



Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS. Elasticidad lineal

Felipe Gabaldón Castillo

Madrid, 29 de Noviembre y 13 de diciembre de 2007



Índice

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

- 1 Introducción
- 2 Formulación del problema de contorno
- 3 Formulaciones variacionales
- 4 Formulación de Galerkin
- 5 Formulación de Elementos Finitos
- 6 Formulación matricial
- 7 Elasticidad lineal
- 8 Ejemplo: el elemento CST
- 9 Elementos isoparamétricos
- 10 Cuadraturas



Introducción

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

- Sea σ el tensor de tensiones de Cauchy, $\mathbf{u}$ el vector desplazamiento y $\mathbf{b}$ el vector de fuerzas volumétricas.
- Consideraremos el tensor de deformaciones infinitesimales, que se define como la parte simétrica del tensor gradiente de desplazamientos:

$$\varepsilon = \nabla^s \mathbf{u}, \quad \varepsilon_{ij} = u_{(i,j)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1)$$

- Las componentes del tensor de tensiones se expresan como combinación lineal de las componentes del tensor de deformaciones mediante un tensor de cuarto orden $\mathbf{C}$ (Ley de Hooke generalizada), cuyas componentes C_{ijkl} son constantes y se denominan “coeficientes elásticos”:

$$\sigma = \mathbf{C}\varepsilon, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (2)$$



Introducción

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

El tensor de módulos elásticos tiene las siguientes propiedades:

- 1 Simetría mayor:

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (3)$$

- 2 Simetría menor:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (4)$$

- 3 Es definido positivo:

$$C_{ijkl}\Phi_{ij}\Phi_{kl} \geq 0 \quad \forall \Phi_{ij} \text{ simétrico} \quad (5)$$

$$C_{ijkl}\Phi_{ij}\Phi_{kl} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_{ij} = 0 \quad (6)$$

Consideraremos un sólido elástico definido por un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ con contorno $\partial\Omega$, tal que:

$$\partial\Omega = \partial_{u_i}\Omega \cup \partial_{t_i}\Omega \quad \emptyset = \partial_{u_i}\Omega \cap \partial_{t_i}\Omega \quad (7)$$

siendo $\partial_{u_i}\Omega$ la parte del contorno con desplazamientos impuestos en dirección i , y $\partial_{t_i}\Omega$ la parte con tensiones impuestas en dirección i



Formulación fuerte

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

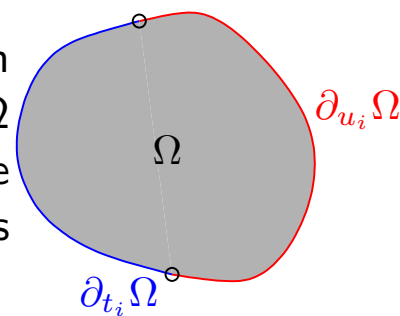
Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

Sea $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ el dominio ocupado por un sólido, cuyo contorno es $\partial\Omega = \partial_u\Omega \cup \partial_t\Omega$ con $\partial_u\Omega \cap \partial_t\Omega = \emptyset$. La formulación fuerte del problema se establece en los siguientes términos:



Dados $\mathbf{b} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{\mathbf{u}} : \partial_u\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{\mathbf{t}} : \partial_t\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, encontrar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ que cumple:

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{en } \partial_t\Omega \quad (9)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{en } \partial_u\Omega \quad (10)$$

con $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ y $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^S \mathbf{u}$



Formulación débil

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

Dados $\mathbf{b} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y las funciones $\bar{\mathbf{u}} : \partial_u\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{\mathbf{t}} : \partial_t\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, encontrar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} \in \delta \mid \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V}$ cumple:

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla^S \delta \mathbf{u} - \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\partial_t\Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma = 0 \quad (11)$$

siendo:

$$\delta = \{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \mid \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_u\Omega \} \quad (12)$$

$$\mathcal{V} = \{ \delta \mathbf{u} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \mid \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_u\Omega \} \quad (13)$$

y $H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ el espacio de Sobolev de orden 1 y grado 2:

$$H^1 = \left\{ \mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \int_{\Omega} \|\mathbf{u}\|_{2,1} d\Omega < \infty \right\}$$



Equivalencia de ambas formulaciones

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

- Lema 1. Descomposición euclídea de un tensor de orden 2

$$s_{ij} = \underbrace{s_{(ij)}}_{\text{simétrico}} + \underbrace{s_{[ij]}}_{\text{hemisimétrico}} ; \quad s_{(ij)} = \frac{s_{ij} + s_{ji}}{2}, \quad s_{[ij]} = \frac{s_{ij} - s_{ji}}{2}$$

- Lema 2. Sea s_{ij} un tensor simétrico y t_{ij} un tensor no simétrico. Entonces,

$$s_{ij}t_{ij} = s_{ij}t_{(ij)}$$

El lema queda demostrado si $s_{ij}t_{[ij]} = 0$. En efecto:

$$\begin{aligned} s_{ij}t_{[ij]} &= -s_{ij}t_{[ji]} \\ &= -s_{ji}t_{[ji]} \\ &= -s_{ij}t_{[ij]} \end{aligned}$$



