Slide 1

MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS
Tecnología de elementos

Felipe Gabaldón Castillo

E.T.S. INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES y PUERTOS. UPM

Madrid, 14 de Diciembre de 2000

Slide 1

Contenido

Slide 2

El fenómeno de bloqueo. Introducción

- Ciertas restricciones físicas conducen a situaciones de bloqueo de la formulación en desplazamientos. Ejemplos:
  - Elasticidad incompresible.
  - Flexión de vigas y placas delgadas
- **Concepto:** La metodología de solución es minimizar la energía potencial total. Utilizar para ello el método de los elementos finitos ya introduce una restricción (se busca el mínimo para una cierta clase de desplazamientos, por ejemplo polinomios continuos a trozos). Si además existen restricciones adicionales de tipo físico, el sistema puede quedar con un exceso de restricciones que hagan que la única solución del sistema sea la nula.

Slide 3

El fenómeno del bloqueo. Introducción

- Ejemplos:
  - $\nu \to 0{,}5$ en deformación plana
  - $t \to 0$ en vigas y placas
- Pueden existir restricciones "escondidas": plasticidad con deformaciones plásticas de carácter isocórico.
- El problema debe plantearse introduciendo una incógnita por cada ecuación de restricción.

Slide 4

El fenómeno del bloqueo. Elasticidad incompresible

- Ecuación constitutiva (medio elástico isótropo):

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k}\delta_{ij} + 2\mu u_{(i,j)}$$

Si $\nu \to \frac{1}{2}$, entonces $\lambda = \frac{2\nu\mu}{1-2\nu} \to \infty$

La formulación en este caso será:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + 2\mu u_{(i,j)} \\ u_{i,i} &= 0 \end{aligned}$$

Slide 5

El fenómeno del bloqueo. Elasticidad incompresible

- Formulación válida para medios compresibles e incompresibles:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu u_{(i,j)}$$
$$u_{i,i} + \frac{p}{\lambda} = 0$$

- Observaciones

$$\nu = \frac{1}{2} \Rightarrow p = -\frac{\sigma_{ii}}{3}$$
$$\nu \approx \frac{1}{2} \Rightarrow p \approx -\frac{\sigma_{ii}}{3}$$
$$\nu \neq \frac{1}{2} \Rightarrow p = -\lambda u_{i,i} \neq \frac{\sigma_{ii}}{3}$$

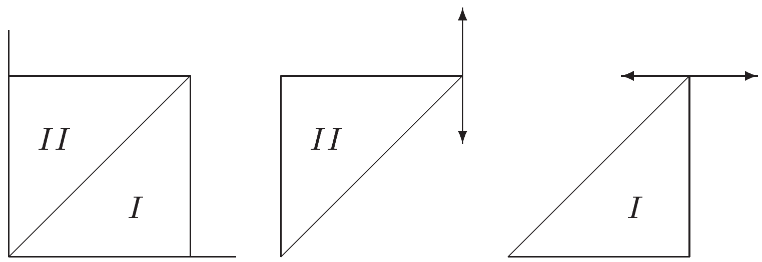
Slide 6

El fenómeno del bloqueo. Elasticidad incompresible

- Para triángulos lineales de presión constante, se tiene:

$$\int_{\Omega_e} q^h u^h_{i,i} d\Omega = 0 \;\; \forall q^h \text{cte en } \Omega_e \Rightarrow \int_{\Omega_e} u^h_{i,i} d\Omega = 0$$

es decir, los elementos no cambian de volumen



Slide 7

La prueba de la parcela

- Introducida originalmente por Irons en 1965 y revisada posteriormente por Taylor et al. en 1986 (Individual patch test).
- Los estados de deformación constante (incluyendo movimientos de sólido rígido) han de ser representados de manera exacta.
- Ha de verificarse, en particular, para un solo elemento.
- Se debe probar sobre elementos distorsionados.
- Sirve como chequeo de que no existen modos espúreos de energía nula, garantizando la estabilidad numérica de la formulación.

