Slide 1

MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS
Elasticidad lineal

Felipe Gabaldón Castillo

E.T.S. INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES y PUERTOS. UPM

Madrid, 23-30 de Noviembre de 2000

Slide 1

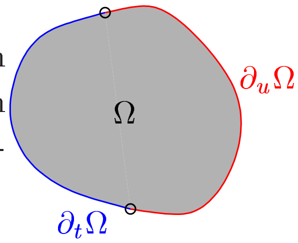
Contenido

Slide 2

Contenido

Slide 3

Formulación fuerte



Sea $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ el dominio ocupado por un sólido, cuyo contorno es $\partial\Omega = \partial_u\Omega \cup \partial_t\Omega$ con $\partial_u\Omega \cap \partial_t\Omega = \emptyset$. La formulación fuerte del problema se establece en los siguientes términos:

Dados $\boldsymbol{b} : \overline{\Omega}^n \to \mathbb{R}$, $\overline{\boldsymbol{u}} : \partial_u\Omega \to \mathbb{R}^n$, $\overline{\boldsymbol{t}} : \partial_t\Omega \to \mathbb{R}^n$, encontrar el campo de desplazamientos $u \in \mathbb{R}^n$ que cumple:

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{b} = 0 \qquad \text{en} \quad \Omega \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\sigma n} = \overline{\boldsymbol{t}} \qquad \text{en} \quad \partial_t\Omega \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \qquad \text{en} \quad \partial_u\Omega \tag{3}$$

con $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ y $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\nabla}^S \boldsymbol{u}$

Slide 4

Formulación débil

Dados $\boldsymbol{b} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ y las funciones $\overline{\boldsymbol{u}} : \partial_u\Omega \to \mathbb{R}^n$, $\overline{\boldsymbol{t}} : \partial_t\Omega \to \mathbb{R}^n$, encontrar el campo de desplazamientos $\boldsymbol{u} \in \delta \mid \forall \delta\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$ cumple:

$$\int_\Omega \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}^S \delta\boldsymbol{u} - \boldsymbol{b} \cdot \delta\boldsymbol{u} \right) d\Omega - \int_{\partial_t\Omega} \overline{\boldsymbol{t}} \cdot \delta\boldsymbol{u}\, d\Gamma = 0 \tag{4}$$

siendo:

$$\delta = \left\{ \boldsymbol{u} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \mid \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \partial_u\Omega \right\} \tag{5}$$

$$\mathcal{V} = \left\{ \delta\boldsymbol{u} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \mid \delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \partial_u\Omega \right\} \tag{6}$$

y $H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ el espacio de Sobolev de orden 1 y grado 2:

$$H^1 = \left\{ \boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^n \quad \middle| \quad \int_\Omega \|\boldsymbol{u}\|_{2,1}\, d\Omega < \infty \right\}$$

Slide 5

Formulaciones variacionales

Considerando el funcional de la energía potencial:

$$\Pi_p(\boldsymbol{u}) = \int_\Omega \left(W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}\right) d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \bar{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{u} \, d\Gamma \tag{7}$$

la ecuación (4) equivale a establecer la condición de estacionariedad del funcional (7):

$$\delta \Pi_p(\boldsymbol{u}) = 0 \tag{8}$$

- Se dice que (4) es la ecuación variacional del problema (8), y que las ecuación (1) es la ecuación de Euler-Lagrange asociada al problema variacional (8).
- Para la ley de Hooke:

$$W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \tag{9}$$

Slide 6

Formulaciones variacionales

- Existen otros principios variacionales diferentes al expresado en (8), asociado al funcional de la *energía potencial total* (7).
- Dichos principios son la base de la formulación de los denominados “elementos mixtos”.
- En general se deducen a partir de “funcionales multicampo” como, por ejemplo, el de Hu-Washizu:

$$\Pi_W(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}) = \int_\Omega \Big(W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}^S \boldsymbol{u} - \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}\Big) \, d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \bar{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{u} \, d\Gamma$$

Slide 7

Formulación de Galerkin

- Sean ν^h y δ^h aproximaciones de dimensión finita de los espacios funcionales ν y δ, respectivamente
- Se adopta la descomposición:

$$\boldsymbol{u}^h = \boldsymbol{v}^h + \boldsymbol{g}^h \tag{10}$$

con $\boldsymbol{v}^h \in \nu^h$ y $\boldsymbol{g}^h = \overline{\boldsymbol{u}}$ en $\partial_u \Omega$ ("aproximadamente")

