Slide 1

MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS
Introducción. Estructuras de barras articuladas

Felipe Gabaldón Castillo

E.T.S. INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES y PUERTOS. UPM

16 de Noviembre de 2000

Slide 1

Contenido

Slide 2

Introducción

- El Método de los Elementos Finitos (M.E.F.) es un procedimiento numérico para resolver ecuaciones diferenciales de manera aproximada
- El dominio en el que está definido el problema se divide en "subdominios" denominados ELEMENTOS FINITOS
- El conjunto de elementos finitos que discretizan el dominio se denomina MALLA
- Se abordan problemas de contorno (estática) y problemas de valor inicial (dinámica)

Slide 3

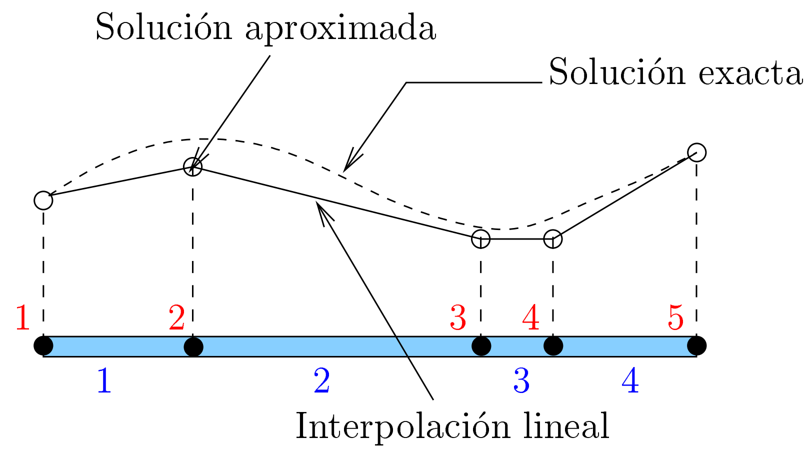
Introducción

- La variable continua queda definida por sus valores aproximados en puntos discretos, denominados NODOS
- La aproximación de esta variable en puntos distintos de los nodos (dentro de cada elemento) se interpola mediante FUNCIONES DE FORMA (generalmente polinómicas)
- Los GRADOS DE LIBERTAD son las variables definidas en los nodos (temperaturas, desplazamientos, etc)

Slide 4

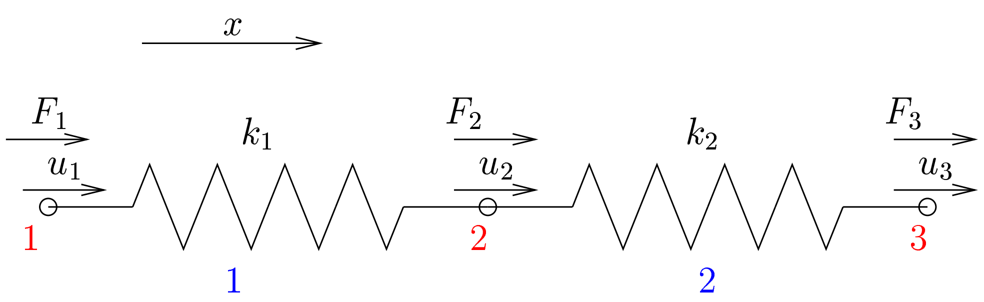
Introducción

Ejemplo: distribución de temperaturas en una barra

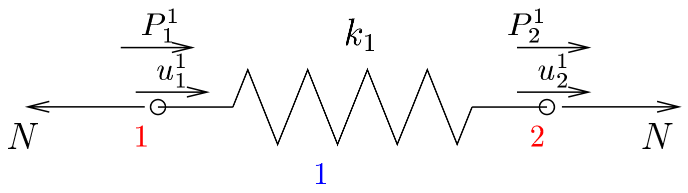


Slide 5

Método directo: Formulación 1D



- Considerando sólo un elemento:



Slide 6

Método directo: Formulación 1D

- Ley constitutiva (Hooke)

$$N = k(u_2 - u_1)$$

- Equilibrio en los nodos del elemento 1:

$$P_1^1 = -N = -k_1(u_2^1 - u_1^1)$$

$$P_2^1 = N = k_1(u_2^1 - u_1^1)$$

$$\begin{pmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \end{Bmatrix}$$

Slide 7

Método directo: Formulación 1D

- La igualdad anterior se puede generalizar para un elemento e, expresándose:

$$\boldsymbol{K}^e \boldsymbol{d}^e = \boldsymbol{P}^e$$

donde:

$\boldsymbol{K}^e$: Matriz de rigidez del elemento e (simétrica y def. positiva)

$\boldsymbol{d}^e$: Vector elemental de desplazamientos (nodales)

$\boldsymbol{P}^e$: Vector elemental de fuerzas

Slide 8

Método directo: Formulación 1D

- Para el elemento 2

$$\begin{pmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1^2 \\ P_2^2 \end{Bmatrix}$$

- Considerando:

$$\begin{array}{lll} u_1 = u_1^1 & u_2 = u_2^1 = u_1^2 & u_3 = u_2^2 \\ F_1 = P_1^1 & F_2 = P_2^1 + P_1^2 & F_3 = P_2^2 \end{array}$$

los sistemas matriciales expresados anteriormente para los elementos 1 y 2, se ensamblan mediante la suma para obtener el siguiente sistema global:

Slide 9

Método directo: Formulación 1D

$$\begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

- $\det(\boldsymbol{K}) = 0 \Rightarrow$ existen desplazamientos de sólido rígido (el sistema estructural carece de la sustentación suficiente)
- Para evitarlo es suficiente imponer $u_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$u_1 = 0 \qquad \text{(c.c. de tipo esencial)}$$

Slide 10

Método directo: Estructuras en 2D y 3D

METODOLOGÍA DE LA FORMULACIÓN

1. Ecuaciones de equilibrio en cada elemento (propiedades constitutivas y condiciones de equilibrio)
2. Compatibilidad (topología y conectividad)
3. Equilibrio de la estructura completa
4. Condiciones de contorno
5. Solución del sistema completo de ecuaciones

Slide 11

Método directo: Estructuras en 2D y 3D

- Ecuaciones constitutivas

$$\sigma = E\varepsilon \qquad \text{siendo } \sigma = \frac{N}{A}$$

- Ecuaciones de compatibilidad

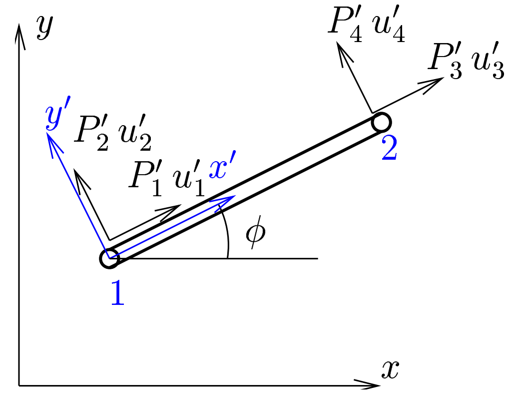
$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

Para una barra homogénea, con cargas únicamente en nodos:

$$\varepsilon = \frac{u_2 - u_1}{L} \Rightarrow \quad N = \underbrace{\frac{EA}{L}}_{k}(u_2 - u_1)$$

Slide 12

Método directo: Estructuras en 2D y 3D



Slide 13

Método directo: Estructuras en 2D y 3D

- Equilibrio del elemento (en ejes locales)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{(\boldsymbol{K}^e)'} \begin{Bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \\ u_4' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \\ P_4' \end{Bmatrix}$$

- Relación entre ejes locales y ejes globales

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \operatorname{sen}\phi \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{L}^T} \begin{Bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{Bmatrix}; \qquad \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{L} = \boldsymbol{1}$$

Slide 14

Método directo: Estructuras en 2D y 3D

- Equilibrio del elemento (en ejes globales)

$$\boldsymbol{d}^e = \boldsymbol{L}^T(\boldsymbol{d}^e)'$$
$$\boldsymbol{f}^e = \boldsymbol{L}^T(\boldsymbol{f}^e)'$$

resultando:

$$\boldsymbol{K}^e = \boldsymbol{L}^T(\boldsymbol{K}^e)'\boldsymbol{L}$$
$$= \begin{pmatrix} k\cos^2\phi & k\operatorname{sen}\phi\cos\phi & -k\cos^2\phi & -k\operatorname{sen}\phi\cos\phi \\ k\operatorname{sen}\phi\cos\phi & k\operatorname{sen}^2\phi & -k\operatorname{sen}\phi\cos\phi & -k\operatorname{sen}^2\phi \\ -k\cos^2\phi & -k\operatorname{sen}\phi\cos\phi & k\cos^2\phi & k\operatorname{sen}\phi\cos\phi \\ -k\operatorname{sen}\phi\cos\phi & -k\operatorname{sen}^2\phi & k\operatorname{sen}\phi\cos\phi & k\operatorname{sen}^2\phi \end{pmatrix}$$

