

Capítulo 3

Elasticidad Lineal

3.1. Introducción

Queda fuera del marco de estos apuntes el abordar conceptos básicos de la mecánica de medios continuos (tensión, deformación, ecuaciones de balance, etc). Se remite al lector interesado en ellos a consultar las referencias sobre este tema citadas en la bibliografía [17, 9]. No obstante, en este apartado se pasa revista de forma somera a algunos de ellos con objeto de introducir la notación y poner en contexto los desarrollos que se abordarán en el capítulo.

Sea $\boldsymbol{\sigma}$ el tensor de tensiones de Cauchy, \mathbf{u} el vector desplazamiento y \mathbf{b} el vector de fuerzas volumétricas. Consideraremos el tensor de deformaciones infinitesimales, que se define como la parte simétrica del tensor gradiente de desplazamientos:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u}, \quad \varepsilon_{ij} = u_{(i,j)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.1)$$

Observación. *El tensor de deformaciones infinitesimales depende linealmente de las derivadas del campo de desplazamientos. Este tensor se considera válido cuando el sólido experimenta pequeñas deformaciones (las derivadas del campo de desplazamientos son mucho menores que la unidad). En un sólido sometido a grandes deformaciones es preciso considerar en la definición del tensor de deformaciones términos no lineales del gradiente de desplazamientos.*

La relación entre tensión y deformación más sencilla es la *ley de Hooke*, que para el caso uniaxial establece que la deformación es proporcional a la tensión:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.2)$$

siendo E el *módulo de elasticidad* o *módulo de Young*. En el caso más general de un sólido tridimensional esta relación se establece entre el tensor de tensiones y el tensor de deformaciones. Como extensión natural de la ley de Hooke, las componentes del tensor de tensiones se expresan como combinación lineal de las componentes del tensor de deformaciones mediante un

tensor de cuarto orden \mathbf{C} (Ley de Hooke generalizada), cuyas componentes C_{ijkl} son constantes y se denominan “coeficientes elásticos”:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (3.3)$$

Observación. En este capítulo se utilizarán los criterios de notación ya descritos en el apartado 2.2. Asimismo, la aplicación de un tensor de cuarto orden \mathbf{A} sobre uno de segundo orden \mathbf{B} para obtener un tensor de segundo orden \mathbf{D} , se expresa con \mathbf{AB} :

$$\mathbf{D} = \mathbf{AB}, \quad D_{ij} = A_{ijkl}B_{kl} \quad (3.4)$$

Observación. Cuando se considere necesario por motivos de claridad se empleará la notación indicial, siguiendo el convenio de Einstein (suma de índices repetidos).

El tensor de módulos elásticos tiene las siguientes propiedades:

1. Simetría mayor:

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (3.5)$$

2. Simetría menor:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad (3.6)$$

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (3.7)$$

3. Es definido positivo:

$$C_{ijkl}\Phi_{ij}\Phi_{kl} \geq 0 \quad \forall \Phi_{ij} \text{ simétrico} \quad (3.8)$$

$$C_{ijkl}\Phi_{ij}\Phi_{kl} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_{ij} = 0 \quad (3.9)$$

Observación. Como el tensor de deformaciones infinitesimales $\boldsymbol{\varepsilon}$ es simétrico, la propiedad de simetría mayor de \mathbf{C} implica que el tensor de tensiones de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ es también simétrico. En el planteamiento de la mecánica de medios continuos, la simetría del tensor $\boldsymbol{\sigma}$ se deduce a partir de la ecuación de balance del momento cinético.

De las simetrías del tensor \mathbf{C} se deduce que la descripción constitutiva más general de un sólido elástico anisótropo requiere de la definición de 21 constantes elásticas. Ciertos materiales tienen un comportamiento mecánico que es simétrico respecto de ciertos planos, reduciéndose el número de constantes elásticas desde 21 hasta 9 en el caso de los sólidos *ortótropos*, y a 2 constantes en el caso de los sólidos *isótropos*.

Si consideramos un sólido elástico definido por el conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, tal y como se indica en la figura 3.1 para cada dirección $i = 1 \dots n_{\text{dim}}$ del espacio, el contorno de Ω verifica:

$$\partial\Omega = \overline{\partial_{u_i}\Omega} \cup \partial_{t_i}\overline{\Omega} \quad (3.10)$$

$$\emptyset = \partial_{u_i}\Omega \cap \partial_{t_i}\Omega \quad (3.11)$$

siendo $\partial_{u_i}\Omega$ la parte del contorno con desplazamientos impuestos en dirección i , y $\partial_{t_i}\Omega$ la parte con tensiones impuestas en dirección i . El subrayado en (3.10) indica que en la definición de $\partial\Omega$ entran los conjuntos abiertos $\partial_{u_i}\Omega$, $\partial_{t_i}\Omega$ y los correspondientes bordes.

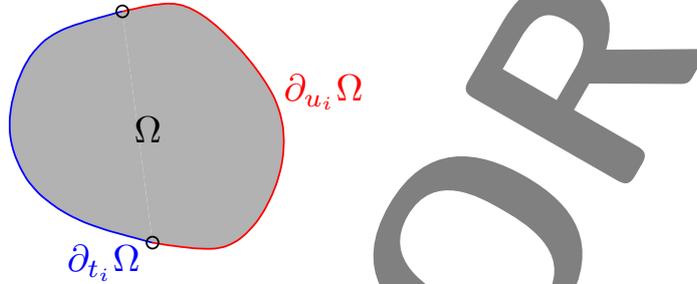


Figura 3.1: Condiciones de contorno en un sólido elástico

3.2. Formulación fuerte

Sea $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ un cuerpo elástico ($\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ conjunto abierto), cuyo contorno $\partial\Omega$ admite la descomposición $\partial\Omega = \partial_{u_i}\Omega \cup \partial_{t_i}\Omega$, $\partial_{u_i}\Omega \cap \partial_{t_i}\Omega = \emptyset$, $i = 1 \dots n_{\text{dim}}$. Sea \mathbf{n} el vector normal exterior en un punto de $\partial\Omega$. La formulación fuerte del problema se establece en los siguientes términos:

Dados $\mathbf{b} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, $\bar{\mathbf{u}} : \partial_{u_i}\Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, $\bar{\mathbf{t}} : \partial_{t_i}\Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, encontrar el campo $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ que cumple:

$$\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ en } \Omega \quad (3.12)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ en } \partial_{u_i}\Omega \quad (3.13)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ en } \partial_{t_i}\Omega \quad (3.14)$$

estando relacionados el tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ y el vector desplazamiento \mathbf{u} a través de la ecuación constitutiva (3.3) y de la relación de compatibilidad (3.1).

Observación. Por abuso de la notación, las expresiones (3.13) y (3.14) realmente indican:

$$u_i = \bar{u}_i \text{ en } \partial_{u_i}\Omega, \quad i = 1 \dots n_{\text{dim}} \quad (3.15)$$

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \text{ en } \partial_{t_i}\Omega, \quad i, j = 1 \dots n_{\text{dim}} \quad (3.16)$$

Observación. En el marco de la mecánica de medios continuos, la ecuación (3.12) establece el equilibrio en cada punto de Ω .

Observación. Los vectores $\bar{\mathbf{u}}$ y $\bar{\mathbf{t}}$ se denominan “desplazamientos impuestos” y “tensiones impuestas”, respectivamente.

Observación. La formulación fuerte del problema de la elasticidad es un problema de contorno mixto, que cuando se verifican ciertas hipótesis en los datos tiene solución única. En este sentido puede consultarse [3].

3.3. Formulación débil

La formulación débil del problema de contorno del sólido elástico lineal se establece en los siguientes términos:

Dados $\mathbf{b} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ y las funciones $\bar{\mathbf{u}} : \partial_u \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, $\bar{\mathbf{t}} : \partial_t \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, encontrar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} \in \mathcal{U} \mid \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V}$ cumple:

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla^s \delta \mathbf{u} - \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma = 0 \quad (3.17)$$

siendo:

$$\mathcal{U} = \{ \mathbf{u} \in H^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}) \mid \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_u \Omega \} \quad (3.18)$$

$$\mathcal{V} = \{ \delta \mathbf{u} \in H^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}) \mid \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_u \Omega \} \quad (3.19)$$

y $H^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}})$ el espacio de Sobolev de grado 1 y orden 2:

$$H^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}) = \left\{ \mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}} \mid \int_{\Omega} \|\mathbf{u}\|_{2,1} d\Omega < \infty \right\} \quad (3.20)$$

Observación. En la ecuación (3.17) la integral de contorno se expresa de forma compacta, siendo su expresión desarrollada:

$$\int_{\partial_t \Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma = \int_{\partial_{t_1} \Omega} \bar{t}_1 \delta u_1 d\Gamma + \dots + \int_{\partial_{t_{n_{\text{dim}}}} \Omega} \bar{t}_{n_{\text{dim}}} \delta u_{n_{\text{dim}}} d\Gamma \quad (3.21)$$

Observación. En el marco de la mecánica de sólidos, la formulación débil se interpreta como el “Principio de los Trabajos Virtuales”, siendo $\delta \mathbf{u}$ los desplazamientos virtuales.