Slide 8

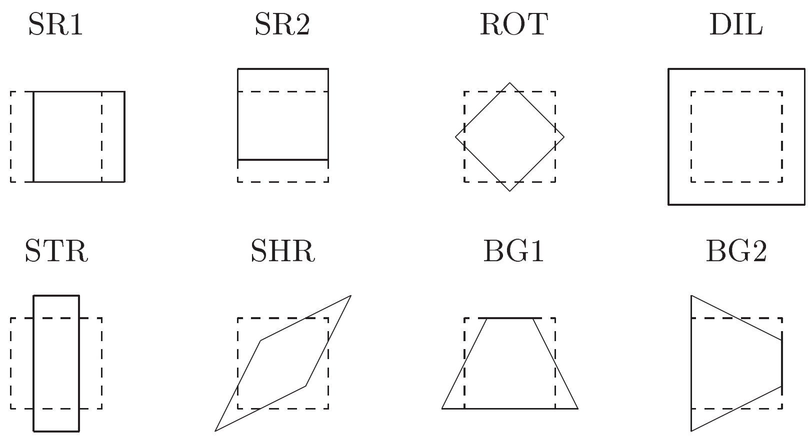
La prueba de la parcela

- Los modos de deformación constante y de sólido rígido son capturados de manera exacta por todos los elementos que pasan la prueba de la parcela. La diferencia entre los distintos elementos se encuentra en la rigidez de los modos de flexión.
- Los modos de flexión no han de tener rigidez infinita en el límite incompresible. Este es el problema que tiene la formulación en desplazamientos.
- Asimismo, dichos modos no han de tener rigidez nula. La formulación con integración reducida da lugar a modos espúreos de flexión con energía nula $\rightarrow$ hourglassing.

Slide 9

Análisis modal de la matriz de rigidez

- Modos de deformación:



Slide 10

Análisis modal de la matriz de rigidez

- Autovalores:
  - Modos de sólido rígido

$$\lambda_{\mathrm{SR1}} = 0$$
$$\lambda_{\mathrm{SR2}} = 0$$
$$\lambda_{\mathrm{SR3}} = 0$$

  - Modo volumétrico

$$\lambda_{\mathrm{VOL}} = \frac{1}{2r}\Big[(\lambda+2\mu)(1+r^2)+ \sqrt{4\mu(\lambda+\mu)(r^2-1)^2+\lambda^2(r^2+1)^2}\Big] \qquad r=\frac{h}{b}$$

En el caso incompresible $\lambda_{\mathrm{VOL}} \to \infty$

Slide 11

Análisis modal de la matriz de rigidez

- Autovalores:
  - Flexión

$$\lambda_{\mathrm{BG1}} = \frac{\mu + (\lambda + 2\mu)r^2}{3r}$$
$$\lambda_{\mathrm{BG2}} = \frac{\mu r^2 + \lambda + 2\mu}{3r}$$

con $r = h/b$

En el problema de flexión de vigas delgadas $\lambda_{\mathrm{BG1}} \to \infty$ ó $\lambda_{\mathrm{BG2}} \to \infty$

Slide 12

Conclusiones

- El fenómeno del bloqueo aparece como consecuencia de una formulación numérica inadecuada que da lugar a un problema con demasiadas restricciones. En concreto, dos defectos clave son la interpolación lineal de las respuestas volumétricas y de corte.
- El problema debe solucionarse modificando la formulación en los términos que dan lugar a los campos de deformaciones no constantes. La integración reducida elimina la parte no constante de las deformaciones en el elemento, pero da lugar a modos espúreos de energía nula.

Slide 13

Tecnologías especiales

1. Métodos mixtos.
2. Integración selectiva y reducida.
3. Formulación $\overline{\boldsymbol{B}}$
4. El método de los modos incompatibles
5. Formulación con deformaciones supuestas mejoradas

Slide 14

Métodos mixtos

- Las referencias son muy abundantes
- Los métodos mixtos emplean diferentes interpolaciones para diferentes campos: desplazamientos-presión, desplazamientos-tensión, desplazamientos-deformación, etc.
- Para que una formulación mixta tenga garantizada la convergencia, ha de verificar la condición de Babuska-Brezzi (problema de checker-board).
- Los elementos de orden alto pierden robustez en problemas no lineales.
- No hay un "buen elemento" para todas las clases de problemas

