expresión anterior  $ds$  es el elemento diferencial de arco, y  $v$  la velocidad:

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad \text{siendo } y' = dy/dx,$$



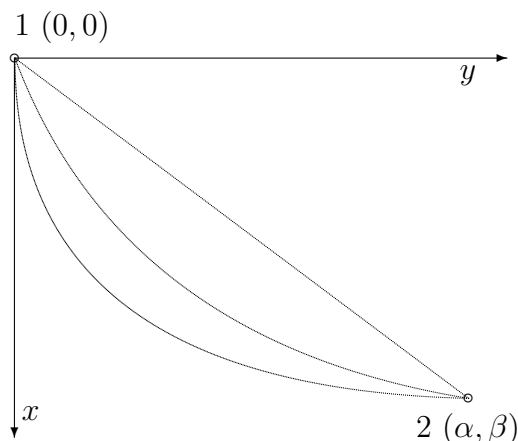


Figura 7.7: Una partícula sometida a su propio peso debe descender del punto 1 al 2 en la trayectoria por la que tarde un tiempo mínimo (denominada braquistócrona).

$$v = \sqrt{2gx},$$

suponiendo  $v = 0$  en el punto 1. Así,

$$T = \int_1^2 \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2gx}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_1^2 \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{x}} dx$$

Planteado de esta forma, el problema es formalmente idéntico al expresado en (7.73), siendo  $f = \sqrt{[1 + (y')^2]/x}$ , por lo que se podrá aplicar la ecuación de Euler (7.77):

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0.$$

En este caso,  $\partial f / \partial y = 0$ , luego la ecuación anterior se reduce a la integral primera

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = C \quad (\text{cte.})$$

Particularizando:

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{x[1 + (y')^2]}} = C \quad \Rightarrow \quad y' = \sqrt{\frac{x}{\frac{1}{C^2} - x}}.$$

Para facilitar la integración de  $y'$ , realizamos el cambio de variable y de constante siguiente:

$$\frac{1}{C^2} = 2r; \quad x = r(1 - \cos \varphi);$$

resultando

$$\frac{dy}{d\varphi} = y' \frac{dx}{d\varphi} = \sqrt{\frac{x}{2r-x}} r \operatorname{sen} \varphi = r(1 - \cos \varphi).$$

Esta expresión se integra directamente, teniendo en cuenta las condiciones iniciales ( $y_1 = 0, \varphi_1 = 0$ ), obteniéndose

$$y = r(\varphi - \operatorname{sen} \varphi).$$

Por lo tanto, la ecuación paramétrica de la curva buscada es

$$\begin{cases} x = r(1 - \cos \varphi), \\ y = r(\varphi - \operatorname{sen} \varphi), \end{cases}$$

que corresponde a una *cicloide*<sup>8</sup>, con cúspide en  $1 \equiv (0, 0)$ . El parámetro  $r$  de la misma se hallaría obligando a que el punto  $2 \equiv (\alpha, \beta)$  pertenezca a la curva:

$$\begin{aligned} \alpha &= r(1 - \cos \varphi); \\ \beta &= r(\varphi - \operatorname{sen} \varphi). \end{aligned}$$

Éste constituye un sistema de ecuaciones no lineal para las incógnitas  $(r, \varphi)$ , que se resolvería por métodos numéricos iterativos.

## 7.6. El Principio de Hamilton

Sea un sistema conservativo y holónomo con  $n$  grados de libertad, en el que se ha definido una función Lagrangiana ( $L$ ). El principio de Hamilton establece que:

«entre dos instantes  $t_1$  y  $t_2$ , caracterizados por las configuraciones respectivas  $\{q_i^{(1)}\}$  y  $\{q_i^{(2)}\}$ , el sistema evoluciona de forma que la integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad (7.78)$$

adopta un valor estacionario (es decir, extremal) para la trayectoria real del sistema.»

Esta estacionariedad se refleja en un mínimo de  $S$ , denominada *acción Hamiltoniana*. Al principio de Hamilton también se le llama principio de la mínima acción<sup>9</sup>.

<sup>8</sup>La cicloide es la curva que traza un punto del perímetro de una circunferencia cuando ésta rueda sin deslizar sobre una recta.