Observación. Una discusión sobre la existencia y unicidad de las formulación débil descrita en este apartado puede consultarse en [2, 3].

3.4. Equivalencia de las formulaciones fuerte y débil

Para demostrar la equivalencia de las formulaciones fuerte y débil descritas en los dos apartados anteriores demostraremos que si un campo de desplazamientos \mathbf{u} es solución del problema fuerte, entonces también es solución del problema débil, y viceversa. Antes de hacer la demostración es necesario establecer dos teoremas:

Teorema 3.4.1 (Descomposición euclídea de un tensor de orden 2). *Todo tensor de segundo orden se puede descomponer en suma de un tensor simétrico y de un tensor antisimétrico. En efecto, denominando s_{ij} a sus componentes, se tiene:*

$$s_{ij} = \underbrace{s_{(ij)}}_{\text{simétrico}} + \underbrace{s_{[ij]}}_{\text{hemisimétrico}} \quad ; \quad s_{(ij)} = \frac{s_{ij} + s_{ji}}{2}, \quad s_{[ij]} = \frac{s_{ij} - s_{ji}}{2} \quad (3.22)$$

En lo sucesivo denominaremos $s_{(ij)}$ a las componentes de la parte simétrica de s_{ij} , y $s_{[ij]}$ a las componentes de la parte hemisimétrica.

Teorema 3.4.2. *Sea s_{ij} un tensor simétrico y t_{ij} un tensor no simétrico. Entonces,*

$$s_{ij}t_{ij} = s_{ij}t_{(ij)} \quad (3.23)$$

El teorema queda demostrado si $s_{ij}t_{[ij]} = 0$. En efecto:

$$\begin{aligned} s_{ij}t_{[ij]} &= -s_{ij}t_{[ji]} \\ &= -s_{ji}t_{[ji]} \\ &= -s_{ij}t_{[ij]} \end{aligned} \quad (3.24)$$

La demostración de la equivalencia entre las dos formulaciones se realizará demostrando las dos proposiciones siguientes:

Proposición 3.1. *Si \mathbf{u} es solución de la formulación fuerte del problema, entonces también es solución de la formulación débil.*

Demostración

Multiplicando (3.12) por $\delta \mathbf{u} \in \mathcal{V}$ e integrando en Ω , al aplicar el teorema de la divergencia y el resultado del teorema 3.4.2, se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \delta \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla^s \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\partial_t \Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.25)$$

Por tanto \mathbf{u} verifica (3.17), y es en consecuencia solución del problema débil. \square

Proposición 3.2. *Si \mathbf{u} es solución de la formulación débil del problema, entonces también es solución de la formulación fuerte.*

Demostración

Sea \mathbf{u} solución del problema débil. Dado que $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ entonces $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ en $\partial_u \Omega$, y verifica por tanto (3.13).

A partir de (3.17) y teniendo en cuenta el teorema 3.4.2:

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla^s \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\partial_t \Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \delta \mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Omega} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\partial_t \Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \bar{\mathbf{t}}) \delta \mathbf{u} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.26)$$

Sean las funciones $\boldsymbol{\alpha} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ y $\boldsymbol{\beta} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$:

$$\boldsymbol{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} \quad (3.27)$$

$$\boldsymbol{\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \bar{\mathbf{t}} \quad (3.28)$$

La proposición estará demostrada si se verifica que $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ en Ω y $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ en $\partial_t\Omega$. En efecto, sean $\delta\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}\phi(\mathbf{x})$, donde $\phi(\mathbf{x}) : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función que verifica:

$$\phi(\mathbf{x}) > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

$$\phi(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

$$\phi(\mathbf{x}) \text{ suave}$$

Con estas tres condiciones queda garantizado que $\delta\mathbf{u} \in \mathcal{V}$. Sustituyendo en (3.26) la función $\delta\mathbf{u}$ así definida:

$$0 = \int_{\Omega} \underbrace{\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}}_{\geq 0} \underbrace{\phi(\mathbf{x})}_{> 0} d\Omega \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \text{ en } \Omega \quad (3.29)$$

Análogamente, definimos ahora $\delta\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ mediante la expresión en componentes:

$$\delta u_i = \delta_{i1} \beta_1 \psi(\mathbf{x}), \quad i = 1 \dots n_{\text{dim}} \quad (3.30)$$

siendo δ_{ij} la “delta de Kronecker” de orden 2, y $\psi(\mathbf{x}) : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función que cumple:

$$\psi(\mathbf{x}) > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_{t_1}\Omega$$

$$\psi(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_{u_1}\Omega$$

$$\psi(\mathbf{x}) \text{ suave}$$

Sustituyendo la expresión (3.30) en (3.26), y teniendo en cuenta que ya está demostrado que $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, resulta:

$$0 = \int_{\partial_{t_1}\Omega} \underbrace{\beta_1 (\beta_1)}_{\geq 0} \underbrace{\psi}_{> 0} d\Gamma \Rightarrow \beta_1 = 0 \text{ en } \partial_{t_1}\Omega \quad (3.31)$$

De la misma manera se demuestra $\beta_2 = \dots = \beta_n = 0$.

□

3.5. El principio de la mínima energía potencial

Sean $\mathbf{U}_\varepsilon = \mathbf{u} + \varepsilon\delta\mathbf{u}$ las variaciones arbitrarias del campo de desplazamientos $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ que satisfacen las condiciones esenciales de contorno, con $\delta\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Se define el funcional de la energía potencial como:

$$\Pi(\mathbf{U}_\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\nabla}^s \mathbf{U}_\varepsilon \cdot \mathbf{C} \boldsymbol{\nabla}^s \mathbf{U}_\varepsilon d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{U}_\varepsilon d\Omega - \int_{\partial_t\Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{U}_\varepsilon d\Gamma \quad (3.32)$$

La energía potencial toma un valor estacionario si y solo si se satisface la ecuación variacional (3.17), con $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$.

En efecto, la condición de estacionariedad de $\Pi(\mathbf{U}_\varepsilon)$ se expresa:

$$\delta\Pi(\mathbf{U}_\varepsilon) = 0 \Rightarrow \left. \frac{d\Pi(\mathbf{U}_\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (3.33)$$

Teniendo en cuenta:

$$\nabla^s \mathbf{U}_\varepsilon = \nabla^s \mathbf{u} + \varepsilon \nabla^s \delta \mathbf{u} \quad (3.34)$$

$$\frac{d\mathbf{U}_\varepsilon}{d\varepsilon} = \delta \mathbf{u} \quad (3.35)$$

$$\frac{d\nabla^s \mathbf{U}_\varepsilon}{d\varepsilon} = \nabla^s \delta \mathbf{u} \quad (3.36)$$

operando en (3.33) resulta:

$$\frac{d\Pi(\mathbf{U}_\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{\Omega} (\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{C} \nabla^s \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \quad (3.37)$$

y para $\varepsilon = 0$:

$$\left. \frac{d\Pi(\mathbf{U}_\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{C} \nabla^s \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma = 0 \quad (3.38)$$

Asimismo, para el campo \mathbf{u} que hace \mathbf{U}_ε estacionario, el funcional toma un valor mínimo:

$$\frac{d^2\Pi(\mathbf{U}_\varepsilon)}{d\varepsilon^2} = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{C} \nabla^s \delta \mathbf{u} d\Omega \geq 0 \quad (3.39)$$

por ser \mathbf{C} definido positivo.

Se puede interpretar que las ecuaciones variacionales se pueden obtener a partir de la derivada de un funcional. Cuando esto es posible se dice que existe un *principio variacional* asociado a las ecuaciones variacionales, denominándose éstas *ecuaciones de Euler-Lagrange* asociadas al principio variacional.

El teorema de Veinberg establece que la existencia de un principio variacional es equivalente a la simetría de la forma bilineal:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{u} \cdot \mathbf{C} \nabla^s \mathbf{u} d\Omega \quad (3.40)$$

Cabe destacar que la formulación del método de los elementos finitos no requiere de la existencia de un principio variacional, ya que ésta se desarrolla a partir de la formulación débil de un problema de contorno.