Equivalencia de ambas formulaciones

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

Si $\mathbf{u}$ es solución del problema fuerte, entonces $\mathbf{u} \in \Omega$.
Multiplicando (8) por $\delta \mathbf{u} \in \mathcal{V}$ e integrando en Ω :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) \delta u_i d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta u_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} b_i \delta u_i d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta u_{(i,j)} d\Omega + \int_{\Omega} b_i \delta u_i d\Omega + \int_{\partial \Gamma_i \Omega} \bar{t}_i \delta u_i d\Gamma \quad (14) \end{aligned}$$

y por tanto u_i es solución del problema débil



Equivalencia de ambas formulaciones

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

Sea u_i solución del problema débil. Dado que $u_i \in \delta_i$, $u_i = \bar{u}_i$ en $\partial_{u_i}\Omega$. De (11):

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta u_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} b_i \delta u_i d\Omega + \int_{\partial_{t_i}\Omega} \bar{t}_i \delta u_i d\Gamma \\ &= - \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} d\Omega + \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) \delta u_i d\Omega + \int_{\partial_{t_i}\Omega} \bar{t}_i \delta u_i d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) \delta u_i d\Omega - \int_{\partial_{t_i}\Omega} (\sigma_{ij} n_j - \bar{t}_i) \delta u_i d\Gamma \end{aligned} \quad (15)$$



Equivalencia de ambas formulaciones

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

Sean:

$$\alpha_i = \sigma_{ij,j} + b_i \quad (16)$$

$$\beta_i = \sigma_{ij} n_j - \bar{t}_i \quad (17)$$

La equivalencia entre ambas formulaciones estará demostrada si se verifica que $\alpha_i = 0$ en Ω y $\beta_i = 0$ en $\partial_{t_i}\Omega$. Sea $\delta u_i = \alpha_i \phi$, donde:

$$\phi > 0 \text{ en } \Omega$$

$$\phi = 0 \text{ en } \partial\Omega$$

$$\phi \text{ suave}$$

Con estas condiciones queda garantizado que $\delta u_i \in \mathcal{V}$.



Equivalencia de ambas formulaciones

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

Sustituyendo este δu_i en (15):

$$0 = \int_{\Omega} \underbrace{\alpha_i}_{\geq 0} \underbrace{(\alpha_i \phi)}_{> 0} d\Omega \Rightarrow \alpha_i = 0 \text{ en } \Omega \quad (18)$$

Análogamente, tomemos ahora $\delta u_i = \delta_{i1} \beta_1 \psi$, donde:

$$\psi > 0 \text{ en } \partial_{t_1} \Omega$$

$$\psi = 0 \text{ en } \partial_{u_1} \Omega$$

$$\psi \text{ suave}$$

Sustituyendo esta nueva expresión de $\delta u_i \in \mathcal{V}$ en (15):

$$0 = \int_{\partial_{t_1} \Omega} \underbrace{\beta_1}_{\geq 0} \underbrace{(\beta_1 \psi)}_{> 0} d\Omega \Rightarrow \beta_1 = 0 \text{ en } \partial_{t_1} \Omega \quad (19)$$



Formulaciones variacionales

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

Considerando el funcional de la energía potencial:

$$\Pi_p(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} (W(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma \quad (20)$$

la ecuación (11) equivale a establecer la condición de estacionariedad del funcional (20):

$$\delta \Pi_p(\mathbf{u}) = 0 \quad (21)$$

- Se dice que (11) es la ecuación variacional del problema (21), y que la ecuación (8) es la ecuación de Euler-Lagrange asociada al problema variacional (21).
- Para la ley de Hooke:

$$W(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (22)$$



Formulaciones variacionales

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

- Existen otros principios variacionales diferentes al expresado en (21), asociado al funcional de la *energía potencial total* (20).
- Dichos principios son la base de la formulación de los denominados “elementos mixtos”.
- En general se deducen a partir de “funcionales multicampo” como, por ejemplo, el de Hu-Washizu:

$$\Pi_W(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}) = \int_{\Omega} (W(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla^S \mathbf{u} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma$$



Formulación de Galerkin

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

- Sean ν^h y δ^h aproximaciones de dimensión finita de los espacios funcionales ν y δ , respectivamente
- Se adopta la descomposición: $\mathbf{u}^h = \mathbf{v}^h + \bar{\mathbf{u}}^h$ con $\mathbf{v}^h \in \nu^h$ y $\bar{\mathbf{u}}^h = \bar{\mathbf{u}}$ en $\partial_u \Omega$ (“aproximadamente”)
- Dados $\mathbf{b} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y las funciones $\bar{\mathbf{u}} : \partial_u \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{\mathbf{t}} : \partial_t \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, encontrar el campo de desplazamientos $\mathbf{u}^h = \mathbf{v}^h + \bar{\mathbf{u}}^h$, con $\delta \mathbf{v}^h \in \nu^h$, tal que $\forall \delta \mathbf{u}^h \in \nu^h$ se cumple:

$$\int_{\Omega} \nabla^S \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{C} \nabla^S \delta \mathbf{u}^h d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}^h d\Omega + \int_{\partial_t \Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u}^h d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla^S \bar{\mathbf{u}}^h \cdot \mathbf{C} \nabla^S \delta \mathbf{u}^h d\Omega \quad (23)$$



Formulación de elementos finitos

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

- El dominio Ω se discretiza en n_{elm} elementos Ω^e :

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \Omega^e \quad \Omega^i \cap \Omega^j = \emptyset, \text{ si } i \neq j \quad (24)$$