- Ensamble

Slide 15

Método directo: Estructuras en 2D y 3D

- Solución del sistema de ecuaciones:

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{f} \Rightarrow \qquad \boldsymbol{d} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}$$

- Metodología: Eliminación de Gauss

  Partiendo del sistema global de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix}$$

Slide 16

Método directo: Estructuras en 2D y 3D

- Mediante operaciones con pivotes en filas, se llega al sistema:

$$\begin{pmatrix} k'_{11} & k'_{12} & \dots & k'_{1n} \\ 0 & k'_{22} & \dots & k'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k'_{nn} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ \vdots \\ d'_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ \vdots \\ f'_n \end{Bmatrix}$$

  cuya solución es:

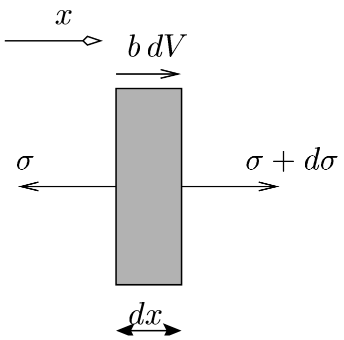
$$d'_n = \frac{f'_n}{k'_{n,n}}; \quad d'_{n-1} = \frac{f'_{n-1} - k'_{n-1,n} d'_n}{k'_{n-1,n-1}}; \quad \dots \quad d'_1 \quad = \frac{f'_1 - \sum_{i=2}^{n} k'_{1,i} d'_i}{k'_{1,1}}$$

Slide 17

Formulación mediante elementos finitos

Las ecuaciones que, de acuerdo con la mecánica de medios continuos, rigen el comportamiento de la barra articulada son las siguientes:

$$\frac{d\sigma}{dx} + b = 0$$
$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$
$$\sigma = E\varepsilon$$
$$\sigma(0) = h$$
$$u(L) = g$$



Las *condiciones de contorno naturales* se expresan en términos de las derivadas de u. Las *condiciones de contorno esenciales* se expresan directamente en términos de u.

Slide 18

Formulación mediante elementos finitos

- Formulación fuerte

  Sea $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ la parte del eje local x ocupado por la barra articulada ($\Omega = (0, L)$, $\overline{\Omega} = [0, L]$ y $\partial\Omega$ el contorno de la barra: $x = 0$ y $x = L$). La formulación fuerte del problema se establece en los siguientes términos:

  Dados $b : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ y las constantes $g \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$, encontrar el campo de desplazamientos $u \in \mathbb{R}$ que cumple:

$$E\frac{d^2u}{dx^2} + b = 0 \text{ en } \Omega$$
$$u(L) = g$$
$$E\frac{du}{dx} = -h$$

Slide 19

Formulación mediante elementos finitos

- Formulación débil

  Dados $b : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ y las constantes $g \in \mathbb{R}$ $h \in \mathbb{R}$, encontrar el campo de desplazamientos $u \in \delta \mid \forall w \in \nu$ cumple:

  $$\int_0^L E \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} \, dx = \int_0^L wb \, dx + w(0)h$$

  donde:

  $$\nu = \left\{w \mid w \in H^1, \; w(L) = 0\right\}; \quad \delta = \left\{u \mid u \in H^1, \; u(L) = g\right\}$$

  siendo H^1 el espacio de Sobolev de orden 1 y grado 2:

  $$H^1 = \left\{ u(x) : \Omega \to \mathbb{R} \quad \mid \quad \int_0^L \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx < \infty \right\}$$

Slide 20

Formulación mediante elementos finitos

- Método de Galerkin
  - La formulación de Galerkin del problema de contorno es el punto de partida del método de elementos finitos, que permite obtener una solución aproximada de la formulación débil descrita anteriormente.
  - El primer paso del desarrollo del método es la construcción de los subespacios ν^h y δ^h, que son aproximaciones de dimensión finita de los espacios funcionales ν y δ, respectivamente:

    $$\nu^h \subset \nu \qquad (w^h \in \nu^h \Rightarrow w^h \in \nu)$$
    $$\delta^h \subset \delta \qquad (u^h \in \delta^h \Rightarrow u^h \in \delta)$$