3.6. Formulación de Galerkin

Sean \mathcal{V}^h y \mathcal{U}^h aproximaciones de dimensión finita de los espacios funcionales \mathcal{V} y \mathcal{U} , definidos en (3.18) y (3.19), respectivamente. Admitiremos que las funciones de $\mathbf{u}^h \in \mathcal{U}^h$ se pueden descomponer en la forma:

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{v}^h + \bar{\mathbf{u}}^h \quad (3.41)$$

donde $\mathbf{v}^h \in \mathcal{V}^h$, y $\bar{\mathbf{u}}^h$ satisface la condición de contorno (3.13) en los nodos de $\partial_u \Omega$.

La formulación de Galerkin del problema de contorno descrito se establece en los siguientes términos:

Dados $\mathbf{b} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ y las funciones $\bar{\mathbf{u}} : \partial_u \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, $\bar{\mathbf{t}} : \partial_t \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, encontrar el campo de desplazamientos $\mathbf{u}^h = \mathbf{v}^h + \bar{\mathbf{u}}^h$, con $\mathbf{v}^h \in \mathcal{V}^h$, tal que $\forall \delta \mathbf{u}^h \in \mathcal{V}^h$ se cumple:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^s \delta \mathbf{u}^h \cdot \mathbf{C} \nabla^s \mathbf{v}^h d\Omega &= \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}^h d\Omega + \int_{\partial_t \Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u}^h d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Omega} \nabla^s \bar{\mathbf{u}}^h \cdot \mathbf{C} \nabla^s \delta \mathbf{u}^h d\Omega \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.7. Formulación matricial

En este apartado generalizaremos los desarrollos del apartado 2.6 pasando de 1 a n_{gd} grados de libertad por nodo. Se consideran los mismos aspectos en cuanto a la discretización que los descritos en dicho apartado. El dominio $\bar{\Omega}$ se discretiza en n_{elm} elementos Ω^e :

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \Omega^e \quad \Omega^i \cap \Omega^j = \emptyset, \text{ si } i \neq j \quad (3.43)$$

Los puntos en los que se calculan los desplazamientos se denominan *nodos*. Recordando que en el apartado 2.6 denominábamos η a los cardinales correspondientes a la numeración global de los nodos, ahora η_{u_i} es el conjunto de nodos con desplazamientos impuestos en dirección i , y $\eta - \eta_{u_i}$ al conjunto complementario de η_{u_i} en η . Los subespacios de dimensión finita \mathcal{U}^h y \mathcal{V}^h se definen mediante unas funciones de interpolación N_A , $A = 1 \dots n_{\text{nod}}$ (polinómicas), que se denominan “funciones de forma”:

$$\mathcal{U}^h = \{ \mathbf{u}^h \in \mathcal{U} \mid u_i^h = \underbrace{\sum_{A \in \eta - \eta_{u_i}} d_{iA} N_A}_{\mathbf{v}^h} + \underbrace{\sum_{A \in \eta_{u_i}} \bar{u}_{iA} N_A}_{\bar{\mathbf{u}}^h} \} \quad (3.44)$$

$$\mathcal{V}^h = \{ \delta \mathbf{u}^h \in \mathcal{V} \mid \delta u_i^h = \sum_{A \in \eta - \eta_{u_i}} \delta u_{iA} N_A; \quad \delta u_i^h = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_{u_i} \Omega \} \quad (3.45)$$

Observación. Las incógnitas en cada nodo son los desplazamientos. En consecuencia, el número de grados de libertad por nodo n_{gdl} coincide con la dimensión del espacio n_{dim} .

Antes de sustituir las expresiones de \mathbf{v}^h y $\delta\mathbf{u}^h$ definidas en (3.44) y (3.45), en la expresión de la formulación débil (3.42), re-escribiremos en forma matricial la interpolación del campo de desplazamientos y del correspondiente tensor gradiente.

Interpolación del campo de desplazamientos. La expresión matricial de la interpolación del campo de desplazamiento es:

$$\mathbf{v}^h = \sum_{i=1}^{n_{\text{dim}}} \sum_{A \in \eta - \eta_{u_i}} d_{iA} N_A \mathbf{e}_i \quad (3.46)$$

$$\delta\mathbf{u}^h = \sum_{i=1}^{n_{\text{dim}}} \sum_{A \in \eta - \eta_{u_i}} \delta u_{iA} N_A \mathbf{e}_i \quad (3.47)$$

$$\bar{\mathbf{u}}^h = \sum_{i=1}^{n_{\text{dim}}} \sum_{A \in \eta_{u_i}} \bar{u}_{iA} N_A \mathbf{e}_i \quad (3.48)$$

siendo \mathbf{e}_i , ($i = 1 \dots n_{\text{dim}}$) los versores de la base euclídea.

Observación. En lo sucesivo se adoptará como convenio de notación para las expresiones matriciales que un vector \mathbf{e} se expresa en forma de matriz columna $\{\mathbf{e}_i\}$, y un vector \mathbf{e}_i^T en forma de matriz fila $\|\mathbf{e}_i\|$.

Interpolación del gradiente de desplazamientos. La interpolación del gradiente de desplazamientos lo expresaremos en forma matricial mediante:

$$\nabla \mathbf{v}^h = \sum_{i=1}^{n_{\text{dim}}} \sum_{A \in \eta - \eta_{u_i}} \mathbf{e}_i \otimes \nabla N_A d_{iA} = \sum_{i=1}^{n_{\text{dim}}} \sum_{A \in \eta - \eta_{u_i}} \{\mathbf{e}_i\} \|\nabla N_A\| d_{iA} \quad (3.49)$$

donde \otimes indica el producto tensorial o diádico.

Interpolación de las deformaciones infinitesimales. A continuación el tensor de deformaciones infinitesimales $\boldsymbol{\epsilon}$ lo expresaremos como un vector $\boldsymbol{\epsilon}$. Las componentes del vector $\boldsymbol{\epsilon}$ en función de las del gradiente de desplazamientos $\nabla^s \mathbf{v}$ son:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \left\{ \begin{array}{l} v_{1,1} \\ v_{2,2} \\ v_{1,2} + v_{2,1} \end{array} \right\} \text{ para } n_{\text{dim}} = 2, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \left\{ \begin{array}{l} v_{1,1} \\ v_{2,2} \\ v_{3,3} \\ v_{1,2} + v_{2,1} \\ v_{1,3} + v_{3,1} \\ v_{2,3} + v_{3,2} \end{array} \right\} \text{ para } n_{\text{dim}} = 3 \quad (3.50)$$

Sustituyendo en (3.50) la expresión (3.49) de las componentes de $\nabla \mathbf{v}^h$, obtenemos la interpolación de las deformaciones.

Considerando un único sumando, correspondiente al movimiento del nodo $A \in \eta - \eta_{u_i}$ en dirección i , en la expresión (3.49) para el caso $n_{\text{dim}} = 2$ resultan las componentes:

$$\nabla \mathbf{v}_A^h = \sum_{i=1}^{n_{\text{dim}}} \mathbf{e}_i \otimes \left\| \frac{\partial N_A}{\partial x_1}, \frac{\partial N_A}{\partial x_2} \right\| d_{iA} \quad (3.51)$$

Sustituyendo las componentes de $\nabla \mathbf{v}_A^h$ que se obtienen con la expresión (3.51) en (3.50):

$$\boldsymbol{\epsilon}_A = \sum_{i=1}^{n_{\text{dim}}} \mathbf{B}_A \mathbf{e}_i d_{iA} \quad (3.52)$$

siendo:

$$\mathbf{B}_A = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_A}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_A}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_A}{\partial x_2} & \frac{\partial N_A}{\partial x_1} \end{pmatrix}, \quad n_{\text{dim}} = 2 \quad (3.53)$$

Procediendo de forma análoga para el caso 3D, la matriz de interpolación de deformaciones \mathbf{B} resulta:

$$\mathbf{B}_A = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_A}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_A}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_A}{\partial x_3} \\ \frac{\partial N_A}{\partial x_2} & \frac{\partial N_A}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial N_A}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial N_A}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial N_A}{\partial x_3} & \frac{\partial N_A}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \quad n_{\text{dim}} = 3 \quad (3.54)$$

La expresión (3.52) se generaliza de manera inmediata para la malla completa:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \sum_{i=1}^{n_{\text{dim}}} \sum_{A \in \eta - \eta_{u_i}} \mathbf{B}_A \mathbf{e}_i d_{iA} \quad (3.55)$$