- Dados $b : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ y las constantes $g \in \mathbb{R}$ $h \in \mathbb{R}$, encontrar el campo de desplazamientos $u^h = v^h + g^h \in \delta^h$, con $v^h \in \nu^h$, tal que $\forall w^h \in \nu^h$ se cumple:

$$\int_\Omega \left(\underbrace{\mathbf{C}\boldsymbol{\nabla}^S \boldsymbol{v}^h}_{\boldsymbol{\sigma}^h} \cdot \boldsymbol{\nabla}^S \delta\boldsymbol{u}^h - \boldsymbol{b} \cdot \delta\boldsymbol{u}^h \right) d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \overline{\boldsymbol{t}} \cdot \delta\boldsymbol{u}^h \, d\Gamma = 0 \tag{11}$$

Slide 8

Formulación de elementos finitos

- El dominio Ω se discretiza en n_{elm} elementos Ω^e:

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_{\mathrm{elm}}} \Omega^e \qquad \Omega^i \cap \Omega^j = \emptyset, \text{ si } i \neq j \tag{12}$$

- El elemento Ω^e se transforma en un "cubo unitario"

$$\Box = \underbrace{[-1, 1] \times \cdots \times [-1, 1]}_{n_{\mathrm{dim}}}$$

definido en el espacio isoparamétrico de coordenadas $\{\boldsymbol{\xi}\}$:

$$\boldsymbol{\phi} : \boldsymbol{\xi} \in \Box \to \boldsymbol{x} \in \Omega^e; \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{A=1}^{n^e_{\mathrm{nod}}} \boldsymbol{x}_A N_A(\boldsymbol{\xi}) \tag{13}$$

siendo $\boldsymbol{x}_A$ las coordenadas de los nodos del elemento e

Slide 9

Formulación de elementos finitos

- Los subespacios de dimensión finita δ^h y $\mathcal{V}^h$ se definen mediante unas funciones de interpolación $N_A,\ A = 1 \dots n_{\mathrm{nod}}$ (polinómicas), que se denominan "funciones de forma"

$$\delta^h = \left\{ \boldsymbol{u}^h \in \delta \mid \boldsymbol{u}^h = \sum_{A=1}^{n_{\mathrm{nod}}} \boldsymbol{u}_A N_A(\boldsymbol{\xi}); \quad \forall \boldsymbol{x} \in \partial_u \Omega \right\} \tag{14}$$

$$\mathcal{V}^h = \left\{ \delta\boldsymbol{u}^h \in \mathcal{V} \mid \delta\boldsymbol{u}^h = 0; \quad \forall \boldsymbol{x} \in \partial_u \Omega;\ \delta\boldsymbol{u}^h = \sum_{A=1}^{n_{\mathrm{nod}}} \delta\boldsymbol{u}_A N_A(\boldsymbol{\xi}); \quad \right\} \tag{15}$$

Slide 10

Formulación matricial

- Interpolación del campo de desplazamientos

Si se emplea una formulación isoparamétrica que interpola los desplazamientos con la misma interpolación que las coordenadas (13):

$$\boldsymbol{u}_h^e = \sum_{A=1}^{n_{\mathrm{nod}}^e} \boldsymbol{d}_A^e N_A(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}^{eT} \boldsymbol{d}^e \tag{16}$$

siendo $\boldsymbol{d}_A^e$ el vector de desplazamientos nodales del elemento e y $\mathbf{N}^e$ la matriz de funciones de forma del elemento.

Slide 11

Formulación matricial

- Interpolación del campo de deformaciones

  Con la notación en que las tensiones y deformaciones se expresan en forma de vector (por ejemplo en 2D: $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, 2\varepsilon_{xy})^T$) y derivando (16), la interpolación del campo de deformaciones se expresa:

$$(\nabla^S \boldsymbol{u}_h^e)_{ij} = \frac{1}{2}\left(N_{A,i} d_{Aj} + N_{A,j} d_{Ai}\right) \Rightarrow \boldsymbol{\nabla}^S \boldsymbol{u}_h^e = \mathbf{B}\boldsymbol{d}^e \qquad (17)$$