- El elemento Ω^e se transforma en un “cubo unitario”

$$\square = \underbrace{[-1, 1] \times \cdots \times [-1, 1]}_{n_{\text{dim}}}$$

definido en el espacio isoparamétrico de coordenadas $\{\xi\}$:

$$\phi : \xi \in \square \rightarrow \mathbf{x} \in \Omega^e; \quad \mathbf{x} = \phi(\xi) = \sum_{A=1}^{n_{\text{nod}}^e} \mathbf{x}_A N_A(\xi) \quad (25)$$

siendo $\mathbf{x}_A$ las coordenadas de los nodos del elemento e



Formulación de elementos finitos

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

- Los subespacios de dimensión finita δ^h y $\mathcal{V}^h$ se definen mediante unas funciones de interpolación N_A , $A = 1 \dots n_{\text{nod}}$ (polinómicas), que se denominan “funciones de forma”

$$\delta^h = \left\{ \mathbf{u}^h \in \delta \mid u_i^h = \sum_{A \in \eta - \eta_{u_i}} u_{iA} N_A(\xi) + \sum_{A \in \eta_{u_i}} \bar{u}_{iA} N_A(\xi) \right\}$$

$$\mathcal{V}^h = \left\{ \delta \mathbf{u}^h \in \mathcal{V} \mid \delta u_i^h = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_{u_i} \Omega; \quad \delta u_i^h = \sum_{A \in \eta - \eta_{u_i}} \delta u_{iA} N_A(\xi) \right\}$$

siendo $\eta = \{1, 2, \dots, n_{\text{numnp}}\}$ el conjunto de números de los n_{numnp} nodos de la malla, $\eta_{u_i} \subset \eta$ el conjunto de nodos en los que $u_i^h = \bar{u}_i$, y $\eta - \eta_{u_i}$ el conjunto complementario de η_{u_i}



Interpolación del campo de desplazamientos

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

Si se emplea una formulación isoparamétrica que interpola los desplazamientos con la misma interpolación que las coordenadas (25):

$$\mathbf{u}^h = \sum_{A=1}^{n_{\text{nod}}} \mathbf{d}_A N_A(\xi) = \mathbf{N}^T \mathbf{d}^e \quad (26)$$

siendo $\mathbf{d}^e$ el vector de desplazamientos nodales del elemento e y $\mathbf{N}$ la matriz de funciones de forma del elemento. Por ejemplo, en 2D:

$$\begin{Bmatrix} u_1(x, y) \\ u_2(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_{n_{\text{nod}}} & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_{n_{\text{nod}}} \end{pmatrix} \mathbf{d}^e \quad (27)$$



Interpolación del campo de deformaciones

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

Con la notación en que las tensiones y deformaciones se expresan en forma de vector (por ejemplo en 2D: $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, 2\varepsilon_{xy})^T$) y derivando (26), la interpolación del campo de deformaciones se expresa:

$$\nabla^S u_{ij}^h = \sum_{A=1}^{n_{\text{nod}}} \frac{1}{2} (N_{A,i}^e d_{Aj} + N_{A,j}^e d_{Ai}) \Rightarrow \nabla^S \mathbf{u}^h = \mathbf{B} \mathbf{d}^e \quad (28)$$

En 2D:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & \dots & \frac{\partial N_{n_{\text{nod}}}}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \dots & 0 & \frac{\partial N_{n_{\text{nod}}}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial N_{n_{\text{nod}}}}{\partial x_2} & \frac{\partial N_{n_{\text{nod}}}}{\partial x_1} \end{pmatrix} \mathbf{d}^e \quad (29)$$



Ecuaciones de elementos finitos

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

Sustituyendo (26) y (28) en (23) e imponiendo que los desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{u}$ son arbitrarios, después de operar se obtiene:

$$\mathbf{R} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A} \sum_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \left[\mathbf{f}^{e,\text{ext}} - \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^h(\boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega \right] = \mathbf{0} \quad (30)$$

donde $\mathbf{A}[\cdot]$ es el operador de ensamblaje y $\mathbf{f}^{e,\text{ext}}$ es el vector de fuerzas externas convencional que se obtiene a partir de la expresión (23):

$$\mathbf{f}^{e,\text{ext}} = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial_t \Omega^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (31)$$



Observaciones:

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

- La ecuación (30) está planteada en forma residual (anulando la diferencia entre las fuerzas externas y las fuerzas internas), que es la adecuada para problemas no lineales.
- En lo sucesivo se considerará el caso de la elasticidad lineal, en el que si denominamos $\mathbf{C}$ a la matriz de módulos elásticos (o matriz constitutiva), resulta:

$$\boldsymbol{\sigma}^h(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{d}^e \quad (32)$$

entonces la ecuación (30) se expresa:

$$\mathbf{A} \sum_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \left[\left(\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega \right) \right] \mathbf{d} = \sum_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \mathbf{f}^{e,\text{ext}} \quad (33)$$



Ecuaciones de elementos finitos

Elasticidad lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación del problema de contorno

Formulaciones variacionales

Formulación de Galerkin

Formulación de Elementos Finitos

Formulación matricial

Elasticidad lineal

Ejemplo: el elemento CST

Elementos iso-paramétricos

- La matriz de rigidez elemental se define como:

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega \quad (34)$$

- Ensamblando los vectores de fuerzas elementales y las matrices de rigidez elementales:

$$\mathbf{f} = \sum_{e=1}^{n_{elm}} \mathbf{f}^{e,ext} \quad (35)$$

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_{elm}} \mathbf{K}^e \quad (36)$$

el sistema (33) se expresa:

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{d} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} \quad (37)$$



Ecuaciones de la elasticidad lineal

Elasticidad lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación del problema de contorno

Formulaciones variacionales

Formulación de Galerkin

Formulación de Elementos Finitos

Formulación matricial

Elasticidad lineal

Ejemplo: el elemento CST

Elementos iso-paramétricos

- Módulo de corte:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

- Deformación volumétrica

$$e = \varepsilon_{ii}$$

- Módulo de def. volumétrica

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E} \sigma_{ii} \Rightarrow p = -ke$$