Por último el tensor de cuarto orden \mathbf{C} lo re-escribimos como un tensor de segundo orden \mathbf{C} , y así poder finalmente escribir (3.42) usando productos de matrices y vectores. La relación entre los subíndices $\{i, j, k, l\}$ del tensor constitutivo \mathbf{C} y los subíndices $\{I, J\}$ del tensor constitutivo \mathbf{C} se obtiene identificando los productos contraídos:

$$\nabla^s \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \nabla^s \mathbf{v} = \boldsymbol{\epsilon}^T \cdot \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.56)$$

resultando las tablas del cuadro 3.1

Observación. Con la definición hecha del tensor de segundo orden \mathbf{C} a partir del tensor de cuarto orden \mathbf{C} y con las simetrías de éste descritas en (3.5) a (3.7), es inmediato verificar que \mathbf{C} es también simétrico:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^T \quad (3.57)$$

$n_{\text{dim}} = 2 \rightarrow$	<table border="1" style="display: inline-table;"><thead><tr><th>I/J</th><th>i/k</th><th>j/l</th></tr></thead><tbody><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr></tbody></table>	I/J	i/k	j/l	1	1	1	2	2	2	3	1	2	3	2	1
I/J	i/k	j/l														
1	1	1														
2	2	2														
3	1	2														
3	2	1														

$n_{\text{dim}} = 3 \rightarrow$	<table border="1" style="display: inline-table;"><thead><tr><th>I/J</th><th>i/k</th><th>j/l</th></tr></thead><tbody><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>5</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>2</td></tr></tbody></table>	I/J	i/k	j/l	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	1	2	4	2	1	5	1	3	5	3	1	6	2	3	6	3	2
I/J	i/k	j/l																													
1	1	1																													
2	2	2																													
3	3	3																													
4	1	2																													
4	2	1																													
5	1	3																													
5	3	1																													
6	2	3																													
6	3	2																													

Cuadro 3.1: Transformación de índices para pasar del tensor constitutivo de cuarto orden al de segundo orden

Sustituyendo estos resultados en (3.42) se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n_{\text{dim}}} \sum_{A \in \eta - \eta_{u_i}} \left[\delta u_{iA} \mathbf{e}_i^T \cdot \sum_{j=1}^{n_{\text{dim}}} \sum_{B \in \eta - \eta_{u_j}} \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}_A^T \mathbf{C} \mathbf{B}_B \mathbf{e}_j d_j \mathbf{B} d\Omega \right) \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n_{\text{dim}}} \sum_{A \in \eta - \eta_{u_i}} \delta u_{iA} \mathbf{e}_i^T \cdot \int_{\Omega} N_A \mathbf{b} d\Omega + \sum_{i=1}^{n_{\text{dim}}} \sum_{A \in \eta - \eta_{u_i}} \delta u_{iA} \mathbf{e}_i^T \cdot \int_{\partial_t \Omega} N_A \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n_{\text{dim}}} \sum_{A \in \eta - \eta_{u_i}} \left[\delta u_{iA} \mathbf{e}_i^T \cdot \sum_{j=1}^{n_{\text{dim}}} \sum_{B \in \eta_{u_j}} \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}_A^T \mathbf{C} \mathbf{B}_B \mathbf{e}_j \bar{u}_j \mathbf{B} d\Omega \right) \right] \quad (3.58)
\end{aligned}$$

pasando todo a la izquierda y operando:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n_{\text{dim}}} \sum_{A \in \eta - \eta_{u_i}} \delta u_{iA} \mathbf{e}_i^T \cdot \left[\sum_{j=1}^{n_{\text{dim}}} \sum_{B \in \eta - \eta_{u_j}} \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}_A^T \mathbf{C} \mathbf{B}_B d\Omega \right) \mathbf{e}_j d_j \mathbf{B} - \int_{\Omega} N_A \mathbf{b} d\Omega \right. \\
&\quad \left. - \int_{\partial_t \Omega} N_A \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \sum_{j=1}^{n_{\text{dim}}} \sum_{B \in \eta_{u_j}} \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}_A^T \mathbf{C} \mathbf{B}_B d\Omega \right) \mathbf{e}_j \bar{u}_j \mathbf{B} \right] = 0 \quad (3.59)
\end{aligned}$$

Como los coeficientes δu_{iA} son arbitrarios, todos y cada uno de los corchetes en (3.59) deben ser nulos. En consecuencia se obtienen el siguiente sistema de n_{eq} ecuaciones ($n_{\text{eq}} = n_{\text{dim}} \times \circ(\eta - \eta_{u_i}, i = 1 \dots n_{\text{dim}})$):

$$\begin{aligned}
& \mathbf{e}_i^T \cdot \sum_{j=1}^{n_{\text{dim}}} \sum_{B \in \eta - \eta_{u_j}} \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}_A^T \mathbf{C} \mathbf{B}_B d\Omega \right) \mathbf{e}_j d_j \mathbf{B} = \mathbf{e}_i^T \cdot \int_{\Omega} N_A \mathbf{b} d\Omega + \mathbf{e}_i^T \cdot \int_{\partial_t \Omega} N_A \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \\
&\quad - \mathbf{e}_i^T \cdot \sum_{j=1}^{n_{\text{dim}}} \sum_{B \in \eta_{u_j}} \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}_A^T \mathbf{C} \mathbf{B}_B d\Omega \right) \mathbf{e}_j \bar{u}_j \mathbf{B} \quad (3.60)
\end{aligned}$$

Para expresar el sistema de ecuaciones (3.60) en forma matricial es necesario definir la numeración global de las ecuaciones del problema, generalizando la definición dada en (2.57). Como en el caso del problema de elasticidad el número de grados de libertad por nodo es $n_{\text{gdl}} = n_{\text{dim}}$, la matriz id es:

$$id(i, A) = \begin{cases} P & \text{si } A \in \eta - \eta_{u_i} \\ 0 & \text{si } A \in \eta_{u_i} \end{cases} \quad (3.61)$$

siendo A el número global del nodo, y el índice i el número correspondiente al grado de libertad considerado.

Observación. Haciendo $n_{\text{gdl}} = 1$ en (3.61), la definición de la matriz id coincide con la dada en (2.57)

Ahora el sistema (3.60) se expresa en forma matricial:

$$\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (3.62)$$

siendo:

$$\mathbf{K} = [K_{PQ}], \quad \mathbf{d} = \{d_Q\}, \quad \mathbf{F} = \{F_P\}, \quad 1 \leq P, Q \leq n_{\text{eq}} \quad (3.63)$$

y las componentes correspondientes:

$$K_{PQ} = \mathbf{e}_i^T \cdot \int_{\Omega} \mathbf{B}_A^T \mathbf{C} \mathbf{B}_B d\Omega \mathbf{e}_j \quad (3.64)$$

$$d_Q = d_{jB} \quad (3.65)$$

$$F_P = \mathbf{e}_i^T \cdot \int_{\Omega} N_A \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \mathbf{e}_i^T \cdot \int_{\partial \eta_i \Omega} N_A \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \mathbf{e}_i^T \cdot \int_{\Omega} \mathbf{B}_A^T \mathbf{C} \mathbf{B}_B d\Omega \mathbf{e}_j \bar{u}_{jB} \quad (3.66)$$

$$P = id(i, A), \quad Q = id(j, B) \quad (3.67)$$

3.7.1. Propiedades de la matriz de rigidez

Definición 3.7.1 (Movimiento de sólido rígido). . Sea el vector $\mathbf{w} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$. Se dice que \mathbf{w} es un movimiento de sólido rígido si $w_{(i,j)} = 0$.

Un movimiento infinitesimal de sólido rígido se expresa de forma general mediante:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \underbrace{\mathbf{c}}_{\text{traslación}} + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}}_{\text{rotación}} \quad (3.68)$$

siendo \mathbf{c} un vector constante, y $\boldsymbol{\omega}$ el vector representativo de la rotación infinitesimal.

Observación. La expresión (3.68) se puede identificar con el campo de velocidades del sólido rígido:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_O}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} \wedge \boldsymbol{\rho} \Rightarrow d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_O + d\boldsymbol{\varphi} \wedge \boldsymbol{\rho} \quad (3.69)$$

En (3.68) \mathbf{w} y \mathbf{c} son elementos de la variedad tangente del espacio de configuraciones, sin que sea necesario que su módulo tenga un valor infinitesimal. Estos aspectos se pueden consultar en la referencia [14].

Las dos propiedades más relevantes de la matriz de rigidez las estableceremos con sendos teoremas.