Slide 15

Métodos mixtos

- Planteamiento del problema de contorno Dados $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$, encontrar $\boldsymbol{u}_i : \Omega \to R$, $p : \Omega \to R$ tal que:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + f_i = 0 &\quad \text{en } \Omega \\ u_{i,i} + p/\lambda = 0 &\quad \text{en } \Omega \\ u_i = g_i &\quad \text{en } \partial_u \Omega \\ \sigma_{ij} n_j = h_i &\quad \text{en } \partial_t \Omega \end{aligned}$$

siendo:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu u_{(i,j)}$$

Slide 16

Métodos mixtos

- Formulación débil

  Sean:

$$\begin{aligned} S_i &= \text{espacio de las soluciones de prueba (desplazamientos)} \\ \nu_i &= \text{espacio de las funciones de peso (desplazamientos)} \\ \mathcal{P} &= \text{espacio de las presiones} \end{aligned}$$

Dados f_i, g_i, h_i, encontrar $u_i \in S_i$ y $p \in \mathcal{P}$ tal que $\forall w_i \in \nu_i$, $q \in \mathcal{P}$, se verifique:

$$\int_\Omega w_{(i,j)} \sigma_{ij} d\Omega - \int_\Omega q \left(u_{i,i} + \frac{p}{\lambda} \right) d\Omega = \int_\Omega w_i f_i d\Omega + \int_{\partial_t \Omega} w_i h_i d\Gamma \tag{1}$$

Slide 17

Métodos mixtos

- Método de Galerkin

  Sean:

  S_i^h = espacio de las soluciones de prueba (desplazamientos)

  ν_i^h = espacio de las funciones de peso (desplazamientos)

  $\mathcal{P}^\langle$ = aproximación del espacio de las presiones

  Dados f_i, g_i, h_i, encontrar $u_i^h \in S_i^h$ y $p \in \mathcal{P}^\langle$ tal que $\forall w_i^h \in \nu_i^h$, $q^h \in \mathcal{P}^\langle$, se verifique:

$$\int_\Omega w_{(i,j)}^h \sigma_{ij}^h d\Omega - \int_\Omega q^h \left(u_{i,i}^h + \frac{p^h}{\lambda} \right) d\Omega = \int_\Omega w_i^h f_i d\Omega + \int_{\partial_t \Omega} w_i^h h_i d\Gamma \tag{2}$$

Slide 18

Métodos mixtos

- Formulación matricial. Sustituyendo:

$$\int_\Omega w_{(i,j)}^h \sigma_{ij}^h d\Omega = \int_\Omega w_{i,i}^h p^h d\Omega + \int_\Omega w_{(i,j)}^h 2\mu u_{(i,j)}^h d\Omega$$

  en (2) y haciendo las interpolaciones definidas por:

$$\boldsymbol{u}^h = \boldsymbol{N}\boldsymbol{d} \qquad \boldsymbol{w}^h = \boldsymbol{N}\boldsymbol{w}$$

$$\boldsymbol{p}^h = \boldsymbol{N}_p\boldsymbol{p} \qquad \boldsymbol{q}^h = \boldsymbol{N}\boldsymbol{q}$$

  para $\boldsymbol{w}$ y $\boldsymbol{q}$ arbitrarios se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{K} & \boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{H} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Slide 19

Métodos mixtos

- Formulación matricial

  El sistema global de ecuaciones (3), se puede condensar estáticamente para cada elemento. Partiendo del sistema de ecuaciones a nivel elemental:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{k}^e & \boldsymbol{g}^e \\ (\boldsymbol{g}^e)^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{m}^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{d}^e \\ \boldsymbol{p}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}^e \\ \boldsymbol{h}^e \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}^e \boldsymbol{d}^e + \boldsymbol{g}^e \boldsymbol{p}^e = \boldsymbol{f}^e \tag{4}$$

$$(\boldsymbol{g}^e)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d}^e + \boldsymbol{m}^e \boldsymbol{p}^e = \boldsymbol{h}^e \tag{5}$$

