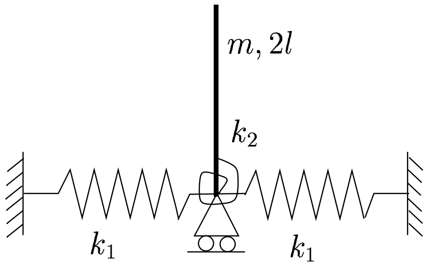
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE (28 de Abril de 1998)

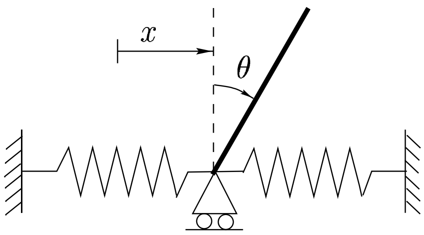
Apellidos *Nombre* *Nº* *Grupo*

Una barra homogénea de masa m y longitud $2l$ se mueve en todo momento en un plano vertical de forma que su extremo inferior articulado se mueve según una recta horizontal, y se encuentra sujeto a dos puntos fijos mediante dos resortes iguales de constante elástica $k_1 = \frac{3mg}{5l}$ cada uno. Además, existe un muelle de torsión de constante $k_2 = \frac{3mgl}{2}$ tal que ejerce momento nulo sobre la barra cuando ésta se encuentra en posición vertical (posición de equilibrio estable), tal y como muestra la figura adjunta. Se pide:



1. Expresión de la Lagrangiana;
2. Ecuaciones diferenciales del movimiento;
3. Ecuaciones diferenciales linealizadas para pequeños desplazamientos alrededor de la posición de equilibrio estable;
4. Frecuencias propias;
5. Modos propios de vibración;
6. Coordenadas normales en función de las coordenadas geométricas;
7. Resolución de las ecuaciones linealizadas suponiendo que el sistema parte del reposo con una inclinación de la barra de 30° respecto de la vertical, y el extremo inferior en la posición de equilibrio determinada por los muelles horizontales.

1.- Tomamos como coordenadas el desplazamiento de la base de la varilla respecto de la posición de equilibrio de los muelles (x) y el ángulo girado en sentido de las agujas del reloj (θ).
La expresión de la Lagrangiana es



$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m(2l)^2\right)\dot{\theta}^2 - \left(mgl\cos\theta + 2\frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2\theta^2\right) \\ &= m\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{2}{3}l^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta\right) - mgl\cos\theta - \frac{3}{4}mgl\theta^2 - \frac{3}{5}\frac{mg}{l}x^2 \qquad (1) \end{aligned}$$

2.- Las ecuaciones de Lagrange que resultan son

$$m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta + \frac{6}{5}\frac{mg}{l}x = 0 \tag{2}$$

$$m\ddot{x}l\cos\theta + \frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta} - mgl\operatorname{sen}\theta + \frac{3}{2}mgl\theta = 0 \tag{3}$$

3.- La posición $(x, \theta) = (0, 0)$ es de equilibrio. Podemos comprobar además que es estable ya que el potencial tiene allí un mínimo local. Para demostrarlo obtenemos la matriz de derivadas segundas del potencial (Hessiano):

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5}mg/l & 0 \\ 0 & -mgl\cos\theta + \frac{3}{2}mgl \end{pmatrix}, \tag{4}$$

que particularizada en $(0, 0)$ es

$$\mathbf{H}|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5}mg/l & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mgl \end{pmatrix}, \tag{5}$$

matriz que es definida positiva como resulta obvio. Nótese que si el valor del resorte k_2 hubiera sido más pequeño ($k_2 < mgl$) el equilibrio habría sido inestable por lo que no se producirían pequeñas oscilaciones.

Linealizando las ecuaciones (2, 3) para valores pequeños de $(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})$ se obtiene

$$m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + \frac{6}{5}\frac{mg}{l}x = 0 \tag{6}$$

$$m\ddot{x}l + \frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}mgl\theta = 0 \tag{7}$$

Estas ecuaciones quedan resumidas en la ecuación matricial

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{8}$$

donde

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & ml \\ ml & \frac{4}{3}ml^2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5}mg/l & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mgl \end{pmatrix}. \tag{9}$$

4.- La matriz característica del problema de autovalores es

$$\begin{pmatrix} \frac{6}{5}mg/l - \lambda m & -\lambda ml \\ -\lambda ml & \frac{1}{2}mgl - \lambda\frac{4}{3}ml^2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

cuyo determinante igual a cero nos da la ecuación característica,

$$\frac{1}{3}\lambda^2 - \frac{21}{10}\frac{g}{l}\lambda + \frac{3}{5}\left(\frac{g}{l}\right)^2 = 0. \tag{11}$$

Las soluciones de esta ecuación son los autovalores (frecuencias propias al cuadrado):

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\frac{3}{10}}\sqrt{\frac{g}{l}} \\ \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{6}\sqrt{\frac{g}{l}} \end{cases} \tag{12}$$

5.- Sustituyendo cada uno de los autovalores λ_i de (12) en la matriz característica (10) obtenemos los vectores propios asociados:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} l/3 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5l/4 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Normalizamos éstos haciendo que la máxima componente de cada uno igual a la unidad (para lo que supondremos que $l = 1$):

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} l/3 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} l \\ -4/5 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

6.- La matriz modal $\mathbf{A}$, obtenida con los vectores propios por filas, permite expresar el cambio a coordenadas normales:

$$\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} l/3 & l \\ 1 & -4/5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 12/l & 15 \\ 15/l & -5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} \tag{15}$$

Cambiando a coordenadas normales mediante (15_a) en la ecuación (8) y premultiplicando por la matriz modal, las ecuaciones diferenciales del movimiento quedan expresadas en estas coordenadas como dos ecuaciones desacopladas:

$$\frac{19}{9} ml^2 \ddot{u}_1 + \frac{19}{30} mglu_1 = 0 \tag{16}$$

$$\frac{19}{75} ml^2 \ddot{u}_2 + \frac{38}{25} mglu_2 = 0 \tag{17}$$

7.- Dada la sencillez de las ecuaciones (16, 17), resultan las más aconsejables para integrar el movimiento. Las condiciones iniciales para estas ecuaciones se obtienen a partir de los datos del problema aplicando (15_b):

$$\begin{bmatrix} u_1|_0 \\ u_2|_0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 12/l & 15 \\ 15/l & -5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \pi/6 \end{bmatrix} = \frac{5}{38}\pi \begin{bmatrix} 1 \\ -1/3 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} \dot{u}_1|_0 \\ \dot{u}_2|_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Con estos valores, la integración de las ecuaciones (16, 17) es inmediata,

$$u_1(t) = \frac{5}{38}\pi \cos(\omega_1 t) \tag{19}$$

$$u_1(t) = -\frac{5}{114}\pi \cos(\omega_2 t) \tag{20}$$

Por último, mediante (15_a) deshacemos el cambio y se obtiene la trayectoria dinámica para las coordenadas *geométricas* $(x(t), \theta(t))$:

$$x(t) = \frac{5}{114}\pi l(\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)) \tag{21}$$

$$\theta(t) = \frac{1}{19}\pi \left(\frac{5}{2}\cos(\omega_1 t) + \frac{2}{3}\cos(\omega_2 t) \right) \tag{22}$$