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{2G}$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G}$$



Elasticidad 2D. Deformación plana

Elasticidad lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación del problema de contorno

Formulaciones variacionales

Formulación de Galerkin

Formulación de Elementos Finitos

Formulación matricial

Elasticidad lineal

Ejemplo: el elemento CST

Elementos iso-paramétricos

- La condición de deformación plana es ($\varepsilon_{zz} = 0$)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (38)$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (39)$$

siendo λ y μ los coeficientes de Lamé:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (40)$$



Deformación plana: aplicaciones

Elasticidad lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación del problema de contorno

Formulaciones variacionales

Formulación de Galerkin

Formulación de Elementos Finitos

Formulación matricial

Elasticidad lineal

Ejemplo: el elemento CST

Elementos iso-paramétricos





Deformación plana: aplicaciones

Elasticidad lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación del problema de contorno

Formulaciones variacionales

Formulación de Galerkin

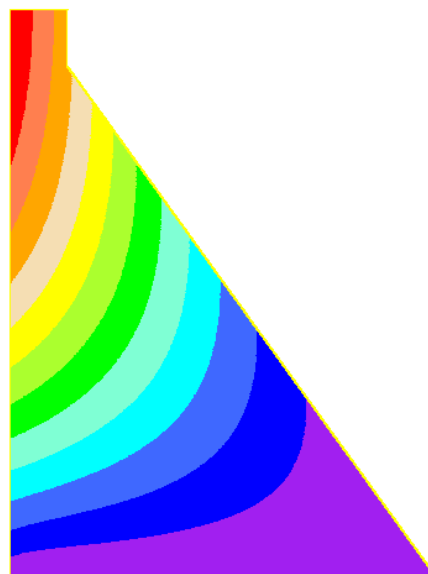
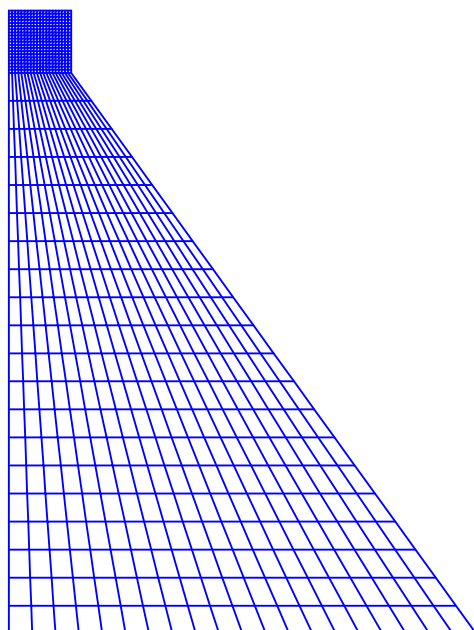
Formulación de Elementos Finitos

Formulación matricial

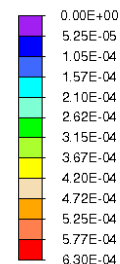
Elasticidad lineal

Ejemplo: el elemento CST

Elementos iso-paramétricos



DISPLACEMENT_2



Elasticidad 2D. Tensión plana

Elasticidad lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación del problema de contorno

Formulaciones variacionales

Formulación de Galerkin

Formulación de Elementos Finitos

Formulación matricial

Elasticidad lineal

Ejemplo: el elemento CST

Elementos iso-paramétricos

- La condición de tensión plana es ($\sigma_{zz} = 0$)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} & \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} & 0 \\ \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} & \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (41)$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (42)$$



Elasticidad 2D. Tensión plana

Elasticidad lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación del problema de contorno

Formulaciones variacionales

Formulación de Galerkin

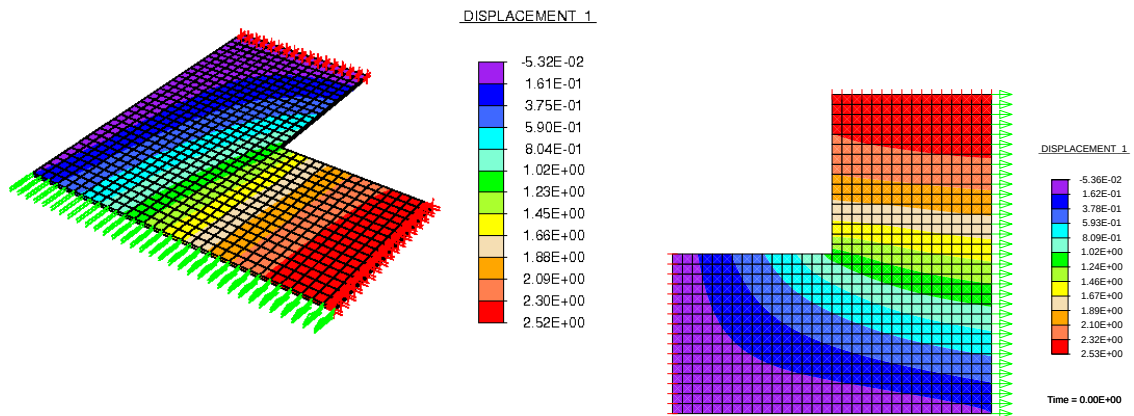
Formulación de Elementos Finitos

Formulación matricial

Elasticidad lineal

Ejemplo: el elemento CST

Elementos iso-paramétricos



Elasticidad 2D. Problemas axilsimétricos

Elasticidad lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación del problema de contorno

Formulaciones variacionales

Formulación de Galerkin

Formulación de Elementos Finitos

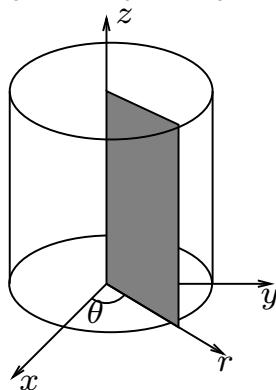
Formulación matricial

Elasticidad lineal

Ejemplo: el elemento CST

Elementos iso-paramétricos

- Se expresa en términos de las coordenadas cilíndricas r (radial), z (axial) y θ (circunferencial).



