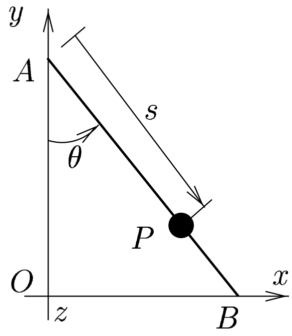
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE (13 de Enero de 1998)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Una varilla AB de masa m y longitud total l se mueve en un plano vertical de forma que el extremo A desliza sobre la vertical y el extremo B desliza sobre una recta horizontal. Asímismo, una partícula P de masa m puede deslizar libremente sobre la varilla sin abandonarla (ver figura adjunta). No existe rozamiento entre ninguna de las partes móviles. En el instante inicial el sistema parte del reposo con $\theta = 30°$ y $s = 0$.



Se pide, en función de s, θ y sus derivadas:

1. Expresión de la lagrangiana del sistema formado por la varilla y la partícula.
2. Ecuaciones de Lagrange.
3. Integrales primeras del movimiento.
4. Si $\dot\theta = \omega$ (cte), calcular mediante la técnica de los multiplicadores de Lagrange la reacción de la varilla sobre la partícula en un instante genérico.

---

1. El cálculo de la energía cinética se puede realizar empleando el teorema de König,

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot x_{O'}^2 + \dot y_{O'}^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\dot x_P^2 + \dot y_P^2\right) \tag{1}$$

siendo O' el punto medio de la varilla, y haciendo uso de las expresiones:

$$x_P = s\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad \dot x_P = \dot s\,\mathrm{sen}\,\theta + s\dot\theta\cos\theta; \qquad x_{O'} = \frac{l}{2}\mathrm{sen}\,\theta, \quad \dot x_{O'} = \frac{l}{2}\dot\theta\cos\theta \tag{2}$$

$$y_P = (l-s)\cos\theta, \quad \dot y_P = -(l-s)\dot\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - \dot s\cos\theta; \qquad y_{O'} = \frac{l}{2}\cos\theta, \quad \dot y_{O'} = -\frac{l}{2}\dot\theta\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{3}$$

La energía potencial, situando $V = 0$ en $y = 0$ tiene la expresión:

$$V = mg\left(\frac{1}{2}l\cos\theta + (l-s)\cos\theta\right) \tag{4}$$

La lagrangiana resulta, sustituyendo en (1) las expresiones dadas en (2, 3):

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{6}ml^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m\dot s^2 + \frac{1}{2}m\left(s^2 + l(l-2s)\,\mathrm{sen}^2\,\theta\right)\dot\theta^2 + ml\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,\dot\theta\dot s - mg\cos\theta\left(\frac{3l}{2} - s\right) \end{aligned} \tag{5}$$

2. Las ecuaciones de lagrange son:

$$m\ddot{s} + ml \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\ddot{\theta} + m(l\cos^2\theta - s)\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta = 0 \tag{6}$$

$$m\left(\frac{1}{3}l^2 + s^2 + l(l-2s)\operatorname{sen}^2\theta\right)\ddot{\theta} + ml(l-2s)\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\dot{\theta}^2 \\ + 2m(s - l\operatorname{sen}^2\theta)\dot{\theta}\dot{s} + ml\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\ddot{s} - mg\operatorname{sen}\theta\left(\frac{3l}{2} - s\right) = 0 \tag{7}$$

3. Examinando la lagrangiana dada por la expresión (5) se aprecia que ni θ ni s son coordenadas cíclicas, ya que aparecen explícitamente en ella.
Por otro lado se verifica que:

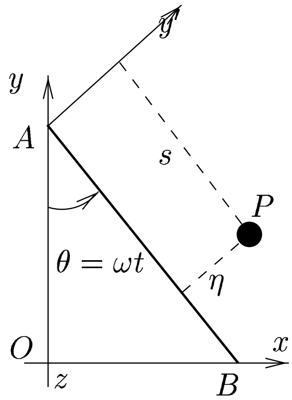
1. Todas las fuerzas directamente aplicadas (el peso) derivan de un potencial.
2. Este potencial es estacionario ($\frac{\partial V}{\partial t} = 0$).
3. La energía cinética es una función homogénea de orden dos en las derivadas primeras de las coordenadas generalizadas.

Por tanto, la energía total se mantiene constante, siendo ésta la única integral primera del movimiento, y que tiene la expresión (una vez que se ha particularizado para las condiciones iniciales dadas):

$$\begin{aligned} T + V &= \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}m\left(s^2 + l(l-2s)\operatorname{sen}^2\theta\right)\dot{\theta}^2 + ml\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{s} + mg\cos\theta\left(\frac{3l}{2} - s\right) \\ &= mg\frac{3l}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

4. Para calcular la reacción de la varilla sobre la partícula, hay que liberar el enlace que mantiene a la partícula en todo momento sobre la varilla introduciendo un parámetro adicional.

