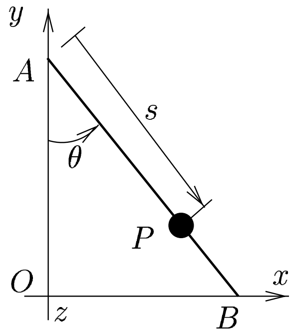
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE (16 de Diciembre de 1997)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Una varilla AB de masa m y longitud total l se mueve en un plano vertical de forma que el extremo A desliza sobre la vertical y el extremo B desliza sobre una recta horizontal. Asímismo, una partícula P de masa m puede deslizar libremente sobre la varilla sin abandonarla (ver figura adjunta). No existe rozamiento entre ninguna de las partes móviles. En el instante inicial el sistema parte del reposo con $\theta = 30°$ y $s = 0$.



Se pide, en función de s, θ y sus derivadas:

1. Expresión de la velocidad absoluta de la partícula P.
2. Expresión del momento cinético del conjunto varilla+partícula en O.
3. Ecuación del momento cinético en O.
4. Ecuaciones de la cantidad de movimiento de la varilla AB
5. Ecuaciones de la cantidad de movimiento de la partícula P
6. Expresar las ecuaciones del movimiento como dos ecuaciones diferenciales en las que intervengan exclusivamente s, θ y sus derivadas.

Nota: Expresar todas las magnitudes pedidas en el triedro fijo $(Oxyz)$ de la figura.

---

1. Las coordenadas del punto P en el sistema de referencia fijo $(Oxyz)$ son:

$$x_P = s \operatorname{sen}\theta; \qquad y_P = (l-s)\cos\theta. \tag{1}$$

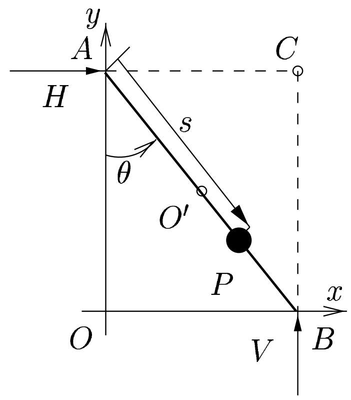
las componentes de $\boldsymbol{v}_P$ de obtienen al derivar (1)

$$\dot{x}_P = \dot{s}\operatorname{sen}\theta + s\dot{\theta}\cos\theta; \qquad \dot{y}_P = -(l-s)\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta - \dot{s}\cos\theta \tag{2}$$

Alternativamente, podríamos haber procedido mediante la expresión de la velocidad en el movimiento relativo, siendo el arrastre el movimiento de la varilla. Teniendo en cuenta el centro instantáneo de rotación $C \equiv (l\operatorname{sen}\theta, l\cos\theta)$, expresaríamos

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_{\text{arr}} + \boldsymbol{v}_{\text{rel}} = \dot{\theta}\,\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{CP} + \dot{s}(\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{i} - \cos\theta\,\boldsymbol{j}),$$

obteniendo igual resultado que (2).



2. El sistema varilla+partícula no es un sólido rígido, por lo que habrá que considerar el momento cinético total como la suma de los momentos de ambos cuerpos:

$$\boldsymbol{H}_O = (\boldsymbol{H}_O)_{\text{varilla}} + (\boldsymbol{H}_O)_{\text{partícula}}; \tag{3}$$

No es posible escribir directamente el momento cinético en O de la varilla como momento de inercia $\times$ velocidad angular, evaluando el momento de inercia mediante el teorema de Steiner. Para que pueda emplearse una expresión directa de este tipo es necesario que el punto O se corresponda con un punto del sólido de velocidad nula o con el centro de masas, lo que no ocurre aquí. Es preciso calcular $(\boldsymbol{H}_O)_{\text{varilla}}$ a partir del momento cinético respecto de otro punto auxiliar que pertenezca a la varilla (para lo cual tomaremos su centro de masas, O'), añadiendo el momento de la cantidad de movimiento del sistema ($\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v}_{O'}$). Resulta:

$$(\boldsymbol{H}_O)_{\text{varilla}} = \boldsymbol{H}_{O'} + m\boldsymbol{v}_{O'} \wedge \boldsymbol{O'O} = (\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta} - \frac{1}{4}ml^2\dot{\theta})\boldsymbol{k} = -\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}\,\boldsymbol{k}; \tag{4}$$

por otro lado:

$$(\boldsymbol{H}_O)_{\text{particula}} = m\boldsymbol{OP} \wedge \boldsymbol{v}_P = m\left(-(l-s)s\dot{\theta} - \frac{1}{2}\dot{s}l\,\text{sen}\,2\theta\right)\boldsymbol{k}. \tag{5}$$