- Condición de simetría axial: todas las variables son independientes de θ y además: $u_\theta=0$, $\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{z\theta} = 0$
- En todos los integrandos hay que considerar un factor de $2\pi r$



Elasticidad 2D. Problemas axilsimétricos

Elasticidad lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación del problema de contorno

Formulaciones variacionales

Formulación de Galerkin

Formulación de Elementos Finitos

Formulación matricial

Elasticidad lineal

Ejemplo: el elemento CST

Elementos iso-paramétricos

- Relación tensión - deformación

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta\theta} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 & \lambda + 2\mu \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \end{Bmatrix} \quad (43)$$

- La matriz **B** (de interpolación del campo de deformaciones) es:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} N_{a,r} & 0 \\ 0 & N_{a,z} \\ N_{a,z} & N_{a,r} \\ \frac{N_a}{r} & 0 \end{pmatrix} \quad a = 1 \dots n_{\text{nen}} \quad (44)$$



Elasticidad 2D. Problemas axilsimétricos

Elasticidad lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación del problema de contorno

Formulaciones variacionales

Formulación de Galerkin

Formulación de Elementos Finitos

Formulación matricial

Elasticidad lineal

Ejemplo: el elemento CST

Elementos iso-paramétricos





Elasticidad 3D

Elasticidad lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación del problema de contorno

Formulaciones variacionales

Formulación de Galerkin

Formulación de Elementos Finitos

Formulación matricial

Elasticidad lineal

Ejemplo: el elemento CST

Elementos iso-paramétricos

● Relación tensión - deformación

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} \quad (45)$$



Elasticidad 3D

Elasticidad lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación del problema de contorno

Formulaciones variacionales

Formulación de Galerkin

Formulación de Elementos Finitos

Formulación matricial

Elasticidad lineal

Ejemplo: el elemento CST

Elementos iso-paramétricos





Ejemplo: CST para problemas de tensión plana

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

A continuación se desarrollarán las ecuaciones a nivel elemental del triángulo de deformación constante (CST) para el problema de tensión plana. Este elemento presenta las siguientes características:

- Es un elemento isoparamétrico
- No es necesario emplear cuadraturas para la integración numérica, ya que las integrales se pueden resolver de forma exacta.
- Se utiliza en aplicaciones no estructurales por la facilidad para generar mallas, ya que en análisis estructural sus prestaciones son bastante pobres.



Geometría y sistema de coordenadas

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

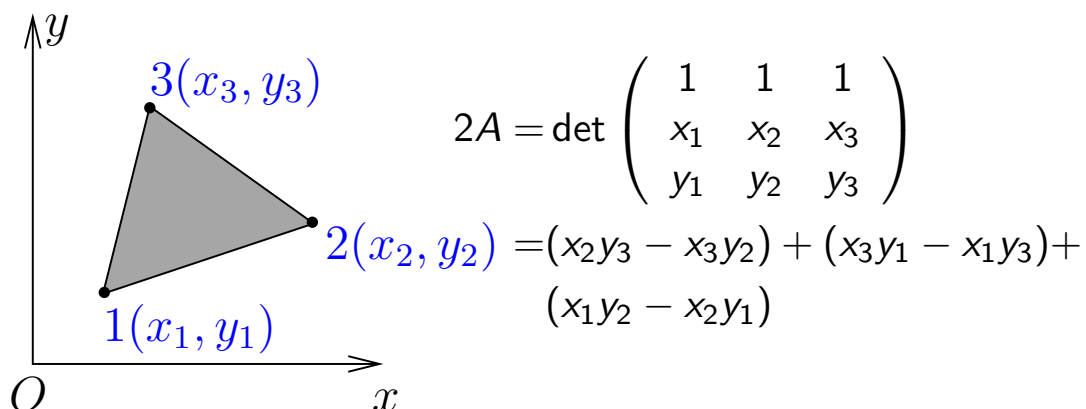
Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos



- Coordenadas triangulares: ξ_1, ξ_2, ξ_3
- $\xi_i = \text{cte}$ es una recta paralela al lado opuesto al nodo i
- No son independientes: $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$



Interpolación lineal

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

Una función lineal f definida en el triángulo se expresa en coordenadas cartesianas:

$$f(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y \quad (46)$$

determinándose los coeficientes a_i a partir de tres condiciones que proporcionen los valores f_1 , f_2 y f_3 (que en el contexto del MEF se denominan "valores nodales").

La expresión de f en coordenadas triangulares hace uso directamente de los valores nodales:

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = f_1\xi_1 + f_2\xi_2 + f_3\xi_3 = [f_1 \ f_2 \ f_3] \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} \quad (47)$$



Transformación de coordenadas

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} \quad (48)$$

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} 2A_{23} & y_{23} & x_{32} \\ 2A_{31} & y_{31} & x_{13} \\ 2A_{12} & y_{12} & x_{21} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad (49)$$

siendo $x_{jk} = x_j - x_k$, $y_{jk} = y_j - y_k$ y $A_{jk} = 0,5(x_j y_k - x_k y_j)$ es el área encerrada por los nodos j , k y el origen de coordenadas.