Formulación mediante elementos finitos

Slide 21

- Método de Galerkin

El método de Galerkin (o Bubnov-Galerkin) establece que los elementos $u^h \in \delta^h$ se construyen a partir de los elementos $v^h \in \nu^h$ mediante:

$$u^h = v^h + g^h$$

donde g^h es una función dada que verifica $g^h(L) = g$

La idea clave del método de Galerkin es que los espacios ν^h y δ^h contienen las mismas funciones con la única excepción de g^h.

Formulación mediante elementos finitos

Slide 22

- Método de Galerkin

La aproximación de Galerkin del problema de contorno se obtiene expresando la formulación débil en términos de los subespacios de dimensión finita ν^h y δ^h:

$$\int_0^L E\frac{dw^h}{dx}\frac{d(v^h+g^h)}{dx}\,dx = \int_0^L w^h b\,dx + w^h(0)h$$

y operando:

$$\int_0^L E\frac{dw^h}{dx}\frac{dv^h}{dx}\,dx = \int_0^L w^h b\,dx + w^h(0)h - \int_0^L E\frac{dw^h}{dx}\frac{dg^h}{dx}\,dx$$

Slide 23

Formulación mediante elementos finitos

- Formulación de Galerkin

  Dados $b : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ y las constantes $g \in \mathbb{R}$ $h \in \mathbb{R}$, encontrar el campo de desplazamientos $u^h = v^h + g^h \in \delta^h$, con $v^h \in \nu^h$, tal que $\forall w^h \in \nu^h$ se cumple:

$$\int_0^L E \frac{dw^h}{dx} \frac{dv^h}{dx}\, dx = \int_0^L w^h b\, dx + w^h(0) h - \int_0^L E \frac{dw^h}{dx} \frac{dg^h}{dx}\, dx$$

  En el método de Galerkin las funciones v^h w^h pertenecen al mismo subespacio ν^h. Existen otros métodos, denominados "*métodos de Petrov-Galerkin*", en los cuales las funciones v^h no pertenecen a ν^h. Dichos métodos se emplean principalmente en el contexto de la Mecánica de Fluidos Computacional

Slide 24

Formulación mediante elementos finitos

- Formulación matricial

  Con las expresiones:

$$w^h = \sum_{A=1}^{n} c_A N_A \qquad u^h = v^h + g^h = \sum_{A=1}^{n} d_A N_A + g N_{n+1}$$

  la formulación de Galerkin resulta:

$$\int_0^L E \left(\sum_{A=1}^{n} c_A \frac{dN_A}{dx} \right) \left(\sum_{B=1}^{n} d_B \frac{dN_B}{dx} \right) dx = \int_0^L \left(\sum_{A=1}^{n} c_A N_A \right) b\, dx$$
$$+ \left(\sum_{A=1}^{n} c_A N_A(0) \right) h - \int_0^L E \left(\sum_{A=1}^{n} c_A \frac{dN_A}{dx} \right) g \frac{dN_{n+1}}{dx}\, dx$$

Slide 25

Formulación mediante elementos finitos

- Formulación matricial Teniendo en cuenta que los coeficientes c_A son arbitrarios, se obtiene:

$$\sum_{A=1}^{n} c_A G_A = 0$$

siendo:

$$G_A = \sum_{B=1}^{n} \left(\int_0^L E \frac{dN_A}{dx} \frac{dN_B}{dx}\, dx \right) d_B - \int_0^L N_A b\, dx - N_A(0) h + \int_0^L E \frac{dN_A}{dx} g \frac{dN_{n+1}}{dx}\, dx$$

Slide 26

Formulación mediante elementos finitos

- Formulación matricial Finalmente, se puede poner:

$$\boldsymbol{K d} = \boldsymbol{f}$$

siendo:

$$K_{AB} = \int_0^L E \frac{dN_A}{dx} \frac{dN_B}{dx}\, dx$$

$$f_A = \int_0^L N_A b\, dx + N_A(0) h - \int_0^L E \frac{dN_A}{dx} g \frac{dN_{n+1}}{dx}\, dx$$