El momento cinético total resulta:

$$\boldsymbol{H}_O = m\left(-\frac{1}{6}l^2\dot{\theta} - (l-s)s\dot{\theta} - \frac{1}{2}\dot{s}l\,\text{sen}\,2\theta)\right)\boldsymbol{k} \tag{6}$$

3. Para escribir la ecuación dinámica del momento cinético, hay que evaluar el momento de todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema varilla+partícula. Llamando V a la reacción en el extremo B (vertical) y H a la reacción en el extremo A (horizontal):

$$\boldsymbol{M}_O = \left(-Hl\cos\theta + Vl\,\text{sen}\,\theta - mg\,\text{sen}\,\theta(\frac{l}{2}+s)\right)\boldsymbol{k} \tag{7}$$

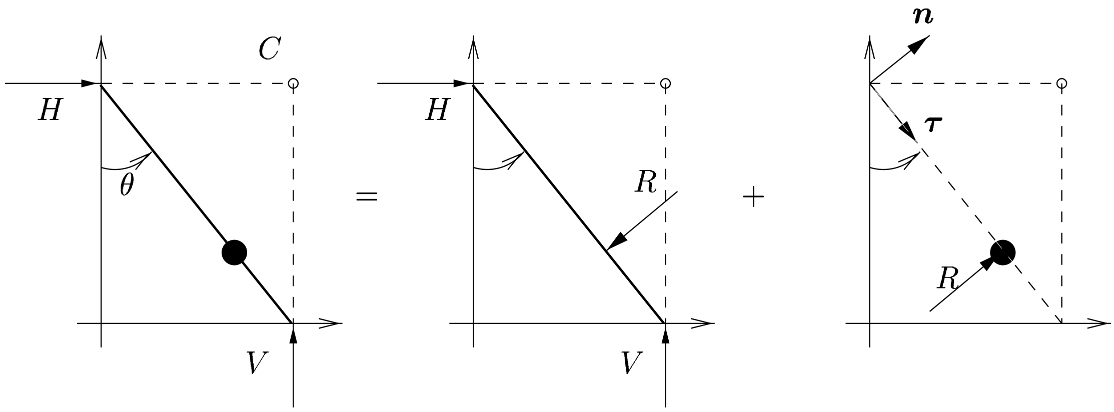
Puesto que O es un punto fijo, igualando (7) a la derivada de (6) resulta la ecuación pedida:

$$\begin{aligned} m\left(-\frac{1}{6}l^2 + s^2 - sl\right)\ddot{\theta} + 2m(s - l\cos^2\theta)\dot{\theta}\dot{s} - ml\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,\ddot{s} \\ = -Hl\cos\theta + Vl\,\text{sen}\,\theta - mg\,\text{sen}\,\theta(\frac{l}{2}+s) \end{aligned} \tag{8}$$

4. Para escribir las ecuaciones de la cantidad de movimiento de la varilla hay que calcular la aceleración de su centro de masas (O'). Esto se puede hacer derivando dos veces su vector posición:

$$x_{O'} = \frac{l}{2}\text{sen}\,\theta, \qquad \dot{x}_{O'} = \frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta, \qquad \ddot{x}_{O'} = \frac{l}{2}(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\,\text{sen}\,\theta); \tag{9}$$

$$y_{O'} = \frac{l}{2}\cos\theta, \qquad \dot{y}_{O'} = -\frac{l}{2}\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta, \qquad \ddot{y}_{O'} = -\frac{l}{2}(\ddot{\theta}\,\text{sen}\,\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta). \tag{10}$$



Llamando R a la reacción de la partícula P sobre la varilla, las ecuaciones resultan:

$$H - R\cos\theta = m\frac{l}{2}(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta) \tag{11}$$

$$V - mg - R\operatorname{sen}\theta = -m\frac{l}{2}(\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) \tag{12}$$

5. Las ecuaciones de la cantidad de movimiento de la partícula pueden obtenerse mediante dos procedimientos alternativos:

1. Derivando una vez más las expresiones (2) para obtener la aceleración de P expresada en el sistema fijo $(Oxyz)$, e igualar cada componente con las correspondientes fuerzas externas, en este caso las componentes del peso (mg) y la reacción (R) de la varilla sobre la partícula.

2. Plantear las ecuaciones en una dirección normal a la varilla $(\boldsymbol{n})$ y en otra según la propia varilla $(\boldsymbol{\tau})$. Esto tiene como ventaja el que en esta última ecuación no interviene la reacción R de la varilla, sino solamente los dos parámetros (s, θ).