Derivadas parciales

Elasticidad lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación del problema de contorno

Formulaciones variacionales

Formulación de Galerkin

Formulación de Elementos Finitos

Formulación matricial

Elasticidad lineal

Ejemplo: el elemento CST

Elementos iso-paramétricos

- A partir de las relaciones (48) y (49) es inmediato obtener las relaciones:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_i} = x_i, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi_i} = y_i, \quad 2A \frac{\partial \xi_i}{\partial x} = y_{jk}, \quad 2A \frac{\partial \xi_i}{\partial y} = x_{kj} \quad (50)$$

siendo j y k las permutaciones cíclicas de i .

- Las derivadas de $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ respecto de las coordenadas cartesianas se obtienen mediante la regla de la cadena:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2A} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_1} y_{23} + \frac{\partial f}{\partial \xi_2} y_{31} + \frac{\partial f}{\partial \xi_3} y_{12} \right) \quad (51)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2A} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_1} x_{32} + \frac{\partial f}{\partial \xi_2} x_{13} + \frac{\partial f}{\partial \xi_3} x_{21} \right) \quad (52)$$



Formulación del elemento CST

Elasticidad lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación del problema de contorno

Formulaciones variacionales

Formulación de Galerkin

Formulación de Elementos Finitos

Formulación matricial

Elasticidad lineal

Ejemplo: el elemento CST

Elementos iso-paramétricos

- Funciones de forma: $N_j = \xi_j, \quad j = 1 \dots 3$
- Interpolación del campo de desplazamientos:

$$u_x = u_{x1} \xi_1 + u_{x2} \xi_2 + u_{x3} \xi_3 \quad (53)$$

$$u_y = u_{y1} \xi_1 + u_{y2} \xi_2 + u_{y3} \xi_3 \quad (54)$$

que en forma matricial se expresa:

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix} \quad (55)$$

que es la particularización de (27) para el triángulo CST



Formulación del elemento CST

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

● Relaciones deformación–desplazamiento

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d}^e = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix} \quad (56)$$

siendo:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (57)$$

Obsérvese que las deformaciones son constantes en el elemento



Formulación del elemento CST

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

● Relación tensión-deformación

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (58)$$

- La matriz constitutiva $\mathbf{C}$ se supondrá constante en el elemento. Por tanto, dado que las deformaciones son constantes en el elemento las tensiones también lo son.



Formulación del elemento CST

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

● Matriz de rigidez elemental

La expresión (34) de la matriz de rigidez elemental en este caso se puede escribir:

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \int_{\Omega^e} h d\Omega \quad (59)$$

siendo h el espesor y Ω^e el dominio del triángulo. Si el espesor es constante la matriz de rigidez se expresa en forma cerrada:

$$\mathbf{K}^e = \frac{h}{4A} \begin{pmatrix} y_{23} & 0 & x_{32} \\ 0 & x_{32} & y_{23} \\ y_{31} & 0 & x_{13} \\ 0 & x_{13} & y_{31} \\ y_{12} & 0 & x_{21} \\ 0 & x_{21} & y_{12} \end{pmatrix} \mathbf{C} \begin{pmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{pmatrix} \quad (60)$$



Formulación del elemento CST

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

● Vector de fuerzas nodales (volumétricas)

$$\mathbf{f}^e = \int_{\Omega^e} h \mathbf{N} \mathbf{b} d\Omega = \int_{\Omega^e} h \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_1 \\ \xi_2 & 0 \\ 0 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_3 \end{pmatrix} \mathbf{b} d\Omega \quad (61)$$

En el caso más sencillo en que h y $\mathbf{b}$ sean constantes en el elemento, y teniendo en cuenta:

$$\int_{\Omega^e} \xi_1 d\Omega = \int_{\Omega^e} \xi_2 d\Omega = \int_{\Omega^e} \xi_3 d\Omega = A/3 \quad (62)$$

resulta:

$$(\mathbf{f}^e)^T = \frac{Ah}{3} \begin{pmatrix} b_{x1} & b_{y1} & b_{x2} & b_{y2} & b_{x3} & b_{y3} \end{pmatrix} \quad (63)$$



Elementos isoparamétricos

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

Las relaciones geométricas y la interpolación del campo de desplazamientos verifican:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n_{\text{nod}}^e} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_{n_{\text{nod}}^e} \\ u_{x1} & u_{x2} & \dots & u_{xn_{\text{nod}}^e} \\ u_{y1} & u_{y2} & \dots & u_{yn_{\text{nod}}^e} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_{n_{\text{nod}}^e} \end{Bmatrix} \quad (64)$$

El triángulo CST descrito anteriormente se expresa de acuerdo con (64) tomando $n_{\text{nod}}^e = 3$, $N_1 = \xi_1$, $N_2 = \xi_2$ y $N_3 = \xi_3$