Slide 12

Formulación matricial

Sustituyendo (16) y (17) en (11) e imponiendo que los desplazamientos virtuales $\delta \boldsymbol{u}$ son arbitrarios, después de operar se obtiene:

$$\boldsymbol{R} \stackrel{\text{def}}{=} \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \left[\boldsymbol{f}^{e,\text{ext}} - \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^h(\boldsymbol{\varepsilon})\, d\Omega \right] = \mathbf{0} \qquad (18)$$

donde $\mathsf{A}[\cdot]$ es el operador de ensamblaje y $\boldsymbol{f}^{e,\text{ext}}$ es el vector de fuerzas externas convencional que se obtiene a partir de la expresión (11):

$$\boldsymbol{f}^{e,\text{ext}} = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \boldsymbol{b} d\Omega + \int_{\partial_t \Omega^e} \mathbf{N}^T \bar{\boldsymbol{t}} d\Gamma \qquad (19)$$

Slide 13

Formulación matricial

OBSERVACIONES:

- La ecuación (18) está planteada en forma residual (anulando la diferencia entre las fuerzas externas y las fuerzas internas), que es la adecuada para problemas no lineales.
- En lo sucesivo se considerará el caso de la elasticidad lineal, en el que si denominamos $\mathbf{C}^e$ a la matriz de módulos elásticos (o matriz constitutiva), resulta:

$$\boldsymbol{\sigma}^h(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{C}^e \mathbf{B} \boldsymbol{d}^e \tag{20}$$

entonces la ecuación (18) se expresa:

$$\mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{\mathrm{elm}}} \left[\left(\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^e \mathbf{B} \, d\Omega \right) \right] \boldsymbol{d}^e = \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{\mathrm{elm}}} \boldsymbol{f}^{e,\mathrm{ext}} \tag{21}$$

Slide 14

Formulación matricial

- La matriz de rigidez elemental se define como:

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{C}^e \mathbf{B} \, d\Omega \tag{22}$$

- Ensamblando los vectores de fuerzas elementales y las matrices de rigidez elementales:

$$\boldsymbol{f} = \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{\mathrm{elm}}} \boldsymbol{f}^{e,\mathrm{ext}} \tag{23}$$

$$\mathbf{K} = \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{\mathrm{elm}}} \mathbf{K}^e \tag{24}$$

el sistema (21) se expresa:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{f} \Rightarrow \qquad \boldsymbol{d} = \mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{f} \tag{25}$$

Slide 15

Elasticidad 2D. Deformación plana

- La condición de deformación plana es ($\varepsilon_{zz} = 0$)

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{array} \right\} = \left(\begin{array}{ccc} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{array} \right\} \tag{26}$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \tag{27}$$

siendo λ y μ los coeficientes de Lamé:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{28}$$

Slide 16

Elasticidad 2D. Tensión plana

- La condición de tensión plana es ($\sigma_{zz} = 0$)

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{array} \right\} = \left(\begin{array}{ccc} \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} & \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} & 0 \\ \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} & \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{array} \right\} \tag{29}$$

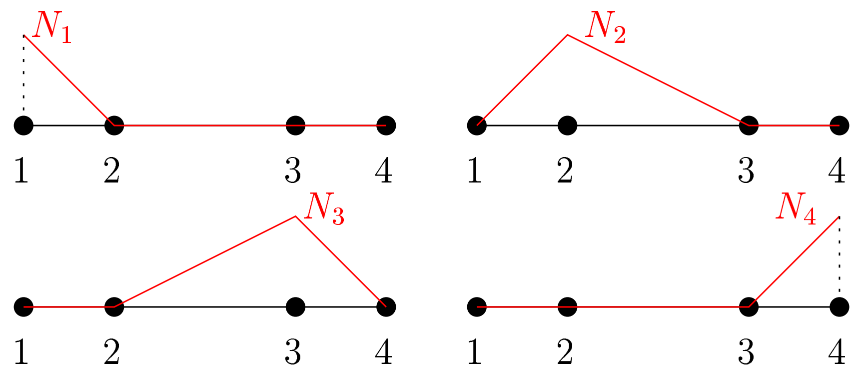
$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \tag{30}$$