Teorema 3.7.1. *La matriz de rigidez \mathbf{K} es simétrica.*

Demostración

Esta demostración es inmediata a partir de la expresión (3.64) de las componentes de \mathbf{K} :

$$\begin{aligned} K_{PQ} &= \mathbf{e}_i^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_A^T \mathbf{C} \mathbf{B}_B d\Omega \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_B^T \mathbf{C}^T \mathbf{B}_A d\Omega \mathbf{e}_i \\ &= \mathbf{e}_j^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_B^T \mathbf{C} \mathbf{B}_A d\Omega \mathbf{e}_i = K_{QP} \end{aligned} \quad (3.70)$$

□

Teorema 3.7.2. *La matriz de rigidez \mathbf{K} es definida positiva.*

Demostración

Al igual que en la demostración del teorema 2.6.2, esta demostración se realiza en dos pasos. Sea $\delta \mathbf{w}_i^h = \sum_{A \in \eta - \eta_{u_i}} \delta c_{iA} N_A$ una función de \mathcal{V}^h . Llamando $\delta c_P = \delta c_{iA}$ con $P = id(i, A)$, los coeficientes δc_P , $P = 1 \dots n_{\text{eq}}$ definen las componentes del vector $\delta \mathbf{c}$.

a) $\delta \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{K} \delta \mathbf{c} \geq 0$

En efecto,

$$\delta \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{K} \delta \mathbf{c} = \delta c_P \cdot K_{PQ} \delta c_Q = \delta c_{iA} \left(\mathbf{e}_i^T \cdot \int_{\Omega} \mathbf{B}_A^T \mathbf{C} \mathbf{B}_B d\Omega \mathbf{e}_j^T \right) \delta c_{jB} \quad (3.71)$$

De acuerdo con (3.55), la expresión anterior se puede reescribir como:

$$\delta \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{K} \delta \mathbf{c} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}^T(\delta \mathbf{w}) \cdot \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}(\delta \mathbf{w}) d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\nabla}^s \delta \mathbf{w} \cdot \mathbf{C} \boldsymbol{\nabla}^s \delta \mathbf{w} d\Omega \geq 0 \quad (3.72)$$

que es no negativo de acuerdo con (3.8).

b) $\delta \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{K} \delta \mathbf{c} = 0 \Rightarrow \delta \mathbf{c} = \mathbf{0}$

Suponiendo que $\delta \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{K} \delta \mathbf{c} = 0$, de acuerdo con la demostración de la parte (a):

$$\boldsymbol{\nabla}^s \delta \mathbf{w} \cdot \mathbf{C} \boldsymbol{\nabla}^s \delta \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (3.73)$$

y teniendo en cuenta (3.9):

$$\nabla^s \delta \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (3.74)$$

por lo que $\delta \mathbf{w}$ es un movimiento infinitesimal de sólido rígido.

De acuerdo con la condición de contorno homogénea que según se ha definido en (3.45) satisfacen los elementos de \mathcal{V}^h , si $\delta \mathbf{r}^h \in \mathcal{V}^h$ es un movimiento infinitesimal de sólido rígido, entonces $\delta \mathbf{r}^h = \mathbf{0}$. En consecuencia:

$$\nabla^s \delta \mathbf{w} = \mathbf{0} \Rightarrow \delta \mathbf{w} = \mathbf{0} \Rightarrow \delta c_P = 0, P = 1 \dots n_{\text{eq}} \Rightarrow \delta \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (3.75)$$

□

Observación. La propiedad de la matriz \mathbf{K} de ser definida positiva se apoya en dos requisitos:

1. El tensor constitutivo \mathbf{C} es definido positivo.
2. Las condiciones de contorno homogéneas incorporadas en la definición del espacio funcional \mathcal{V} .

3.8. Formulación de elementos finitos

La matriz \mathbf{K} y el vector \mathbf{F} se pueden descomponer en suma de las contribuciones elementales. El procedimiento es idéntico al descrito en el apartado 2.7, por lo que aquí únicamente se expresan las matrices y vectores elementales.

En la discretización de un problema de n_{dim} dimensiones, para un elemento e con n_{en} nodos, la matriz de rigidez elemental es:

$$\mathbf{k}^e = [k_{pq}^e], \quad 1 \leq p, q \leq n_{\text{en}} n_{\text{gdl}} \quad (3.76)$$

$$k_{pq}^e = \mathbf{e}_i^T \cdot \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_a^T \mathbf{C} \mathbf{B}_b d\Omega \mathbf{e}_j^T, \quad p = n_{\text{gdl}}(a-1) + i \quad (3.77)$$

$$q = n_{\text{gdl}}(b-1) + j \quad (3.78)$$

$$a = 1 \dots n_{\text{en}}, \quad b = 1 \dots n_{\text{en}} \quad (3.79)$$

$$i = 1 \dots n_{\text{dim}}, \quad j = 1 \dots n_{\text{dim}} \quad (3.80)$$

siendo \mathbf{B}_a las matrices nodales de interpolación de deformaciones definidas en (3.53) y (3.54) para $n_{\text{dim}} = 2$ y $n_{\text{dim}} = 3$, respectivamente.

Es inmediato comprobar a partir de (3.76) hasta (3.80), que la matriz de rigidez elemental se puede expresar de forma compacta:

$$\mathbf{k}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega, \quad \mathbf{B} = (\mathbf{B}_1 | \mathbf{B}_2 | \dots | \mathbf{B}_{n_{\text{en}}}) \quad (3.81)$$

siendo de hecho esta expresión la que se utiliza en la implementación computacional.

La expresión de las componentes del vector de fuerzas elemental es:

$$f_p^e = \int_{\Omega^e} N_a b_i d\Omega + \int_{\partial t_i \Omega} N_a \bar{t}_i d\Gamma - \sum_{q=1}^{n_{en} n_{gdl}} k_{pq}^e \bar{u}_q, \quad \bar{u}_q = \bar{u}_{jb} \quad (3.82)$$

siendo $\bar{u}_{jb} = 0$ si el nodo b no tiene desplazamiento impuesto en dirección j .

Los vectores y matrices formulados a nivel elemento en (3.81) y (3.82) se ensamblan mediante el operador $A[\cdot]$, descrito en el siguiente apartado, para obtener el vector de fuerzas y la matriz de rigidez globales:

$$K = \underset{e=1}{\overset{n_{elm}}{A}} k^e \quad (3.83)$$

$$F = \underset{e=1}{\overset{n_{elm}}{A}} f^e \quad (3.84)$$

3.8.1. Ensamble de las ecuaciones

Para ensamblar las matrices locales se generaliza el procedimiento descrito en el apartado 2.7.1 para el caso en el que cada nodo tenga n_{gdl} grados de libertad.

La conectividad se define con la misma matriz ix que se ha definido en el capítulo anterior:

$$ix(\underbrace{a}_{\text{nodo local}}, \underbrace{e}_{\text{elemento}}) = \underbrace{A}_{\text{nodo global}} \quad (3.85)$$

La numeración de las ecuaciones se realiza asignándole a cada nodo y grado de libertad un número de ecuación:

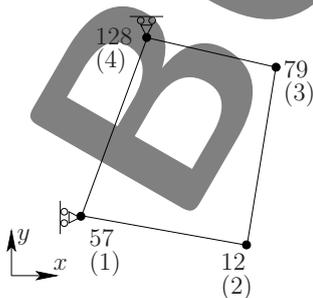
$$id(\underbrace{i}_{\text{grado de libertad}}, \underbrace{A}_{\text{nodo global}}) = \underbrace{P}_{\text{ecuación}} \quad (3.86)$$

La matriz ld construida a partir de ix e id es en este caso:

$$ld(i, a, e) = id(i, ix(a, e)) \quad (3.87)$$

El algoritmo de ensamble se hace directamente a partir de los datos almacenados en ld , explicándose el procedimiento a seguir mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo



En la figura adjunta se muestra el detalle de uno de los elementos de cuatro nodos de una malla de elementos finitos, utilizada en la solución de un problema de elasticidad en dos dimensiones. Se muestra la numeración global de los nodos y entre paréntesis la numeración local.