Slide 20

Métodos mixtos

La forma de proceder es la siguiente:

1. Caso compresible ($\lambda < \infty$; $\boldsymbol{m}^e \neq \boldsymbol{0}$)

   Se elimina $\boldsymbol{p}^e$ en (5), y se sustituye en (4):

$$\boldsymbol{p}^e = (\boldsymbol{m}^e)^{-1} \left[\boldsymbol{h}^e - (\boldsymbol{g}^e)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d}^e \right]$$

$$\tilde{\boldsymbol{k}}^e \boldsymbol{d}^e = \tilde{\boldsymbol{f}}^e$$

   con:

$$\tilde{\boldsymbol{k}}^e = \boldsymbol{k}^e - \boldsymbol{g}^e (\boldsymbol{m}^e)^{-1} (\boldsymbol{g}^e)^{\mathrm{T}}$$

$$\tilde{\boldsymbol{f}}^e = \boldsymbol{f}^e - \boldsymbol{g}^e (\boldsymbol{m}^e)^{-1} \boldsymbol{h}^e$$

Slide 21

Métodos mixtos

2. Caso incompresible ($\lambda \to \infty$; $\boldsymbol{m}^e = \boldsymbol{0}$)
   Se elimina $\boldsymbol{d}^e$ en (4)y se sustituye en (5):

$$\boldsymbol{d}^e = (\boldsymbol{k}^e)^{-1} [\boldsymbol{f}^e - \boldsymbol{g}^e \boldsymbol{p}^e] \tag{6}$$

$$\boldsymbol{h}^e = (\boldsymbol{g}^e)^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{k}^e)^{-1} [\boldsymbol{f}^e - \boldsymbol{g}^e \boldsymbol{p}^e] \tag{7}$$

   ahora en (7) se despeja $\boldsymbol{p}^e$ y se sustituye en (6) para obtener $\boldsymbol{d}^e$

Slide 22

Métodos mixtos

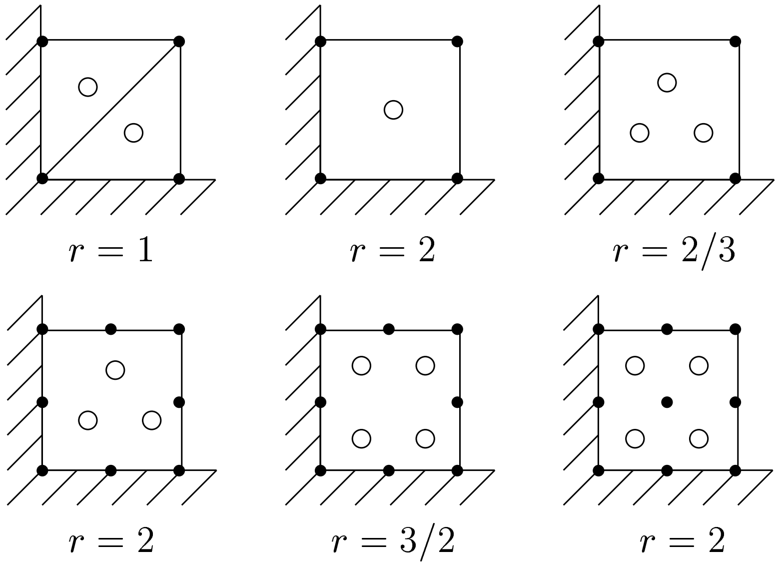
- La interpolación de desplazamientos es la estándar. La de presiones puede ser discontinua
- ¡ No todos los elementos funcionan !:

$$r = \frac{n_{eq}}{n_c}; \qquad \begin{array}{lcl} n_{eq} & \equiv & \text{ecuaciones en desplazamientos} \\ n_c & \equiv & \text{restricciones de incompresibilidad} \end{array}$$

$r = 2$	óptimo
$r > 2$	pocas restricciones de incompresibilidad
$r < 2$	demasiadas restricciones de incompresibilidad
$r \leq 1$	bloqueo severo