<sup>9</sup>Existe otro principio también llamado de la mínima acción, formulado históricamente antes que el de Hamilton, debido a Maupertuis (1744), y clarificado posteriormente por Euler. En éste, se define la acción como  $\int_{t_1}^{t_2} 2T dt$ , siendo  $T$  la energía cinética, y la propiedad de mínimo se verifica para variaciones en las trayectorias del sistema que mantengan constante la integral de Jacobi  $h$  (7.31). Una exposición concisa de este último principio puede encontrarse en J.B. Griffiths: *The Theory of Classical Dynamics*, Cambridge U.P., 1985. La mayor generalidad de las variaciones posibles en el principio de Hamilton lo hacen preferible desde un punto de vista práctico, aunque si se quiere evitar confusiones conviene diferenciar ambos enunciados, precisando «mínima acción Hamiltoniana» o «mínima acción Maupertuisiana.»

El principio de Hamilton se puede considerar como un postulado básico, siendo posible deducir a partir de él toda la dinámica, de forma alternativa a las leyes de Newton o al principio de los trabajos virtuales. De hecho, se trata del planteamiento más «elegante»: constituye una única expresión, con un enunciado preciso, y permite definir la evolución dinámica global a lo largo del tiempo por contraposición a la descripción local instante a instante.

En lo que sigue, comprobaremos la equivalencia del principio de Hamilton con las ecuaciones de Lagrange, que anteriormente se habían deducido a partir del principio de D'Alembert.

### 7.6.1. Las Ecuaciones de Lagrange a Partir del Principio de Hamilton

Suponemos que la trayectoria real que sigue el sistema es  $\{q_i(t)\}$ . Tomamos una familia de variaciones  $\{\delta q_i\}$  a tiempo constante, de la forma:

$$\delta q_i(t) = a_i(t)\delta\alpha,$$

donde  $\delta\alpha \in \mathbb{R}$  es una variación arbitraria, y  $a_i(t)$  son funciones dadas del tiempo, arbitrarias salvo por la restricción de tener condiciones de borde homogéneas  $a_i(t_1) = a_i(t_2) = 0$ . De esta forma, todos los caminos variados  $q_i(t) + \delta q_i(t)$  tienen el mismo origen y final. Expresando la condición de extremal de la acción Hamiltoniana  $S$  al variar  $\alpha$ , y teniendo en cuenta que las variaciones no afectan a los límites de la integral,

$$\delta S = \frac{dS}{d\alpha}\delta\alpha = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} a_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{a}_i \right) \delta\alpha dt.$$

En esta expresión, así como en el resto de este apartado 7.6 se sobreentiende el convenio de sumación de índices repetidos, salvo en el caso en que estos índices afecten a vectores. Integrando por partes el segundo sumando dentro del paréntesis resulta

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{a}_i dt = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} a_i}_{=0} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) a_i dt$$

El término de contorno desaparece, puesto que  $dL/d\alpha = a_i(t)$ , que se anula en  $t_1$  y  $t_2$ . Así, se llega a

$$\delta S = \delta\alpha \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] a_i(t) dt = 0.$$

Considerando que  $a_i(t)$  son funciones independientes para cada coordenada  $i$  (recordemos que se hizo la hipótesis de que el sistema era holónomo por

lo que esto siempre será posible), con valor arbitrario salvo la condición de borde homogénea, la expresión anterior obliga a

$$-\frac{\delta L}{\delta q_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1 \dots, n; \quad t \in ]t_1, t_2[. \quad (7.79)$$

Estas relaciones son precisamente las ecuaciones de Lagrange deducidas anteriormente (7.14), y constituyen para este caso las ecuaciones de Euler correspondientes al principio variacional (7.78). Por este motivo, se denominan también *ecuaciones de Euler-Lagrange*.

Hemos comprobado que del principio de Hamilton se deducen las ecuaciones de Lagrange. Recíprocamente, es inmediato comprobar que si se cumplen las ecuaciones de Lagrange, se sigue la estacionariedad de (7.78). Por tanto, queda demostrada la equivalencia.

El principio de Hamilton explica con gran claridad algunas propiedades que habíamos demostrado anteriormente, como la invariancia de las ecuaciones de Lagrange respecto a transformaciones «de galga» (7.15). En efecto, al sumar a  $L$  el término  $\frac{d}{dt}F(q_i, t)$ , el efecto sobre la acción  $S$  en (7.78) es

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} F(q_i, t) dt = F(q_i^{(2)}, t_2) - F(q_i^{(1)}, t_1) = \text{cte.} \quad (7.80)$$

El añadir una constante no altera la estacionariedad de  $S$ , por lo que queda comprobada la «neutralidad» dinámica de este tipo de transformaciones.