Suponemos que la matriz id ya se ha creado y las entradas correspondientes

al elemento de la figura son:

$$\begin{aligned} id(1, 12) &= 9 & id(2, 12) &= 10 \\ id(1, 57) &= -13 & id(2, 57) &= 49 \\ id(1, 79) &= 67 & id(2, 79) &= 68 \\ id(1, 128) &= 115 & id(2, 128) &= -27 \end{aligned}$$

donde los números negativos corresponden a los grados de libertad con movimientos impuestos. La matriz \mathbf{ix} se construye a partir de la topología definida en la figura:

$$\begin{aligned} ix(1, e) &= 57 \\ ix(2, e) &= 12 \\ ix(3, e) &= 79 \\ ix(4, e) &= 128 \end{aligned}$$

y la matriz \mathbf{ld} a partir de \mathbf{id} e \mathbf{ix} , de acuerdo con la expresión (3.87):

$$\begin{aligned} ld(1, 1, e) &= -13 \\ ld(2, 1, e) &= 49 \\ ld(1, 2, e) &= 9 \\ ld(2, 2, e) &= 10 \\ ld(1, 3, e) &= 67 \\ ld(2, 3, e) &= 68 \\ ld(1, 4, e) &= 115 \\ ld(2, 4, e) &= -27 \end{aligned}$$

Las contribuciones de las matrices y vectores locales a los globales se deducen directamente a partir de la matriz \mathbf{ld} :

Matriz de rigidez:

$$\begin{aligned} K_{9,9} &\leftarrow K_{9,9} + k_{3,3}^e & K_{9,10} &\leftarrow K_{9,10} + k_{3,4}^e \\ K_{9,49} &\leftarrow K_{9,49} + k_{2,3}^e & K_{9,67} &\leftarrow K_{9,67} + k_{3,5}^e \\ K_{9,68} &\leftarrow K_{9,68} + k_{3,6}^e & K_{9,115} &\leftarrow K_{9,115} + k_{3,7}^e \\ K_{10,10} &\leftarrow K_{10,10} + k_{4,4}^e & K_{10,49} &\leftarrow K_{10,49} + k_{2,4}^e \\ K_{10,67} &\leftarrow K_{10,67} + k_{4,5}^e & K_{10,68} &\leftarrow K_{10,68} + k_{4,6}^e \\ K_{10,115} &\leftarrow K_{10,115} + k_{4,7}^e & K_{49,49} &\leftarrow K_{49,49} + k_{2,2}^e \\ K_{49,67} &\leftarrow K_{49,67} + k_{2,5}^e & K_{49,68} &\leftarrow K_{49,68} + k_{2,6}^e \\ K_{49,115} &\leftarrow K_{49,115} + k_{2,7}^e & K_{67,67} &\leftarrow K_{67,67} + k_{5,5}^e \\ K_{67,68} &\leftarrow K_{67,68} + k_{5,6}^e & K_{67,115} &\leftarrow K_{67,115} + k_{5,7}^e \\ K_{68,68} &\leftarrow K_{68,68} + k_{6,6}^e & K_{68,115} &\leftarrow K_{68,115} + k_{6,7}^e \\ K_{115,115} &\leftarrow K_{115,115} + k_{7,7}^e \end{aligned}$$

Vector de fuerzas:

$$\begin{aligned} F_9 &\leftarrow F_9 + f_3^e \\ F_{10} &\leftarrow F_{10} + f_4^e \\ F_{49} &\leftarrow F_{49} + f_2^e \\ F_{67} &\leftarrow F_{67} + f_5^e \\ F_{68} &\leftarrow F_{68} + f_6^e \\ F_{115} &\leftarrow F_{115} + f_7^e \end{aligned}$$

Obsérvese que en la construcción de la matriz de rigidez global se ha tenido en cuenta la simetría de la misma, así como la simetría de la matriz de rigidez elemental.

3.9. Ecuaciones constitutivas de la elasticidad lineal

Las ecuaciones constitutivas de un material elástico lineal se expresan en el caso más general con la expresión (3.3). Como ya se ha comentado en el apartado 3.1 son necesarias 21 constantes para definir el tensor de módulos elásticos \mathbf{C} de un sólido anisótropo.

El número de constantes elásticas se reduce a 9 en el caso del sólido elástico ortótropo. En este apartado, de acuerdo con (3.50) y el cuadro 3.1, emplearemos la notación en la que tensiones y deformaciones se expresan en forma vectorial. Considerando un sistema de referencia cartesiano $Oxyz$, las ecuaciones constitutivas de un sólido elástico lineal ortótropo se escriben:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{zx}}{E_x} & -\frac{\nu_{zy}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} \quad (3.88)$$

siendo $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$. De las doce constantes que intervienen en la matriz de la expresión anterior sólo nueve son independientes ya que se deben verificar las tres relaciones correspondientes a la simetría del tensor constitutivo:

$$\frac{E_x}{\nu_{yx}} = \frac{E_y}{\nu_{xy}}; \quad \frac{E_y}{\nu_{zy}} = \frac{E_z}{\nu_{yz}}; \quad \frac{E_z}{\nu_{xz}} = \frac{E_x}{\nu_{zx}} \quad (3.89)$$

Los materiales transversalmente isótropos se caracterizan mediante cinco

constantes. Llamando z a la dirección de anisotropía:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu_z}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu_z}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_z}{E_z} & -\frac{\nu_z}{E_z} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_z} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (3.90)$$

Finalmente, un material isótropo se caracteriza únicamente con dos constantes elásticas. La relación tensión-deformación es en este caso:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (3.91)$$

Las ecuaciones constitutivas de los materiales elásticos isótropos es habitual expresarlas en función de las constantes de Lamé λ y μ , relacionadas con el módulo de Young E y el coeficiente de Poisson ν mediante las expresiones:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.92)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.93)$$

e inversamente:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (3.94)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (3.95)$$

La expresión de las ecuaciones constitutivas en función de los coeficientes de Lamé es:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (3.96)$$

Observación. Para un material isótropo las componentes del tensor constitutivo de cuarto orden se expresan de manera muy sencilla en términos de los coeficientes de Lamé:

$$C_{ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \mu\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (3.97)$$

3.9.1. Modelos 2D

Aunque actualmente con cualquier ordenador personal se pueden realizar análisis tridimensionales de elementos finitos en un tiempo razonable, en numerosas situaciones prácticas se presentan geometrías y distribuciones de carga que reducen el problema de tres a dos dimensiones. En este apartado se describen los modelos que permiten analizar un problema de mecánica de sólidos en dos dimensiones.

Deformación plana

Los cuerpos con una dimensión considerablemente mayor que las otras dos, y con un estado de cargas que no varía significativamente en la dirección correspondiente a la dimensión predominante pueden analizarse con modelos de deformación plana.

Consideraremos que el problema está definido en el plano Oxy , por lo que las variables del problema no dependen de la coordenada z . En la hipótesis de deformación plana se supone que los desplazamientos en dirección perpendicular al plano del modelo son nulos:

$$u_z = 0 \quad (3.98)$$

En consecuencia, también son nulas las componentes de la deformación ε_{zz} , γ_{xz} y γ_{yz} . Las componentes no nulas son:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{aligned}$$

Sustituyendo $\varepsilon_{zz} = 0$ en (3.91) y operando se obtiene:

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (3.99)$$

Las ecuaciones que relacionan las tensiones y las deformaciones son:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.100)$$

En los modelos de deformación plana, por convenio, suele considerarse de valor unidad el espesor correspondiente a la dimensión según Oz .

Tensión plana

En la hipótesis de tensión plana la tensión en dirección perpendicular al plano del sólido es nula, y se aplica a sólidos que presentan una dimensión mucho menor que las dos restantes, que sin pérdida de generalidad consideraremos que es Oz .

Una aplicación clásica de la hipótesis de tensión plana corresponde a una laja de pequeño espesor cargada únicamente en el propio plano de la laja. Dado que en dirección Oz no hay cargas aplicadas y el espesor es pequeño, a lo largo de Oz se verifica que:

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (3.101)$$

y en consecuencia:

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (3.102)$$

Las componentes de la tensión σ_{xx} , σ_{yy} y τ_{xy} se promedian en el espesor de la laja, suponiendo que son independientes de la coordenada z . Imponiendo $\sigma_{zz} = 0$ en (3.91), resulta:

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad (3.103)$$

Finalmente, la relación tensión-deformación viene dada por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.104)$$

Problemas axisimétricos

En numerosos problemas de ingeniería se aborda el caso de sólidos de revolución sometidos a cargas también con simetría axial: cilindros y esferas sometidos a presión interna, espacios "semi-infinitos" cargados en un área circular, etc. En estos casos interesa formular el problema de contorno que nos ocupa en coordenadas cilíndricas, que denominaremos $\{r, \theta, z\}$. Por la simetría de revolución existente todas las variables son independientes de θ (todas las derivadas respecto de θ se anulan). Además se supone que $u_\theta = 0$. Por tanto $\gamma_{r\theta}$, $\gamma_{\theta z}$, $\tau_{r\theta}$ y $\tau_{\theta z}$ son cero. Las relaciones deformación-desplazamiento no nulas son:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (3.105)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (3.106)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \quad (3.107)$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (3.108)$$

y las ecuaciones constitutivas:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{rz} \\ \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 & \nu \\ \nu & 1-\nu & 0 & \nu \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \end{pmatrix} \quad (3.109)$$

Debido a la simetría de revolución se ha de considerar un factor de $2\pi r$ en todos los integrandos de la formulación débil (no obstante, en la práctica el factor 2π se simplifica al aparecer en todos los términos).