Slide 17

Elementos 1D

- Funciones de interpolación lineal

$$N_A(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{A-1}}{h_{A-1}} & x_{A-1} < x < x_A \\ \frac{x_{A+1} - x}{h_A} & x_A < x < x_{A+1} \end{cases}$$



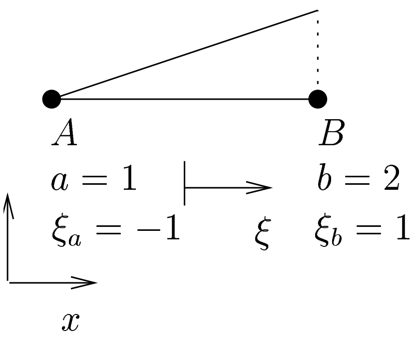
Slide 18

Elementos 1D

- Referencias global y local

$$N_B(x) = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{x - x_A}{h^e} \tag{31}$$

$$N_b(\xi) = \frac{1 + \xi_b \xi}{2} \tag{32}$$



Slide 19

Elementos 1D

- Interpolación del campo de desplazamientos

$$u^h(x) = u_A N_A(x) + u_B N_B(x) \tag{33}$$

$$u^h(\xi) = u_1 N_1(\xi) + u_2 N_2(\xi) \tag{34}$$

- Relación entre coordenadas locales y globales

$$\xi(x) = \frac{2x - x_A - x_B}{h^e} \tag{35}$$

$$x^e(\xi) = \frac{h^e \xi + x_A + x_B}{2} = \sum_{a=1}^{2} N_a(\xi) x_a^e = \frac{1}{2}\left((1-\xi)x_A + (1+\xi)x_B\right) \tag{36}$$

Slide 20

Elementos 1D

- Integración en coordenadas locales

$$K^e_{ab} = \int_{-1}^{+1} N_{a,\xi}(\xi) E N_{b,\xi}(\xi) \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi}} d\xi \tag{37}$$

sustituyendo:

$$N_{a,\xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{1}{2}(1+\xi_a \xi)\right] = \frac{1}{2}\xi_a \tag{38}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{h^e \xi + x_A + x_B}{2}\right] = \frac{h^e}{2} \tag{39}$$

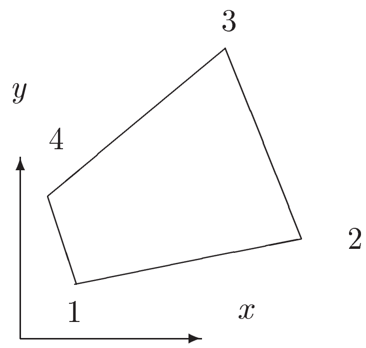
en (37), resulta:

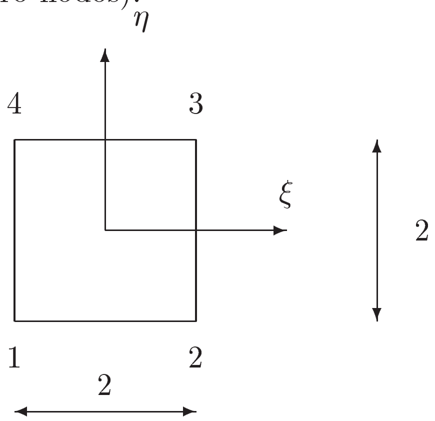
$$\mathbf{K}^e = \frac{E}{h^e}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{40}$$

Slide 21

Elementos isoparamétricos

- Elemento Q1 (cuadrilátero de cuatro nodos):





Slide 22

Elementos isoparamétricos

- Interpolación:

$$x(\xi,\eta)=\sum_{I=1}^{4} x_I N_I \qquad y(\xi,\eta)=\sum_{I=1}^{4} y_I N_I$$

$$u(\xi,\eta)=\sum_{I=1}^{4} u_I N_I \qquad v(\xi,\eta)=\sum_{I=1}^{4} v_I N_I$$

con: $N(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi_I\xi)(1+\eta_I\eta)$

- Propiedades de las funciones de forma (condiciones suficientes para la convergencia):

1. son continuas y derivables en Ω_e
2. son continuas en la frontera de los elementos
3. complitud: $u=c_0+c_1x+c_2y$

Slide 23

Elementos isoparamétricos

- Jacobiano de la transformación isoparamétrica y derivadas de las funciones de forma.