### 7.6.2. Generalización del principio de Hamilton

Es posible obtener una generalización del principio de Hamilton, para considerar fuerzas no conservativas o sistemas anholónomos, que no puedan definirse mediante coordenadas libres.

Supongamos un sistema definido con coordenadas  $\{q_j\}$  no libres, en el que existen fuerzas generalizadas  $Q_j$ , posiblemente no conservativas. Además, las coordenadas están sujetas a  $k$  ecuaciones de ligadura,

$$\begin{aligned} \Phi_i(q_j, \dot{q}_j, t) &= 0, \quad i = 1, \dots, k \\ \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}}_{A_{ij}} \dot{q}_j + \underbrace{\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}}_{C_i} &= 0 \end{aligned}$$

o en función de desplazamientos virtuales

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \delta q_j = 0. \quad (7.81)$$

Las ecuaciones de la dinámica serían

$$\sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j - \sum_{i=1}^k \lambda_i A_{ij} \right] \delta q_j = 0, \quad \forall \{\delta q_j\}_{\text{comp.}}$$

Tomaremos variaciones  $\{\delta q_i\}$  compatibles con los enlaces, a tiempo constante ( $\delta t = 0$ ), de forma que cumplan la condición de contorno  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ . El principio generalizado afirma que se ha de verificar

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \delta T + \sum_{j=1}^N \left( Q_j + \sum_{i=1}^k \lambda_i A_{ij} \right) \delta q_j \right] dt = 0 \quad \forall \{\delta q_j\}_{\text{comp.}} \quad (7.82)$$

Empleando la ecuación (7.81), al tratarse de desplazamientos compatibles, en la expresión anterior se anulan los términos de los multiplicadores, quedando

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \delta T + \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j \right] dt = 0 \quad \forall \{\delta q_j\}_{\text{comp.}} \quad (7.83)$$

En el caso en que las fuerzas provengan de un potencial, es inmediata la equivalencia de esta expresión del principio generalizado con el principio de Hamilton expresado en (7.78):

$$\delta T + \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j = \delta T - \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta V} = \delta L.$$

En un caso general, la justificación del principio generalizado se realiza como sigue. La variación de la energía cinética se puede desarrollar como

$$\delta T = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i;$$

con la definición realizada de las variaciones, se verifica

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i;$$

siguiendo ahora un procedimiento similar al expuesto en el apartado 7.6.1, la integral respecto del tiempo del primer sumando se realiza por partes:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt = \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i}_{=0} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt.$$

Sustituyendo estas expresiones en (7.82) resulta

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left[ -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i \right] \delta q_i dt = 0.$$

Puesto que esta relación se verifica para  $\delta q_i(t)$  de evolución arbitraria en el tiempo (con la única restricción de las condiciones de borde homogéneas), el integrando ha de anularse:

$$\sum_{i=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right] \delta q_i = 0;$$

expresión que concuerda con la ecuación fundamental de la dinámica o principio de D'Alembert en coordenadas generalizadas (7.11). A su vez, si  $\{q_i\}$  es un sistema libre,  $\{\delta q_i\}$  se pueden escoger de forma independiente entre ellas, por lo que se obtienen finalmente las ecuaciones de Euler-Lagrange (7.12):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i.$$

## 7.7. La Dinámica a Partir del Principio de Hamilton

Como ya se ha mencionado, el principio de Hamilton puede servir de sustento a todo el desarrollo de la dinámica, admitiendo como postulados adicionales únicamente las propiedades del espacio y del tiempo y el principio de relatividad de Galileo, expuestos en el capítulo 1 (apartados 1.2 y 1.3).

Este planteamiento es el seguido por algunos textos de mecánica clásica teórica, resultando interesante por la elegancia formal de su desarrollo, así como por la fundamentación sólida de las leyes de conservación de la mecánica.

Expondremos aquí de manera resumida tan sólo algunos resultados básicos y su relación con las leyes y teoremas de conservación conocidos de la dinámica. El enfoque seguido es similar al propuesto por Landau<sup>10</sup>, cuya obra se recomienda al lector que desee profundizar en este tema.

