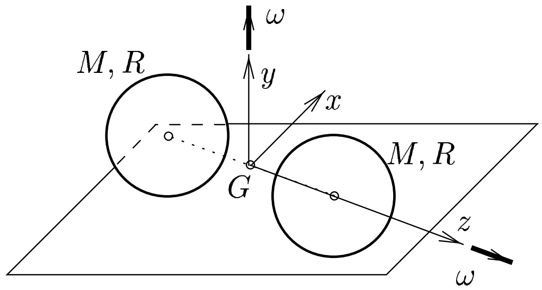
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE (13 de marzo de 1998)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Un sólido rígido está formado por dos esferas sólidas, de masa M y radio R cada una, unidas por una barra rígida sin masa que sigue la línea de sus centros, de forma que la distancia entre ambos es $4R$. Se pone en movimiento con las dos esferas apoyadas sobre un plano horizontal liso, con velocidad de rotación ω según la dirección de la barra y ω igualmente según la vertical.



Se pide:

1. expresar el tensor de inercia en ejes principales;
2. razonar si las componentes de la velocidad de rotación sobre el eje de la barra y el eje vertical deben mantenerse o no constantes;
3. expresar el momento cinético respecto al centro del sólido;
4. obtener las ecuaciones de Euler;
5. calcular el máximo valor de ω para que el sólido no se levante del plano por un extremo.

1.- Se toma el triedro de referencia $(Gxyz)$ de la figura, con z según el eje de revolución, y vertical, y x horizontal. Téngase en cuenta que no es el triedro del sólido, ya que no gira con él alrededor de su eje de revolución, sino que y se mantiene vertical en todo instante. El tensor de inercia es

$$\boldsymbol{I}_G = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix},$$

siendo

$$A = 2\left(\frac{2}{5}MR^2 + M(2R)^2\right) = \frac{44}{5}MR^2; \quad C = \frac{4}{5}MR^2.$$

2.- En general, las componentes de la velocidad de rotación según los ejes dados serían $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$. Supondremos que las dos esferas se mantienen apoyadas sobre el plano, por lo que $\omega_x = 0$. Por otra parte, las únicas fuerzas que producen momento en G son las reacciones verticales del plano sobre las esferas, cuyo momento en G lleva la dirección x. Puesto que la dirección y es fija, al no haber momento de las fuerzas según ella, el momento cinético según esta dirección es constante:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{j}) = \boldsymbol{M}_G \cdot \boldsymbol{j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{j} = A\omega_y = \text{cte.}$$

Por lo que $\omega_y = \omega$ (cte.). Aunque el momento no tiene tampoco componente según la dirección z, el razonamiento para este caso no es tan inmediato, ya que debemos considerar que es una dirección móvil:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\underbrace{(\boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{k})}_{C\omega_z} &= \frac{d}{dt}\boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{k} + \boldsymbol{H}_G \cdot \frac{d}{dt}\boldsymbol{k} = \underbrace{\boldsymbol{M}_G \cdot \boldsymbol{k}}_{=\mathbf{0}} + \boldsymbol{H}_G \cdot (\omega \boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{k}) \\ &= (A\omega \boldsymbol{j} + C\omega_z \boldsymbol{k}) \cdot (\omega \boldsymbol{i}) = 0 \end{aligned}$$

por lo que resulta igualmente $\omega_z = \omega$ (cte.).

3.- La expresión del momento cinético es

$$\boldsymbol{H}_G = A\omega\, \boldsymbol{j} + C\omega\, \boldsymbol{k}. \tag{1}$$

A lo largo del movimiento describe un cono de eje vertical con vértice en G.

4.- Llamando N_1 y N_2 a las reacciones del plano sobre cada esfera, el momento es $\boldsymbol{M}_G = 2R(N_1 - N_2)\, \boldsymbol{i}$. Por otra parte, la derivada del momento cinético (1), teniendo en cuenta que sus componentes en los ejes considerados son constantes, es

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{H}_G = \omega\, \boldsymbol{j} \wedge (A\omega\, \boldsymbol{j} + C\omega\, \boldsymbol{k}) = C\omega^2 \boldsymbol{i}.$$

Las ecuaciones de Euler se reducen por tanto a

$$2R(N_1 - N_2) = C\omega^2 \tag{2}$$

5.- Tenemos en cuenta además la ecuación de la cantidad de movimiento en dirección vertical,

$$N_1 + N_2 = 2Mg. \tag{3}$$

Entre las ecuaciones (2) y (3) despejamos las reacciones:

$$N_1 = Mg + \frac{1}{5}MR\omega^2; \quad N_2 = Mg - \frac{1}{5}MR\omega^2. \tag{4}$$

A medida que aumenta ω, llega un momento en que la reacción N_2 se anula, para el valor

$$\omega = \sqrt{5\frac{g}{R}},$$

en cuyo momento la esfera correspondiente se levantaría del plano.