Observación. Las ecuaciones de equilibrio en 3D expresadas en coordenadas cilíndricas son:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\tau_{r\theta}) + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{rz} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + b_r = 0 \quad (3.110)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{zr}) + \frac{1}{r}\tau_{z\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz} + b_z = 0 \quad (3.111)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{\theta r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{\theta z} + b_\theta = 0 \quad (3.112)$$

y con la hipótesis de simetría de revolución ($\tau_{r\theta} = \tau_{z\theta} = b_\theta = 0$):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{rr}) + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{rz} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + b_r = 0 \quad (3.113)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{zr}) + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz} + b_z = 0 \quad (3.114)$$

La expresión de la matriz de interpolación de deformaciones es:

$$\mathbf{B}_A = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_A}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_A}{\partial z} \\ \frac{\partial N_A}{\partial z} & \frac{\partial N_A}{\partial r} \\ \frac{N_A}{r} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.115)$$

Esta expresión puede asimilarse a la expresión (3.53) correspondiente a los casos 2D de tensión y deformación plana.

3.10. Ejercicios

1. Sea un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, cuyo contorno se descompone de la forma $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3 \cup \partial\Omega_4$, siendo $\partial\Omega_i$ partes de $\partial\Omega$ que no se solapan. Sea \mathbf{n} el versor normal exterior en un punto $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ y \mathbf{s} el versor normal a \mathbf{n} en \mathbf{x} , tal que $\{\mathbf{s}, \mathbf{n}\}$ es una base cuya orientación es positiva (ver

figura). Se considera el siguiente problema de contorno de elasticidad lineal:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (3.116)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{en } \partial\Omega_1 \quad (3.117)$$

$$\sigma_{ij}n_j = \bar{t}_i \quad \text{en } \partial\Omega_2 \quad (3.118)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_i n_i = \bar{u}_n \\ \sigma_{ij} n_j s_i = \bar{t}_s \end{array} \right\} \quad \text{en } \partial\Omega_3 \quad (3.119)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_i s_i = \bar{u}_s \\ \sigma_{ij} n_j n_i = \bar{t}_n \end{array} \right\} \quad \text{en } \partial\Omega_4 \quad (3.120)$$

siendo $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$. Se pide

1. Establecer la formulación débil del problema considerando que todas las condiciones de contorno correspondientes a desplazamientos impuestos son esenciales, y todas las correspondientes a tensiones impuestas son condiciones naturales.
2. Establecer los requisitos de los espacios funcionales de las funciones de prueba, \mathcal{U} , y de las variaciones, \mathcal{V} .

NOTA: Descomponer los desplazamientos virtuales según las direcciones normal y tangencial: $\delta \mathbf{u} = \delta u_n \mathbf{n} + \delta u_s \mathbf{s}$, $\delta u_i = \delta u_n n_i + \delta u_s s_i$. (Ejercicio 5, página 105, de la referencia [11])

2. En la teoría (linealizada) de pequeños desplazamientos superpuestos con los grandes [11], la contribución de las tensiones iniciales se considera mediante una matriz (denominada *matriz de rigidez de tensiones iniciales*), de modo que el término de rigidez de la ecuación variacional:

$$\int_{\Omega} \delta u_{(i,j)} C_{ijkl} u_{(k,l)} d\Omega \quad (3.121)$$

se reemplaza por:

$$\int_{\Omega} \delta u_{i,j} D_{ijkl} u_{k,l} d\Omega \quad (3.122)$$

donde:

$$D_{ijkl} = C_{ijkl} + \delta_{ik} \sigma_{jl}^0 \quad (3.123)$$

$$\sigma_{jl}^0 = \sigma_{lj}^0 \quad (3.124)$$

siendo δ_{ik} la delta de Kronecker de segundo orden y σ_{jl}^0 las componentes del tensor de tensiones iniciales, que es función del punto $\mathbf{x} \in \Omega$. Se pide:

1. Establecer las simetrías del tensor D_{ijkl}

2. En el caso $n_{\text{dim}} = 2$, expresando el trabajo virtual de las fuerzas internas mediante la notación:

$$\int_{\Omega} \|\delta u_{1,1}, \delta u_{2,2}, \delta u_{1,2} + \delta u_{2,1}, \delta u_{1,2} - \delta u_{2,1}\| \mathbf{D} \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + \delta u_{2,1} \\ u_{1,2} - \delta u_{2,1} \end{Bmatrix} d\Omega \quad (3.125)$$

se obtienen las componentes de la matriz de rigidez:

$$k_{pq} = \mathbf{e}_i^T \cdot \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_a^T \mathbf{D} \mathbf{B}_b d\Omega \mathbf{e}_j^T \quad (3.126)$$

siendo \mathbf{D} una matriz de 4×4 y \mathbf{B}_a una matriz de 4×2 . Obtener:

- Expresión de la matriz \mathbf{B}_a en función de las funciones de forma y sus derivadas.
- Componentes explícitas de la matriz \mathbf{D} en función de los coeficientes D_{ijkl}
- Expresar claramente la contribución de las tensiones iniciales σ_{ij}^0 a la matriz de rigidez.

(Ejercicio 4, página 104, de la referencia [11])

3. La ecuación constitutiva de un material elástico lineal se puede expresar en forma más general mediante:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^0) + \sigma_{ij}^0 \quad (3.127)$$

siendo ε_{kl}^0 y σ_{ij}^0 las deformaciones iniciales y las tensiones iniciales, funciones conocidas de \mathbf{x} . Los términos correspondientes a las deformaciones iniciales pueden emplearse para representar efectos de dilatación térmica de acuerdo, por ejemplo para el caso lineal, con la expresión:

$$\varepsilon_{kl}^0 = \theta \alpha_{kl} \quad (3.128)$$

siendo θ la variación de temperatura y α_{kl} los coeficientes de expansión térmica. Se pide:

- Expresar la formulación débil del problema de la elasticidad considerando la ecuación constitutiva (3.127), y la relación (3.128) para las deformaciones iniciales.
- Obtener la expresión del vector de fuerzas nodales en términos de las matrices de interpolación de deformaciones \mathbf{B} y de módulos elásticos \mathbf{C} , y de los datos del problema.

(Ejercicio 6, página 105, de la referencia [11])

4. Para conocer la respuesta mecánica de un tubo de sección circular y gran longitud, sometido a presión interna, se realizan dos modelos de elementos finitos en 2D: uno de deformación plana y otro axisimétrico (ver figura). El radio interior es $a = 0.5$ y el radio exterior $b = 1$. El material es elástico isótropo. El módulo de Young y el coeficiente de Poisson valen $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Pa y $\nu = 0.3$, respectivamente. La presión aplicada es de 300 MPa.

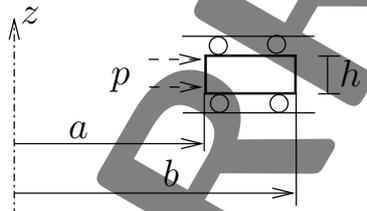
Obtener la distribución de tensiones radiales, circunferenciales y axiales, y la distribución de desplazamientos radiales. Dibujar un perfil con la variación según un radio del cilindro de dichos resultados y compararlos con las expresiones analíticas:

$$\sigma_{rr} = -p \frac{(b/r)^2 - 1}{(b/a)^2 - 1} \quad (3.129)$$

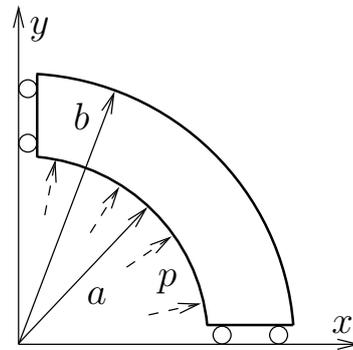
$$\sigma_{\theta\theta} = p \frac{(b/r)^2 + 1}{(b/a)^2 - 1} \quad (3.130)$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = \nu p \frac{2}{(b/a)^2 - 1} \quad (3.131)$$

$$u_r = \frac{(1 + \nu)p}{E[(b/a)^2 - 1]} \left[(1 - 2\nu)r + \frac{b^2}{r} \right] \quad (3.132)$$