### 7.7.1. Estructura de la Función Lagrangiana

**Lagrangiana de una partícula aislada.-** Para empezar consideremos el problema mecánico más simple, consistente en una partícula aislada. La función Lagrangiana  $L$  correspondiente, por la homogeneidad del tiempo, no

<sup>10</sup>L. Landau y E. Lifshitz: *Curso Abreviado de Física Teórica; 1-Mecánica y Electrodinámica*, ed. Mir, 1971.

debe depender de  $t$ ; por la homogeneidad del espacio, no podrá depender de la posición  $\mathbf{r}$ , y por la isotropía del espacio tampoco se verá influida por la dirección de la velocidad  $\mathbf{v}$ . Por lo tanto, será una función únicamente del módulo de la velocidad,  $L(v^2)$ .

Imponemos ahora la invariancia de las leyes dinámicas con respecto a una transformación de Galileo. Para ello estudiemos una traslación con velocidad uniforme  $\mathbf{w}$ , por la cual la velocidad pasa a ser  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ . La Lagrangiana en este nuevo sistema,  $L(v'^2)$ , para ser equivalente a  $L(v^2)$  debe diferir de ella en una derivada temporal total de una función de coordenadas y tiempo (7.80). Esta condición se verifica únicamente por una función de la forma

$$L = kv^2.$$

En efecto, se puede comprobar que al hacer la transformación  $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{w}$ , se obtiene

$$L(v^2) = k(\mathbf{v}' + \mathbf{w})^2 = kv'^2 + 2k\mathbf{v}' \cdot \mathbf{w} + kw^2,$$

lo que se puede poner como

$$L(v^2) = L(v'^2) + \frac{d}{dt} \underbrace{(2k\mathbf{r}' \cdot \mathbf{w} + kw^2t)}_{F(\mathbf{r}', t)},$$

relación que prueba la equivalencia.

La *masa* de la partícula se define en función de la constante  $k$  de su Lagrangiana, como  $m \stackrel{\text{def}}{=} 2k$ ; de esta forma, la Lagrangiana del punto material aislado resulta finalmente

$$L = \frac{1}{2}mv^2.$$

Es inmediato comprobar que la masa así definida no puede ser negativa. Si así lo fuese, la acción  $S$  correspondiente a un trayecto entre dos puntos dados 1 y 2,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}mv^2 dt,$$

no tendría un mínimo; basta para ello considerar distintos movimientos, en que la partícula parte de 1, primero se aleja rápidamente de 2, para después acercarse a él. Cuanto más rápido sea este movimiento, menor (más negativa) sería la acción. En este caso no existiría un extremal, contradiciendo al principio de Hamilton.

**Lagrangiana de la unión de dos sistemas aislados.-** Se consideran ahora dos sistemas aislados  $A$  y  $B$ , con lagrangianas respectivas  $L_A$  y  $L_B$ , que no ejercen ninguna interacción entre sí. La Lagrangiana del sistema conjunto es

$$L_{A+B} = L_A + L_B.$$

En efecto, supongamos que el sistema  $A$  posee unas coordenadas libres  $\{q_i, i = 1, \dots, p\}$ , mientras que el  $B$  posee otras  $\{q_j, j = p + 1, \dots, n\}$ . Así, la suma de las Lagrangianas es

$$L(q_i, q_j, \dot{q}_i, \dot{q}_j, t) = L_A(q_i, \dot{q}_i, t) + L_B(q_j, \dot{q}_j, t).$$

Puesto que ambas partes del nuevo sistema conjunto no tienen ninguna interacción, debemos obtener las mismas ecuaciones de Lagrange con la Lagrangiana conjunta para  $q_i$  que si tomásemos tan sólo  $L_A$ . En efecto:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{A+B}}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_A}{\partial \dot{q}_i} \right); \\ \frac{\partial L_{A+B}}{\partial q_i} &= \frac{\partial L_A}{\partial q_i}, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

Si se tienen dos partículas  $a$  y  $b$  que no interactúan entre sí, la Lagrangiana del sistema conjunto es

$$L = \frac{m_a v_a^2}{2} + \frac{m_b v_b^2}{2}.$$

Si las dos partículas se mueven a la misma velocidad  $v_a = v_b$ , se puede considerar la masa conjunta como  $m_{a+b} \stackrel{\text{def}}{=} m_a + m_b$ , lo que justifica la propiedad de aditividad de la masa.