Procediendo de la segunda forma, lo más cómodo para obtener las componentes de la aceleración normal y tangencial a la varilla es utilizar un sistema móvil auxiliar $(Ax'y'z')$ que se mueva con la propia varilla. Definimos este sistema de forma que el origen es el extremo A, el eje x' va según la dirección AB, el eje y' perpendicular contenido en el plano del movimiento y el z' perpendicular a ambos. La aceleración de P se expresa entonces como:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_P &= \boldsymbol{a}_{\text{rel}} + \boldsymbol{a}_{\text{arr}} + \boldsymbol{a}_{\text{cor}} \\ &= \left(\ddot{s} - s\dot{\theta}^2 + \frac{l}{2}\ddot{\theta}\operatorname{sen}2\theta + l\dot{\theta}^2\cos^2\theta\right)\boldsymbol{\tau} + \left(s\ddot{\theta} + 2\dot{s}\dot{\theta} - l\ddot{\theta}\operatorname{sen}^2\theta - \frac{l}{2}\dot{\theta}^2\operatorname{sen}2\theta\right)\boldsymbol{n}\end{aligned} \tag{13}$$

Proyectando la reacción y el peso en las direcciones $\boldsymbol{\tau}$ y $\boldsymbol{n}$, las ecuaciones resultan:

$$mg\cos\theta = m\left(\ddot{s} - s\dot{\theta}^2 + \frac{l}{2}\ddot{\theta}\operatorname{sen}2\theta + l\dot{\theta}^2\cos^2\theta\right) \tag{14}$$

$$-mg\operatorname{sen}\theta + R = m\left(s\ddot{\theta} + 2\dot{s}\dot{\theta} - l\ddot{\theta}\operatorname{sen}^2\theta - \frac{l}{2}\dot{\theta}^2\operatorname{sen}2\theta\right) \tag{15}$$

El movimiento del sistema completo viene descrito por las ecuaciones diferenciales (8), (11), (12), (14) y (15) con las incógnitas $(s(t), \theta(t), H(t), V(t), R(t))$.

6. Existen varias alternativas para escribir dos ecuaciones en s y θ.

6a. Despejar H, V y R en las ecuaciones (11), (12) y (15) e introducirlos en la ecuación (8). Operando así se obtiene la ecuación siguiente:

$$m\left[-\frac{1}{3}l^2 - s^2 - 2l^2\operatorname{sen}^4\theta + l(l+2s)\operatorname{sen}^2\theta\right]\ddot{\theta} + ml^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta(1-2\operatorname{sen}^2\theta)\dot{\theta}^2$$
$$+ 2m(l\operatorname{sen}^2\theta - s)\dot{\theta}\dot{s} + ml\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\ddot{s} + mg\left(2l\operatorname{sen}^3\theta - \left(\frac{l}{2}+s\right)\operatorname{sen}\theta\right) = 0. \quad (16)$$

Las ecuaciones (14) y (16) forman un sistema de dos ecuaciones en (s,θ).

6b. Calcular la función Lagrangiana y obtener las dos ecuaciones de Lagrange correspondientes. El cálculo de la energía cinética se puede realizar empleando el teorema de König,

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_{O'}^2 + \dot{y}_{O'}^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2\right),$$

y usando las expresiones (9, 10) y (2), la lagrangiana resulta

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}m\left(s^2 + l(l-2s)\operatorname{sen}^2\theta\right)\dot{\theta}^2 + ml\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{s} - mg\cos\theta\left(\frac{3l}{2}-s\right). \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Lagrange son:

$$m\ddot{s} + ml\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\ddot{\theta} + m(l\cos^2\theta - s)\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta = 0 \quad (17)$$

$$m\left(\frac{1}{3}l^2 + s^2 + l(l-2s)\operatorname{sen}^2\theta\right)\ddot{\theta} + ml(l-2s)\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\dot{\theta}^2$$
$$+ 2m(s - l\operatorname{sen}^2\theta)\dot{\theta}\dot{s} + ml\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\ddot{s} - mg\operatorname{sen}\theta\left(\frac{3l}{2}-s\right) = 0 \quad (18)$$

Comprobamos que el sistema formado por estas dos ecuaciones (17) y (18) equivale al formado por (14) y (16):

$$\begin{cases} (17) = (14) \\ (18) = -(16) + 2l\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cdot(14) \end{cases}$$

6c. Expresar como ecuación adicional a (14) la de la constancia de la energía total del sistema. Esta resulta, particularizando para las condiciones iniciales dadas,

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}m\left(s^2 + l(l-2s)\operatorname{sen}^2\theta\right)\dot{\theta}^2 + ml\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{s} + mg\cos\theta\left(\frac{3l}{2}-s\right) \\ &= mg\frac{3l}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$