Modelo Axisimétrico



Def. Plana

5. Obtener mediante un modelo de elementos finitos axisimétrico el campo de desplazamientos y la distribución de tensiones radiales y circunferenciales en la pared de una esfera sometida a presión interna p . El radio interior de la esfera es $a = 0.8$ m., el radio exterior $b = 1.0$ m. y la presión $p = 5 \cdot 10^8$ Pa. Considerar un material elástico lineal con módulo de elasticidad $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ y coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. Comparar los resultados obtenidos con la

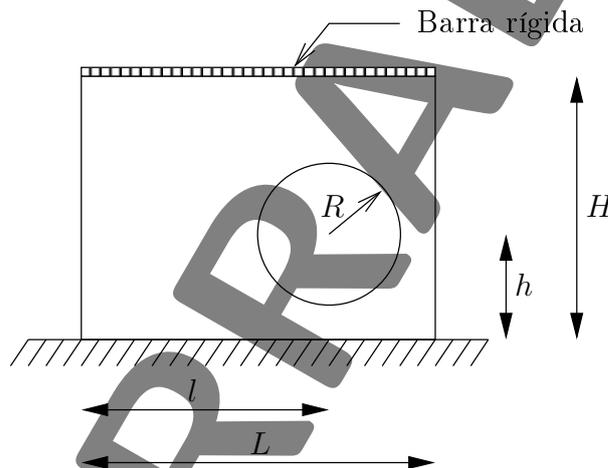
solución analítica:

$$\sigma_{rr} = pa^3 \frac{b^3 - r^3}{r^3(a^3 - b^3)} \quad (3.133)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = pa^3 \frac{2r^3 + b^3}{2r^3(b^3 - a^3)} \quad (3.134)$$

$$u_r = \frac{pa^3}{2E(b^3 - a^3)r^2} [2(1 - 2\nu)r^3 + (1 + \nu)b^3] \quad (3.135)$$

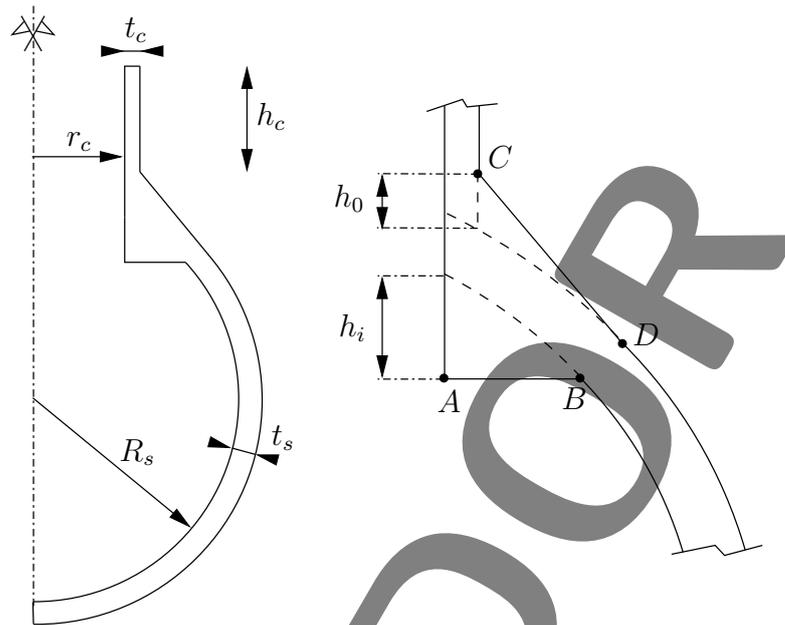
6. El sólido de la figura es una chapa rectangular de 1 mm de espesor que tiene un taladro circular. La chapa está perfectamente anclada en su borde inferior a una base rígida, y a una barra rígida en su borde superior. El material es elástico lineal, de características mecánicas $E = 210$ GPa y $\nu = 0.3$. Las dimensiones en milímetros son $H = 33$, $L = 38$, $R = 10$, $l = 22$, $h = 14$. Se desea conocer los valores de la tensión de Von Mises que resultan de imponer en la barra rígida movimientos correspondientes a traslaciones en dirección x y en dirección y , y rotaciones alrededor de sus extremos. Se considerará la hipótesis de tensión plana.



(Ejercicio C.6.4 , página 255, de la referencia [4])

7. Un depósito esférico tiene una salida cilíndrica en su parte superior, tal y como se muestra en la sección transversal de la figura. En las partes interior y exterior de la zona de unión entre el cilindro y la esfera se hace un engrosamiento con simetría de revolución de manera que en la parte interior AB es perpendicular al eje de revolución, y en la parte exterior CD es tangente a la esfera. El material es elástico lineal con características mecánicas $E = 36$ GPa y $\nu = 0.2$. Las dimensiones en metros son $r_c = 1.5$, $r_s = 4.9$, $h_0 = 0.65$, $h_i = 0.6$, $t_s = 0.7$, $h_c = 2$, $t_c = 2t_s r_c / r_s$.

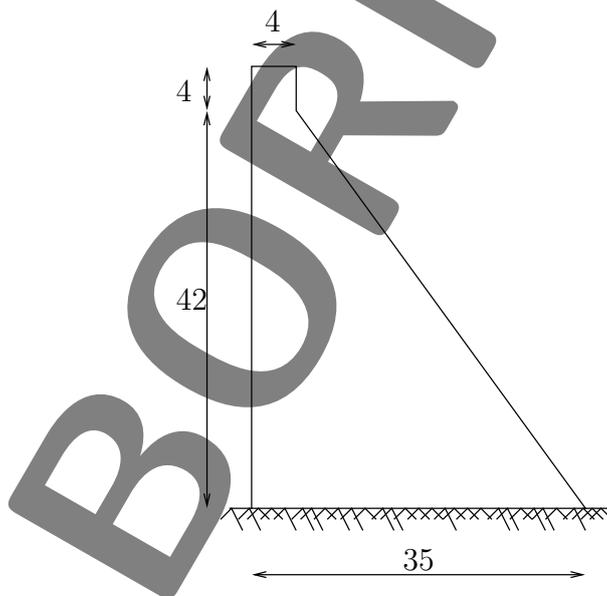
Cuando el depósito está sometido a presión interna se desea conocer los valores máximos del desplazamiento y de la tensión de Von Mises, y en que zonas se presentan. Comparar los resultados en los casos con y sin engrosamiento.



(Ejercicio C.14.5, página 529, de la referencia [1])

8. Una presa de gravedad de 150 metros de longitud, y cuya sección transversal se representa en la figura, debe ser analizada mediante elementos finitos con objeto de conocer su estado tensional. Para ello se realizarán dos modelos:

- Un modelo tridimensional.
- Un modelo 2D con la hipótesis de deformación plana.



Cotas en metros

$$E = 3.5 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0.2$$

Las acciones estáticas a considerar son:

1. Peso propio.

2. Presión hidrostática para un nivel de embalse $H = 42$ m.

en las hipótesis correspondientes a las siguientes condiciones de contorno para el modelo 3D:

1. Estribos con todos los desplazamientos impedidos
2. Estribos con los desplazamientos horizontales impedidos

Asimismo se considerarán las situaciones correspondientes a una cimentación directamente en roca (que se considerará infinitamente rígida) y a una cimentación flexible, que se modelizará con coeficientes de balasto de igual valor $k = 6.5 \cdot 10^6 \text{N/m}^3$ en todas direcciones.

Para las dos hipótesis de carga (considerándolas tanto individualmente como de manera conjunta), se pide:

1. Deformadas
2. Contornos de tensiones principales máximas y mínimas
3. Desplazamientos en la coronación de la presa

comparando los resultados obtenidos con el modelo 3D y con el modelo de deformación plana. Discutir los valores de dichos resultados en relación a las condiciones de contorno consideradas.

9. Una escuadra de acero estructural ($E = 2.1 \cdot 10^5$ MPa), que se arma con dos chapas de 2.5 cm. de espesor, se empotra en un soporte que se considera totalmente rígido. La chapa superior ($0.6 \times 0.175 \text{ m}^2$) soporta una carga distribuida de 2.76 MPa.

Analizar mediante un modelo tridimensional de elementos finitos empleando elementos sólidos de 8 nodos, los siguientes aspectos:

1. Geometría deformada y flecha en el extremo libre, comparando el resultado obtenido con el que se obtiene de la Resistencia de Materiales.
2. Distribución de las tensiones principales máximas y de las tensiones principales mínimas.

Discutir los resultados obtenidos.