Slide 23

Métodos mixtos



Slide 24

Integración selectiva y reducida

- Concepto:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}^e &= \int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} d\Omega \\ &= \underbrace{\int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}_\lambda \boldsymbol{B} d\Omega}_{\text{Int. red: } 1\times 1} + \underbrace{\int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}_\mu \boldsymbol{B} d\Omega}_{\text{Int. comp: } 2\times 2} \end{aligned}$$

  siendo:

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

- Formulación en desplazamientos.
- Teorema de equivalencia (Malkus-Hughes)

Slide 25

La formulación $\overline{\boldsymbol{B}}$

- Concepto: $\boldsymbol{\varepsilon} = \overline{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{d}$
- Se considera la descomposición aditiva de $\boldsymbol{B}$ en:
  $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_{\text{vol}} + \boldsymbol{B}_{\text{dev}}$, siendo para el cuadrilátero de 4 nodos:

$$\boldsymbol{B}^A_{\text{vol}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} N^A_{,1} & N^A_{,2} \\ N^A_{,1} & N^A_{,2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{B}_{\text{dev}} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}_{dev}$$

Se define: $\overline{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}_{\text{vol}}|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}} + \boldsymbol{B}_{\text{dev}}$

Slide 26

El MÉTODO DE LOS MODOS INCOMPATIBLES

- Interpolación del campo de desplazamientos:

$$\boldsymbol{u} = \sum_{A=1}^{4} N_A(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{d}_A + \sum_{I=1}^{2} \tilde{N}_I(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\alpha}_I$$

siendo: $\quad \tilde{N}_1(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}(\xi^2 - 1) \qquad \tilde{N}_2(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}(\eta^2 - 1)$

- Los $\boldsymbol{\alpha}_I$ son grados de libertad internos a nivel de cada elemento.
- Deformaciones: $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{d} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{\alpha}$

$$\boldsymbol{G} = [\boldsymbol{G}_1\ \boldsymbol{G}_2] \qquad \boldsymbol{G}_I = \begin{pmatrix} \tilde{N}^I_{,1} & 0 \\ 0 & \tilde{N}^I_{,2} \\ \tilde{N}^I_{,2} & \tilde{N}^I_{,1} \end{pmatrix}$$

Slide 27

El MÉTODO DE LOS MODOS INCOMPATIBLES

- Prueba de la parcela.
  Han de obtenerse tensiones constantes con desplazamientos lineales:
  $$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{CDd} = \text{constante} \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$$
  sustituyendo en la ecuación variacional:
  $$\mathbf{0} = \int_{\Omega_e} \left[\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{CB}d\Omega\right]\boldsymbol{d} = \left[\int_{\Omega_e} \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}d\Omega\right]\boldsymbol{\sigma} \Rightarrow \int_{\Omega_e} \boldsymbol{G}d\Omega = \mathbf{0}$$
- El elemento original de Wilson no pasa la prueba de la parcela
- Taylor modifica los gradientes de los modos incompatibles:
  $$\tilde{\boldsymbol{\nabla}}\tilde{N}^I = \frac{j_0}{j}\boldsymbol{J}_0^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\xi}}\tilde{N}^I$$

Slide 28

Conclusiones

Autovalores ($r = h/b$). Modos de flexión

	BG1	BG2
$Q4$	$(\mu + (\lambda + 2\mu)r^2)/3r$	$(\mu r^2 + \lambda + 2\mu)/3r$
$Q4R$	0	0
$Q4RS$	$\mu(2r^2 + 1)/3r$	$\mu(r^2 + 2)/3r$
$\overline{\boldsymbol{B}}$	$(9\mu + r^2(\lambda + 10\mu))/27r$	$(9r^2\mu + (\lambda + 10\mu))/27r$
$Q1/E4$	$4r\mu(\lambda + \mu)/3(\lambda + 2\mu)$	$4\mu(\lambda + \mu)/3r(\lambda + 2\mu)$

- Elemento $Q4R$: modos de energía nula
- Régimen incompresible ($\lambda \to \infty$) y flexión de vigas delgadas ($r \to \infty$): bloqueo de $Q4$; $Q4R$; $Q4RS$; $\overline{\boldsymbol{B}}$
- $Q1/E4$; $Q1/E5$ y $Q1/E7$ equivalentes en paralelogramos