El parámetro más adecuado es la distancia de la partícula a la varilla, ya que la fuerza generalizada asociada al término del multiplicador de lagrange es directamente la fuerza de reacción buscada. Teniendo en cuenta que θ ya no es un grado de libertad al ser $\dot{\theta} = \omega$ (cte) y $\theta = \omega t$, los nuevos grados de libertad a considerar son (s, η), que no son sino las coordenadas de la partícula en un sistema de referencia móvil $(Ax'y')$ sobre la varilla con origen en el extremo A.



La energía cinética tiene la expresión general dada arriba (1),

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_{O'}|^2 + \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_P|^2 \tag{8}$$

en la que cambia la velocidad de la partícula ($\boldsymbol{v}_P$), ahora función de s y el nuevo grado de libertad η. La forma más directa de calcular ésta sería derivando las expresiones de las coordenadas de P en el sistema fijo (Oxy):

$$x_P = s\,\mathrm{sen}(\omega t) + \eta\cos(\omega t) \tag{9}$$
$$y_P = (l-s)\cos(\omega t) + \eta\,\mathrm{sen}(\omega t) \tag{10}$$

Sin embargo, por ser menos farragoso el desarrollo, preferimos realizar aquí el cálculo obteniendo la velocidad como composición de movimientos, expresando sus componentes según las direcciones del sistema móvil $Ax'y'$ (téngase en cuenta sin embargo que se trata de las componentes de la velocidad absoluta):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_P &= \boldsymbol{v}_A + \omega\,\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{AP} + \boldsymbol{v}_{\text{rel}}\\ &= -l\omega\,\mathrm{sen}(\omega t)\boldsymbol{j} + \omega(s\,\boldsymbol{j}' - \eta\,\boldsymbol{i}') + \dot{s}\,\boldsymbol{i}' + \dot{\eta}\,\boldsymbol{j}'\\ &= [-\omega\eta + \dot{s} + l\omega\,\mathrm{sen}(\omega t)\cos(\omega t)]\boldsymbol{i}' + [\omega s + \dot{\eta} - l\omega\,\mathrm{sen}^2(\omega t)]\boldsymbol{j}'.\end{aligned} \tag{11}$$

La energía potencial tiene la expresión:

$$V = mg\left[\left(\frac{3l}{2} - s\right)\cos(\omega t) + \eta\,\mathrm{sen}(\omega t)\right] \tag{12}$$

Calculando $|\boldsymbol{v}_{O'}|^2$ mediante (2, 3) y $|\boldsymbol{v}_P|^2$ a partir de (11), se obtiene T mediante (8), y restándole V dado en (12), resulta la siguiente expresión para la Lagrangiana:

$$\begin{aligned}L = \frac{1}{6}ml^2\omega^2 + \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}m\left(s^2 + l(l-2s)\,\mathrm{sen}^2(\omega t) + \eta^2 - 2l\eta\,\mathrm{sen}(\omega t)\cos(\omega t)\right)\omega^2\\ + m\left(l\,\mathrm{sen}(\omega t)\cos(\omega t) - \eta\right)\omega\dot{s} + \frac{1}{2}m\dot{\eta}^2 + m\omega\dot{\eta}\left(s - l\,\mathrm{sen}^2(\omega t)\right)\\ - mg\left[\left(\frac{3l}{2} - s\right)\cos(\omega t) + \eta\,\mathrm{sen}(\omega t)\right]\end{aligned} \tag{13}$$

Existe únicamente una ecuación de ligadura, cuya expresión es $\eta = 0$. En función de los desplazamientos virtuales la expresión es $\delta\eta = 0$, por lo que los coeficientes de Lagrange son:

$$A^s = 0, \quad A^\eta = 1$$

Las ecuaciones de lagrange resultan:

$$m\ddot{s} - 2m\dot{\eta}\omega + m\omega^2 l\cos^2(\omega t) - ms\omega^2 - mg\cos(\omega t) = 0 \tag{14}$$
$$m\ddot{\eta} + 2m\omega\dot{s} - ml\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t)\cos(\omega t) - m\eta\omega^2 + mg\,\mathrm{sen}(\omega t) - \lambda = 0 \tag{15}$$

La ecuación (15), imponiendo la ligadura ($\eta = \dot{\eta} = \ddot{\eta} = 0$) proporciona directamente el valor del multiplicador λ, que coincide con la reacción buscada:

$$R = \lambda = mg\,\mathrm{sen}(\omega t) - ml\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t)\cos(\omega t) + 2m\omega\dot{s}$$