Elementos isoparamétricos

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

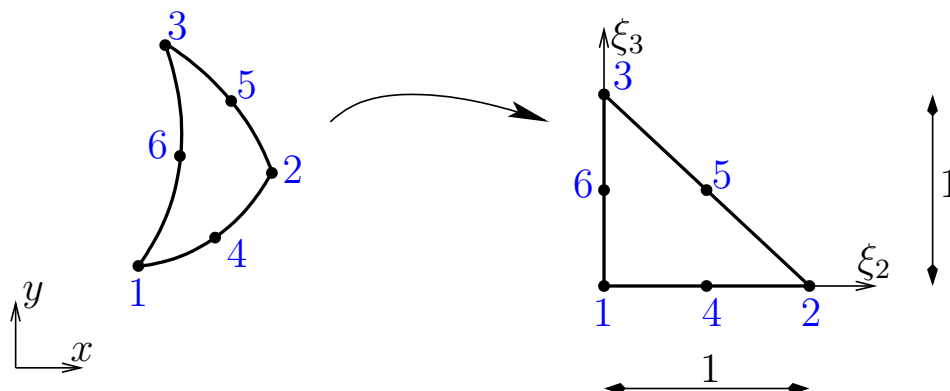
Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos



Triángulo cuadrático de seis nodos



Elementos isoparamétricos

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

● Triángulo cuadrático

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ u_{x1} & u_{x2} & u_{x3} & u_{x4} & u_{x5} & u_{x6} \\ u_{y1} & u_{y2} & u_{y3} & u_{y4} & u_{y5} & u_{y6} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \end{Bmatrix} \quad (65)$$

siendo:

$$N_1 = \xi_1(2\xi_1 - 1) \quad N_2 = \xi_2(2\xi_2 - 1) \quad N_3 = \xi_3(2\xi_3 - 1) \quad (66)$$

$$N_4 = 4\xi_1\xi_2 \quad N_5 = 4\xi_2\xi_3 \quad N_6 = 4\xi_3\xi_1 \quad (67)$$



Elementos isoparamétricos

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

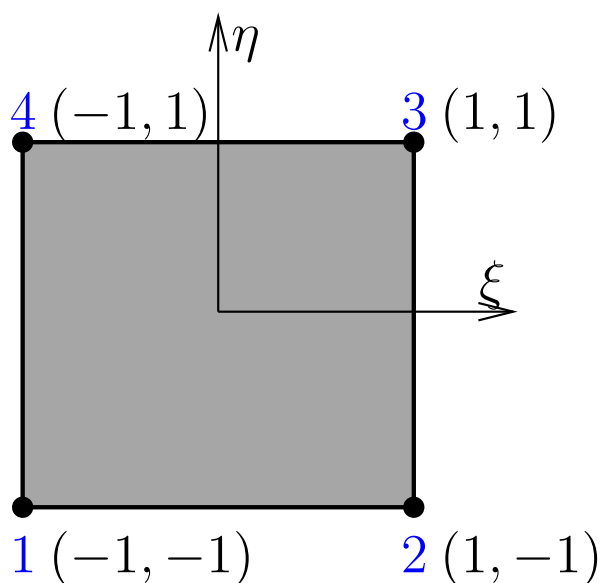
Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

● Elementos cuadriláteros



Cuadrilátero bilineal



Elementos isoparamétricos

Elasticidad lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación del problema de contorno

Formulaciones variacionales

Formulación de Galerkin

Formulación de Elementos Finitos

Formulación matricial

Elasticidad lineal

Ejemplo: el elemento CST

Elementos isoparamétricos

● Cuadrilátero bilineal

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ u_{x1} & u_{x2} & u_{x3} & u_{x4} \\ u_{y1} & u_{y2} & u_{y3} & u_{y4} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} \quad (68)$$

siendo:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (69)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (70)$$



Elementos isoparamétricos

Elasticidad lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación del problema de contorno

Formulaciones variacionales

Formulación de Galerkin

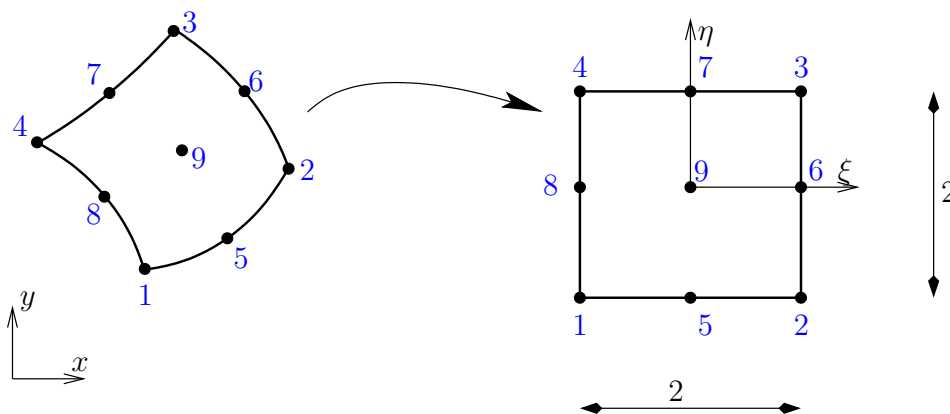
Formulación de Elementos Finitos

Formulación matricial

Elasticidad lineal

Ejemplo: el elemento CST

Elementos isoparamétricos



Cuadrilátero bicuadrático



Elementos isoparamétricos

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

● Cuadrilátero bicuadrático

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 \\ u_{x1} & u_{x2} & u_{x3} & u_{x4} & u_{x5} & u_{x6} & u_{x7} & u_{x8} & u_{x9} \\ u_{y1} & u_{y2} & u_{y3} & u_{y4} & u_{y5} & u_{y6} & u_{y7} & u_{y8} & u_{y9} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_9 \end{Bmatrix}$$

En este caso las funciones de forma son:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\xi\eta, & N_2 &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\xi\eta, & N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\xi\eta \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\xi\eta, & N_5 &= -\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)\eta, & N_6 &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)\xi \\ N_7 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)\eta, & N_8 &= -\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)\xi, & N_9 &= (1-\xi^2)(1-\eta^2) \end{aligned}$$



Derivadas parciales

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

● Jacobiano de la transformación isoparamétrica

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (71)$$

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (72)$$

La matriz $\mathbf{J}$ se denomina *matriz Jacobiana* de la transformación isoparamétrica



Derivadas parciales

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

- Cálculo de las derivadas parciales.

