Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE (18 de Noviembre de 1997)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

El movimiento de un disco de radio r es tal que:

1. El centro describe una hélice, siendo sus ecuaciones horarias:

$$\begin{aligned} x &= R\cos\omega t \\ y &= R\,\mathrm{sen}\,\omega t \\ z &= R\omega t \end{aligned}$$

2. El plano del disco es en todo momento perpendicular al versor tangente a la hélice.
3. El disco gira alrededor de un eje perpendicular al mismo y que pasa por su centro, con velocidad angular ω constante.

En el instante en que el centro del disco se encuentra en el plano Oyz, se pide:

1. Velocidad y aceleración del centro C del disco.
2. Velocidad angular del disco.
3. Definir completamente el eje del movimiento helicoidal tangente, hallando la velocidad de sus puntos.
4. Aceleración angular del disco.
5. Aceleración del punto del disco de mayor coordenada z.

---

1. La velocidad del centro C del disco se obtiene simplemente derivando sus ecuaciones horarias:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -R\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t \\ \dot{y} &= R\omega\cos\omega t \\ \dot{z} &= R\omega \end{aligned}$$

y particularizando para $\omega t = \pi/2$ resulta:

$$\mathbf{v}_C = -R\omega\mathbf{i} + R\omega\mathbf{k} \tag{1}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -R\omega^2\cos\omega t \\ \ddot{y} &= -R\omega^2\,\mathrm{sen}\,\omega t \\ \ddot{z} &= 0 \end{aligned}$$

de donde,

$$\mathbf{a}_C = -R\omega^2\mathbf{j} \tag{2}$$

2. La velocidad angular del disco se puede expresar como la suma de dos componentes: una según el eje Oz y otra según la tangente a la hélice:

$$\mathbf{\Omega} = \omega\mathbf{k} + \omega\mathbf{t}$$

Sustituyendo la expresión del versor tangente:

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\operatorname{sen}\omega t\mathbf{i} + +\cos\omega t\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$$

resulta:

$$\mathbf{\Omega} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \left(-\operatorname{sen}\omega t\mathbf{i} + \cos\omega t\mathbf{j} + (\sqrt{2}+1)\mathbf{k}\right) \tag{3}$$

Particularizando $\omega t = \pi/2$ en (3) se obtiene la velocidad angular pedida:

$$\mathbf{\Omega} = -\frac{\omega}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\omega\mathbf{k} \tag{4}$$

3. Sea P un punto genérico del eje del movimiento helicoidal tangente. Se verifica que la velocidad de este punto es paralela a $\mathbf{\Omega}$:

$$\mathbf{v}_P = \lambda\left(-\frac{\omega}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\omega\mathbf{k}\right) \tag{5}$$

Las velocidades de $P(x, y, z)$ y $C(0, R, \pi R/2)$ se relacionan mediante la expresión del campo de velocidades del sólido rígido:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_C + \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{CP} \tag{6}$$

Sustituyendo en (6) las coordenadas de $\mathbf{CP}$ y los resultados (1), (4) y (5), se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} &= -R - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(y - R) && (7)\\ 0 &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)x + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(z - \frac{\pi R}{2}\right) && (8)\\ \lambda\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= R - \frac{1}{\sqrt{2}}(y - R) && (9) \end{aligned}$$

que tienen por resultado:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{z - \frac{\pi R}{2}}{1 + \sqrt{2}}\\ y &= \frac{R}{\sqrt{2}}\\ \lambda &= \frac{R}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Por tanto, el eje del movimiento helicoidal tangente es la recta que pasa por el punto $(0, R/\sqrt{2}, \pi R/2)$ y es paralela a $\mathbf{\Omega}$. La velocidad de los puntos del eje es:

$$\mathbf{v}_{\min} = \lambda\mathbf{\Omega} = \frac{R\omega}{2}\left(-\mathbf{i} + (\sqrt{2}+1)\mathbf{k}\right)$$

4. La aceleración angular del disco se obtiene derivando (3):

$$\dot{\mathbf{\Omega}} = \frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} = -\frac{\omega^2}{\sqrt{2}}(\cos\omega t\mathbf{i} + \operatorname{sen}\omega t\mathbf{j})$$

y particularizando para $\omega t = \pi/2$:

$$\dot{\mathbf{\Omega}} = -\frac{\omega^2}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

5. Sea H el punto de mayor coordenada Z. El versor tangente a la hélice en la posición pedida es:

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i} + \mathbf{k})$$

Por tanto, el vector que une el centro del disco con H es:

$$\mathbf{CH} = \frac{\sqrt{2}r}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{k})$$

La aceleración de H se obtiene empleando la expresión del campo de aceleraciones del sólido rígido:

$$\mathbf{a}_H = \mathbf{a}_C + \dot{\mathbf{\Omega}} \wedge \mathbf{CH} + \mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{CH}) \tag{10}$$

Sustituyendo los valores ya calculados de $\mathbf{a}_C$, $\dot{\mathbf{\Omega}}$, $\mathbf{CH}$ y $\mathbf{\Omega}$ en (10), resulta:

$$\mathbf{a}_H = (1 + \sqrt{2})\omega^2 r\mathbf{i} - \omega^2 R\mathbf{j} + \omega^2 r\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\mathbf{k} \tag{11}$$