$$\boldsymbol{J}(\xi,\eta)=\begin{pmatrix} x_{,\xi} & x_{,\eta} \\ y_{,\xi} & y_{,\eta} \end{pmatrix}$$

siendo:

$$x_{,\xi}=\sum_{I=1}^{4} x_I^e N_{I,\xi} \qquad x_{,\eta}=\sum_{I=1}^{4} x_I^e N_{I,\eta}$$

$$y_{,\xi}=\sum_{I=1}^{4} y_I^e N_{I,\xi} \qquad y_{,\eta}=\sum_{I=1}^{4} y_I^e N_{I,\eta}$$

Slide 24

Elementos isoparamétricos

- Cálculo de las derivadas de las funciones de forma,:

$$\boldsymbol{J}^{-1}(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \xi_{,x} & \xi_{,y} \\ \eta_{,x} & \eta_{,y} \end{pmatrix} = \frac{1}{j}\begin{pmatrix} y_{,\eta} & -x_{,\eta} \\ -y_{,\xi} & x_{,\xi} \end{pmatrix} ;\ j = \det\left[J(\xi,\eta)\right]$$

$$N_{I,x} = N_{I,\xi}\xi_{,x} + N_{I,\eta}\eta_{,x}$$
$$N_{I,y} = N_{I,\xi}\xi_{,y} + N_{I,\eta}\eta_{,y}$$

- Integración numérica

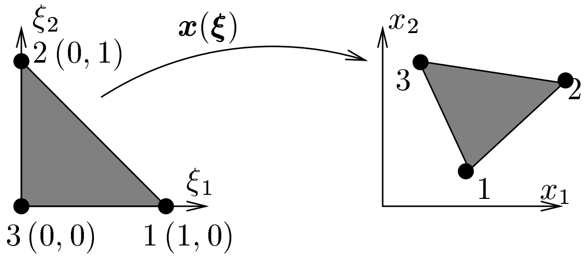
  Para la integración numérica se pueden emplear diversos tipos de cuadraturas:

  1. Regla trapezoidal
  2. Fórmula de Simpson
  3. Cuadratura de Gauss

Slide 25

Elementos isoparamétricos

- Elemento CST



  - Las funciones de forma son planos:

$$N_1^e = \xi_1$$
$$N_2^e = \xi_2$$
$$N_3^e = \xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$$

Slide 26

Elementos isoparamétricos

- Elemento CST
  - Integración de funciones

$$\int_{\Omega^e} f(\boldsymbol{x}) d\Omega = \sum_{l=1}^{n_{\text{int}}} w_l f(\boldsymbol{x}(\overline{\boldsymbol{\xi}}_l)) \det \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}(\overline{\boldsymbol{\xi}}_l)}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right)$$

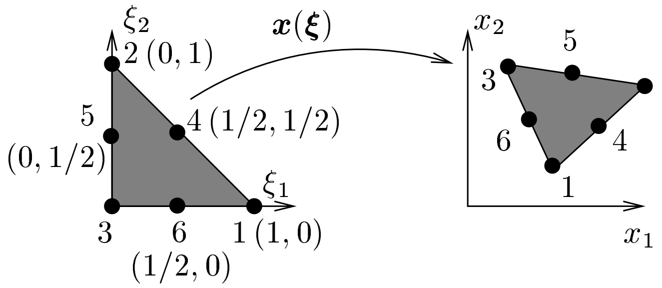
  - Matriz jacobiana

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \end{pmatrix}$$

Slide 27

Elementos isoparamétricos

- Elemento LST



  - Funciones de forma:

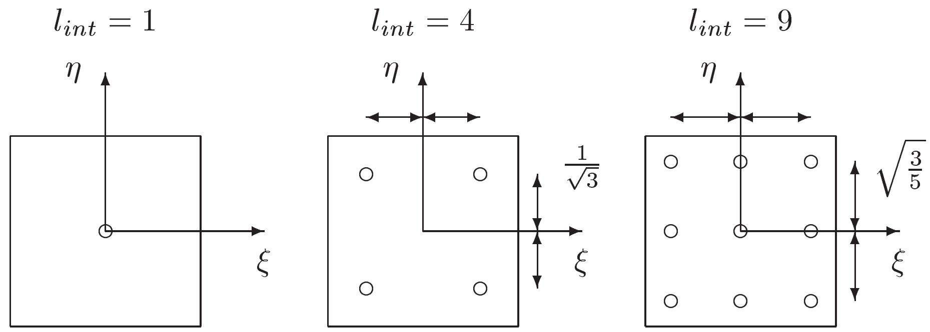
$$N_1^e = 2\xi_1 \qquad N_4^e = 4\xi_1\xi_2$$
$$N_2^e = 2\xi_2 \qquad N_5^e = 4\xi_2\xi_3$$
$$N_3^e = 2\xi_3 \qquad N_6^e = 4\xi_3\xi_1$$