**Función de interacción.-** Si las partículas interactúan entre sí, postularemos que la Lagrangiana conjunta diferirá de la correspondiente a las partículas aisladas en una función de interacción  $V(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)$  que dependa únicamente de las coordenadas de cada partícula<sup>11</sup>:

$$L = \sum_{i=a,b} \frac{m_i v_i^2}{2} - V(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b). \quad (7.84)$$

Supondremos por otra parte que las dos partículas  $a$  y  $b$  están aisladas respecto del resto del universo, constituyendo un sistema cerrado. En este caso, por la homogeneidad del tiempo,  $L$  no podrá depender de  $t$ :  $\partial L / \partial t = 0$ , por lo que la función  $V$  tampoco puede depender de  $t$ .

<sup>11</sup>Conviene notar que esta hipótesis implica que si se produce una variación de las coordenadas, su efecto se nota de manera instantánea a través de la función  $V$ , por lo que las interacciones se propagan con velocidad infinita, posibilidad que no admite la mecánica relativista.



**Lagrangiana de un sistema de  $N$  partículas** El razonamiento anterior se puede extender a un sistema cerrado (es decir, aislado) de  $N$  partículas, descritas por sus posiciones vectoriales  $\mathbf{r}_i$ . La suma  $T \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}$  se denomina *energía cinética* del sistema, y  $V(\mathbf{r}_i)$  se denomina *energía potencial*. La expresión de la Lagrangiana es

$$L = T - V = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} - V(\mathbf{r}_i). \quad (7.85)$$

En función de esta Lagrangiana y del principio de Hamilton, siguiendo un desarrollo similar al expuesto en el apartado 7.6.1, y escogiendo como coordenadas generalizadas las coordenadas vectoriales  $\mathbf{r}_i$ , se obtiene la expresión:

$$\sum_i \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \right] \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad \forall \{\delta \mathbf{r}_i\} \text{ compatibles.} \quad (7.86)$$

Nótese que en la expresión anterior, en general no será posible eliminar los desplazamientos virtuales  $\delta \mathbf{r}_i$  y garantizar la nulidad de los términos entre corchetes. En general  $\delta \mathbf{r}_i$  no serán libres salvo que garanticemos que no existan enlaces internos de ningún tipo.

### 7.7.2. Teoremas de Conservación

En lo anterior se ha establecido la estructura de la función Lagrangiana (7.85) y su equivalencia con el principio de D'Alembert (7.86), a partir únicamente del principio de Hamilton y de las propiedades básicas del espacio y tiempo.

Se puede igualmente deducir los teoremas de conservación para sistemas aislados (apartado 6.3.4), empleando las propiedades básicas del espacio y tiempo de la mecánica clásica.

#### Conservación de la Energía.-

La *homogeneidad del tiempo* tiene como consecuencia la conservación de la energía en un sistema aislado. En efecto, si el sistema está aislado, hemos visto antes que la Lagrangiana no puede depender explícitamente del tiempo. La derivada temporal (total) de  $L(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i)$  se puede desarrollar como

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i$$

Empleando las ecuaciones (7.86) para un conjunto de desplazamientos virtuales que coincida con las velocidades reales del sistema (que obviamente cumplen la condición de compatibilidad con los enlaces) se obtiene

$$\sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i.$$

Sustituyendo en la expresión anterior queda

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right)$$

por lo que

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i - L \right) = 0.$$

Es inmediato comprobar que la magnitud entre paréntesis en la ecuación anterior coincide con la suma de energía cinética y la potencial definidas en (7.85); a esta suma la llamaremos energía total del sistema, y al anularse su derivada temporal, la energía se mantendrá constante:

$$E \stackrel{\text{def}}{=} T + V = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i - L = \text{cte.}$$

□

### Conservación de la Cantidad de Movimiento.-

La *homogeneidad del espacio* da lugar a otro teorema de conservación. Debido a dicha homogeneidad, las propiedades mecánicas de un sistema aislado no deben variar si dicho sistema, en su conjunto, experimenta un desplazamiento paralelo (traslación) en el espacio.