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{n_{\text{nod}}^e} x_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{n_{\text{nod}}^e} y_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \quad (73)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{n_{\text{nod}}^e} x_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{n_{\text{nod}}^e} y_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \quad (74)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{P}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{pmatrix} \quad (75)$$



Integración numérica

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

- La integración numérica es un ingrediente imprescindible en el cálculo de las integrales elementales
- Existen diversas cuadraturas: Gauss, Simpson, Lobatto, etc.
- Las cuadraturas de Gauss proporcionan mayor exactitud que otras reglas para un determinado número de puntos de integración
- En cada punto de Gauss se realiza un número importante de operaciones



Integración numérica

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

- Cuadraturas de Gauss en una dimensión:

$$\int_{-1}^1 F(\xi) d\xi = \sum_1^p w_i F(\xi_i) \quad (76)$$

siendo p el número de puntos de integración, ξ_i las coordenadas de cada punto i y w_i los pesos correspondientes.

- Algunas cuadraturas:

$$\begin{aligned} 1 \text{ punto: } & \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi \approx 2F(0) \\ 2 \text{ puntos: } & \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi \approx F(-1/\sqrt{3}) + F(1/\sqrt{3}) \\ 3 \text{ puntos: } & \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi \approx \frac{5}{9}F(-\sqrt{3/5}) + \frac{8}{9}F(0) + \frac{5}{9}F(\sqrt{3/5}) \\ 4 \text{ puntos: } & \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi \approx w_1F(\xi_1) + w_2F(\xi_2) + w_3F(\xi_3) + w_4F(\xi_4) \end{aligned}$$



Integración numérica

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

- Para la regla de 4 puntos:

$$\begin{aligned} w_1 = w_4 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{5/6}, & w_2 = w_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{5/6} \\ \xi_1 = -\xi_4 &= -\sqrt{(3 + 2\sqrt{6/5})/7}, & \xi_2 = -\xi_3 &= -\sqrt{(3 - 2\sqrt{6/5})/7} \end{aligned}$$

- Las cuatro reglas descritas integran de manera exacta polinomios de hasta grado 1, 3, 5 y 7, respectivamente.
- En general, una cuadratura 1D de Gauss con p puntos integra exactamente polinomios de orden $2p - 1$



Integración numérica

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

- Para calcular la integral de $F(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se hace un cambio de variable definiendo ξ en el intervalo biunitario:

$$\int_a^b F(x) dx = \int_{-1}^1 F(\xi) J d\xi$$

siendo:

$$\xi = \frac{2}{b-a} \left(x - \frac{1}{2}(a+b) \right), \quad J = \frac{dx}{d\xi} = \frac{b-a}{2}$$

- Las cuadraturas de Gauss de orden más alto están tabuladas en los libros de cálculo numérico (en Handbook of Mathematical Functions. Abramowitz & Stegun hasta 96 puntos). No obstante, las cuadraturas de orden superior a 4 no se pueden expresar de manera cerrada.



Integración numérica

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

- Cuadraturas de Gauss en dos dimensiones
 - Las cuadraturas de Gauss más simples se obtienen aplicando las cuadraturas 1D a cada variable. Para ello las integrales han de transformarse al cuadrilátero biunitario.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 d\eta \int_{-1}^1 F(\xi, \eta) d\xi \approx \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{j=1}^{p_2} w_i w_j F(\xi_i, \eta_j)$$

siendo p_1 y p_2 el número de puntos en cada dirección (que son iguales si las funciones de forma también lo son).



Integración numérica

Elasticidad
lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación
del problema
de contorno

Formulaciones
variacionales

Formulación
de Galerkin

Formulación
de Elementos
Finitos

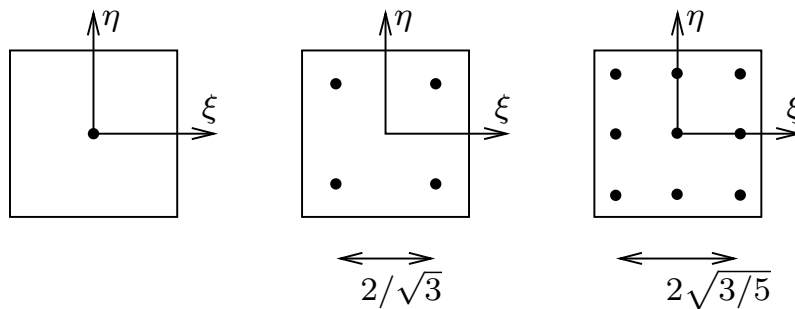
Formulación
matricial

Elasticidad
lineal

Ejemplo: el
elemento CST

Elementos iso-
paramétricos

● Cuadraturas de Gauss en dos dimensiones



1 punto:

$$w_1 = 4,$$

2 puntos:

$$w_{2 \times 2} = 1,$$

3 puntos:

$$\begin{aligned} w_1 = w_3 = w_7 = w_9 &= \frac{25}{81} \\ w_2 = w_4 = w_6 = w_8 &= \frac{40}{81} \\ w_5 &= \frac{64}{81} \end{aligned}$$