Slide 28

Integración numérica

- Cuadratura de Gauss:

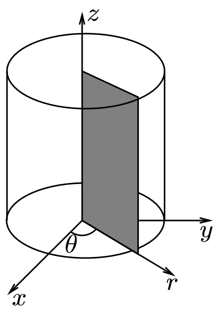
$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g(\xi,\eta)d\xi d\eta = \sum_{l=1}^{n_{int}} W_l \; g(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)$$



Slide 29

Elasticidad 2D. Problemas axilsimétricos

- Se expresa en términos de las coordenadas cilíndricas r (radial), z (axial) y θ (circunferencial).



- Condición de simetría axial: todas las variables son independientes de θ y además: u_θ=0, $\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{z\theta} = 0$
- En todos los integrandos hay que considerar un factor de $2\pi r$

Slide 30

Elasticidad 2D. Problemas axilsimétricos

- Relación tensión - deformación

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_{rr}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{rz}\\ \sigma_{\theta\theta}\end{array}\right\} = \begin{pmatrix}\lambda+2\mu & \lambda & 0 & \lambda\\ \lambda & \lambda+2\mu & 0 & \lambda\\ 0 & 0 & \mu & 0\\ \lambda & \lambda & 0 & \lambda+2\mu\end{pmatrix}\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{rr}\\ \varepsilon_{zz}\\ \varepsilon_{rz}\\ \varepsilon_{\theta\theta}\end{array}\right\} \tag{41}$$

- La matriz **B** (de interpolación del campo de deformaciones) es:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix}N_{a,r} & 0\\ 0 & N_{a,z}\\ N_{a,z} & N_{a,r}\\ \frac{N_a}{r} & 0\end{pmatrix} \qquad a = 1\ldots n_{\text{nen}} \tag{42}$$

Slide 31

Elasticidad 3D

- Relación tensión - deformación

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{yz}\end{array}\right\} = \begin{pmatrix}\lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0\\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0\\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu\end{pmatrix}\left\{\begin{array}{c}\varepsilon xx\\ \varepsilon yy\\ \varepsilon zz\\ \varepsilon xy\\ \varepsilon xz\\ \varepsilon yz\end{array}\right\} \tag{43}$$

Slide 32

Elasticidad 3D

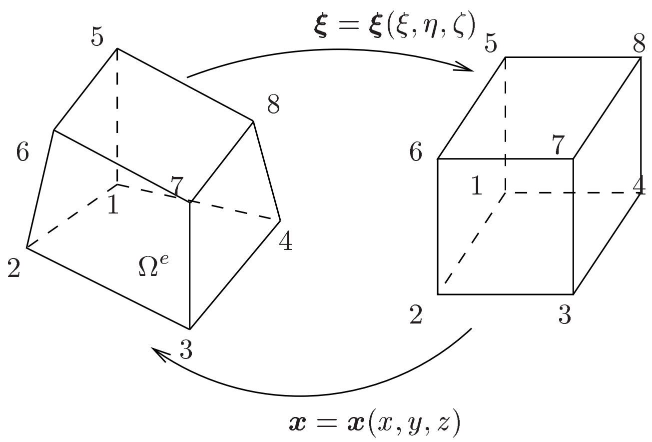
- Interpolación del campo de deformaciones (matriz **B**)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} N_{a,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{a,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{a,z} \\ N_{a,y} & N_{a,x} & 0 \\ N_{a,z} & 0 & N_{a,x} \\ 0 & N_{a,z} & N_{a,y} \end{pmatrix} \qquad a = 1 \dots n_{\text{nen}} \tag{44}$$

Slide 33

Elementos 3D isoparamétricos

Hexaedro trilineal



$$N_a(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi_a \xi)(1 + \eta_a \eta)(1 + \zeta_a \zeta)$$