Sea un sistema aislado de  $N$  partículas, con coordenadas (vectoriales)  $\{\mathbf{r}_i, i = 1, \dots, N\}$ , y Lagrangiana  $L(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i)$ . Se verifica  $\partial L / \partial t = 0$  debido a que el sistema es aislado, por el mismo razonamiento que se hizo anteriormente. Tomaremos por tanto una traslación arbitraria infinitesimal  $\boldsymbol{\epsilon}$ , e imponemos la invariancia de la Lagrangiana. Debido a la traslación, las posiciones de las partículas varían como  $\mathbf{r}_i \mapsto \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\epsilon}$ , mientras que las velocidades no cambian:

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \overbrace{\delta \mathbf{r}_i}^{\boldsymbol{\epsilon}} = \left[ \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \right] \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0,$$

y al ser  $\boldsymbol{\epsilon}$  arbitrario se deduce que  $\sum_i \partial L / \partial \mathbf{r}_i = \mathbf{0}$ .

En función de las ecuaciones (7.86) particularizadas para un desplazamiento virtual  $\boldsymbol{\epsilon}$  (que obviamente es compatible, por tratarse de una traslación uniforme de un sistema aislado que no puede tener vínculos externos), se verifica

$$\left[ \sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) \right] \cdot \boldsymbol{\epsilon} = \left[ \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \right] \cdot \boldsymbol{\epsilon},$$

y al ser  $\boldsymbol{\epsilon}$  arbitrario, se llega a

$$\frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = \mathbf{0}.$$

De esta manera llegamos a la conclusión que la magnitud vectorial

$$\mathbf{P} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i},$$

que se denomina *cantidad de movimiento* del sistema, se mantiene constante para un sistema cerrado.

### Conservación del momento cinético.-

Debido a la *isotropía del espacio*, un sistema aislado sometido a un cambio de orientación no debería variar su comportamiento dinámico. Para ello, imaginemos que se efectúa un giro infinitesimal  $\delta\varphi$ . Las variaciones en posiciones y velocidades son respectivamente

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{r}_i &= \delta\varphi \wedge \mathbf{r}_i \\ \delta\dot{\mathbf{r}}_i &= \delta\varphi \wedge \dot{\mathbf{r}}_i\end{aligned}$$

Con estas variaciones de las velocidades, el módulo de la velocidad de cada partícula se conserva, por lo que la energía cinética  $T$  no varía. Por lo tanto la diferencia entre las Lagrangianas será únicamente función de las posiciones. Imponiendo la invariancia de la Lagrangiana,

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot (\delta\varphi \wedge \mathbf{r}_i) + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot (\delta\varphi \wedge \dot{\mathbf{r}}_i) = 0.$$

Permutando el producto mixto en esta expresión,

$$\delta\varphi \cdot \sum_i \left[ \mathbf{r}_i \wedge \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} + \dot{\mathbf{r}}_i \wedge \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right] = 0$$

y teniendo en cuenta que  $\delta\varphi$  es arbitrario,

$$\sum_i \left[ \mathbf{r}_i \wedge \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} + \dot{\mathbf{r}}_i \wedge \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right] = \mathbf{0}. \quad (7.87)$$

Expresamos ahora las ecuaciones (7.86), particularizadas para desplazamientos virtuales  $\delta\mathbf{r}_i = \delta\varphi \wedge \mathbf{r}_i$  (compatibles siempre en un sistema aislado libre de enlaces externos, ya que representan una rotación rígida infinitesimal):

$$\sum_i \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \right] \cdot (\delta\varphi \wedge \mathbf{r}_i) = 0$$

y permutando el producto mixto,

$$\delta\varphi \cdot \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \right] = 0$$

y al ser  $\delta\varphi$  arbitrario,

$$\sum_i \mathbf{r}_i \wedge \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) - \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = \mathbf{0}$$

empleando la ecuación (7.87) esta expresión queda convertida finalmente en

$$\sum_i \mathbf{r}_i \wedge \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) - \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \wedge \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = \frac{d}{dt} \underbrace{\left[ \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right]}_{\mathbf{H}_O} = \mathbf{0}.$$

Es decir, se conserva el *momento cinético*, definido como la suma de los momentos de las cantidades de movimiento:  $\mathbf{H}_O \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{p}_i$ , siendo  $\mathbf{p}_i \stackrel{\text{def}}{=} \partial L / \partial \dot{\mathbf{r}}_i$  la cantidad de movimiento de cada partícula.